КУЙБЫШЕВСКИЙ АВИАЦИОННЫЙ ИНСТИТУТ им. С. П. КОРОЛЕВА
Труды, выпуск 48, 1971 г.
Вопросы прочности элементов авиационных конструкций

В. П. Ивано

МЕТОД ВОЛНОВЫХ ДИНАМИЧЕСКИХ ЖЕСТКОСТЕЙ И ПОДАТЛИВОСТЕЙ ДЛЯ РАСЧЕТА КОЛЕБАНИЙ УПРУГИХ СИСТЕМ, ОБЛАДАЮЩИХ ЦИКЛИЧЕСКОЙ СИММЕТРИЕЙ

Расчету колебаний элементов роторов турбомашин, находя щихся в весьма напряженных вибрационных условиях, уделяетс большое внимание. Чаще всего такие элементы роторов, как, на пример, облопаченные диски, являются упругими системами, кон структивно обладающими циклической симметрией.

В данной статье излагается обобщенный подход к расчету ко лебаний линейно-упругих циклически симметричных систем, осно ванный на использовании вводимых здесь матриц волновых дина мических жесткостей и податливостей. Введение понятия таких мат риц, являющегося определенным обобщением понятия обычны матриц динамических жесткостей и податливостей, стало возмож ным после выявления особенностей спектра собственных движени любых линейно-упругих тел, обладающих циклической симметри ей. Эти особенности спектра выявлены в [7] и [8].

Использование матриц волновых динамических жесткостей податливостей дает возможность эффективно применить для расче та на колебания циклически симметричных систем хорошо разрабо танные методы динамических жесткостей и податливостей.

§ 1. Волновые динамические жесткости и податливости

Из [7] и [8] следует, что если установить наблюдение за сходст венными точками различных периодов циклически симметричног тела, совершающего свободные колебания с одной из собственны частот, то распределение амплитуд колебаний этих точек в окруж ном направлении будет подчинено дискретному гармоническом закону с тем или иным целым числом волн, укладывающихся по окружности тела. Этот факт аналитически в комплексной форме может быть выражен так:

$$q_k = qe^{i\frac{2\pi}{S}mk}. \tag{1}$$

Здесь: k — номер периода тела (отсчет ведется в окружном направлении по часовой стрелке); q_k — матрица-столбец комплексных амплитуд различных компонентов перемещений, наблюдаемых у точки, принадлежащей k-тому периоду, в цилиндрической системе координат; m — целое число волн перемещений, укладывающихся по окружности тела; q — матрица-столбец комплексных амплитуд волн перемещений; S — порядок циклической симметрии.

Аналогичная зависимость может быть записана и для внутренних усилий, действующих при свободных колебаниях по одной из собственных форм, в сходственных точках различных периодов:

$$Q_k = Qe^{i\frac{2\pi}{S}mk}. \tag{2}$$

Число волн перемещений и усилий будет, естественно, одинаковым. Возможное целое число волн зависит от порядка симметрии S и определяется из условия $0 \leqslant m \leqslant \frac{S}{2}$ [8]. В соответствии с этим весь спектр собственных движений циклически симметричного тела может быть распределен по ограниченному числу групп, каждая из которых характеризуется тем или иным целым числом m. Если рассматриваемое тело имеет распределенные параметры, то к каждой группе будет принадлежать неограниченно большое число различных собственных движений. Всем собственным частотам групп $0 < m < \frac{S}{2}$ соответствуют пары аналогичных, но взаимно ортогональных собственных форм с совпадающими частотами (кратность собственных чисел равна двум).

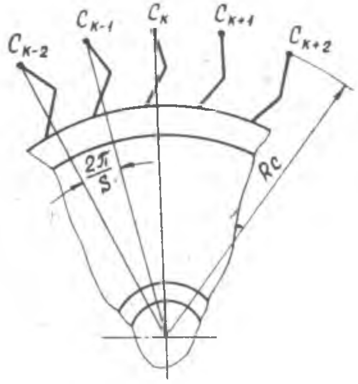
Справедливость отмеченных особенностей спектра собственных движений любых линейно-упругих тел, обладающих циклической симметрией, показана в [7, 8].

Опираясь на эти особенности спектра собственных движений, введем в рассмотрение понятия волновых динамических жесткостей и податливостей, которые могут быть эффективно использованы при расчете колебаний циклически симметричных систем стержневой структуры, допуская привлечение методов динамических жесткостей и податливостей, глубоко разработанных применительно к обычным системам стержневого типа [1—5].

На фиг. 1 представлена некоторая упругая система, обладающая циклической симметрией. Если в точках с этой системы, расположенных на радиусе Rc, приложить гармонические и синфазные во времени дискретные усилия с распределением амплитуд в окружном направлении, подчиняющимся зависимости (2), то распределение гармонических амплитуд перемещений этих точек в окружном направлении будет соответствовать зависимости (1) с тем же числом волн перемещений по окружности, что и число волн усилий. В соответствии с этим между комплексными амплитудами волн усилий может быть установлена линейная зависимость вида

$$Q_c = \widetilde{H}_c^m q_c, \tag{3}$$

Здесь: Q_c — матрица-столбец комплексных амплитуд волн дискретных усилий, действующих по окружности системы в точках c; q_c — матрица-столбец комплексных амплитуд волн перемещений точек c; $\widetilde{H}_c^m$ — квадратная матрица, имеющая тот же порядок, что и число независимых компонентов усилий и перемещений, входящих в матрицы-столбцы.



Фиг. 1.

Использование в соотношении (3) комплексных амплитуд волн усилий и перемещений позволяет в компактной форме учесть имеющуюся возможность относительного окружного сдвига волн различных компонентов усилий и перемещений, на которую обращалось внимание в [7, 8, 9].

Матрицу $\widetilde{H}_c^m$ будем называть матрицей волновых динамических жесткостей системы, относящейся к группе m и принадлежащей к точкам c. Поскольку в общем случае смещение сечения стрежня в любой из точек c возможно по шести независимым направлениям, то эта матрица может иметь шестой порядок. Элементы матрицы $\widetilde{H}_c^m$ являются функциями частоты колебаний. Те частоты, на которых определитель ее обращается в нуль, соответствуют резонансным колебаниям, а поэтому уравнение

$$|\widetilde{H}_c^m| = 0 \tag{4}$$

является для рассматриваемой системы уравнением частот группы m.

Для определения полного спектра собственных частот циклически симметричной системы уравнения вида (4) должны быть разрешены для всех целых чисел m, допускаемых порядком симметрии, т. е. для

$$0 \leqslant m \leqslant \frac{S}{2}.$$

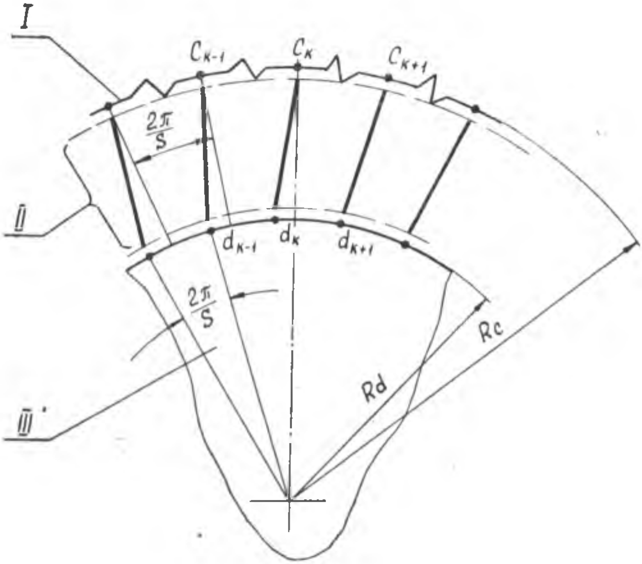
В отличие от обычных матриц динамических жесткостей, которые всегда симметричны, матрицы волновых динамических жесткостей являются самосопряженными (эрмитовыми), становясь симметричными лишь в частных случаях.

Матрицы волновых динамических податливостей, которые могут быть получены из матриц волновых динамических жесткостей путем обращения их, т. е., например, из

$$\widetilde{\Pi}_c^m = \left(\widetilde{H}_c^m\right)^{-1} \tag{5}$$

также являются самосопряженными.

Таким образом, матрицы волновых динамических жесткостей и податливостей устанавливают для любого циклически симметричного элемента, имеющего порядок симметрии S, связь между



Фиг. 2.

комплексными амплитудами волн внешних усилий, действующих на этот элемент в S равномерно расположенных по окружности точках и комплексными амплитудами волн перемещений тех же точек.

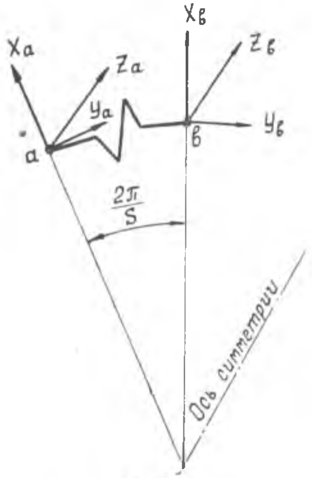
Путь образования матриц волновых динамических жесткостей и податливостей по тем или иным динамическим характеристикам различных циклически симметричных элементов показан ниже на нескольких примерах.

§ 2. Кольцевые элементы и их волновые и динамические жесткости и податливости

Циклически симметричные системы могут быть расчленены на типовые циклически симметричные элементы. На фиг. 2 показана циклическая симметричная система с порядком симметрии S, которая расчленена по радиусам R_d и R_c на три типовых элемента.

Первым из этих элементов является циклически симметричны кольцевой пояс связи. Второй элемент — это набор S не связанны между собой, но циклически симметрично расположенных стерж- ней. Третьим же элементом пусть будет некоторое тело, обладаю- щее циклической симметрией с порядком S.

а) Волновые динамические жесткости пояса связи (элемент I).



Фиг. 3.

На фиг. 3 приведен период пояса свя- зи. Не задавая периоду пояса связи кон- кретной структуры, будем полагать, что его динамические характеристики заданы в виде фундаментальной матрицы дина- мических жесткостей, определенной в двух местных прямоугольных системах коор- динат, начала которых расположены в точках a и b. Оси этих систем координат ориентированы, как показано на фиг. 3, по радиальному (ось x), и окружному (ось y) направлениям, а также по нап- равлению оси симметрии (ось z). В том случае, если динамические характеристи- ки периода пояса связи в точках a и b за- даны в координатных системах, которы ориентированы по другому, то переход к выбранным системам координат може быть осуществлен с помощью соответст- вующих матриц поворота усилий и перемещений [2, 5].

Учитывая вышеизложенное, связь между усилиями и переме- щениями в точках a и b может быть представлена зависимость

$$\left\|\begin{array}{c} -Q_a \\ \hline Q_b \end{array}\right\| = \left\|\begin{array}{c|c} D_{aa} & D_{ab} \\ \hline D_{ba} & D_{bb} \end{array}\right\| \cdot \left\|\begin{array}{c} q_a \\ \hline q_b \end{array}\right\|, \qquad (6)$$

Здесь: Q_a и Q_b — матрицы-столбцы амплитуд гармоническ усилий, действующих в точках a и b;

q_a и q_b — матрицы-столбцы амплитуд гармонических пе ремещений точек a и b;

D_{aa}, D_{ab}, D_{ba} и D_{bb} — квадратные матрицы.

В общем случае порядок этих матриц равен 6. Тогда фундамен- тальная квадратная матрица, составленная из них, будет имет 12-й порядок.

Очевидно, что D_{aa} и D_{bb} симметричны, а $D_{ba} = (D_{ab})^{т}$, т. к. фун- даментальная матрица симметрична.

Представим (6) в виде

$$-Q_a = D_{aa}\,q_a + D_{ab}\,q_b; \quad Q_b = D_{ba}\,q_a + D_{bb}\,q_b. \qquad (7)$$

В силу совместности деформаций соседних периодов кольца

$$q_{ak} = q_{b\,(k-1)} = q_{ck}. \qquad (8)$$

Из условия равновесия следует:

$$-Q_{ak}+Q_{b(k-1)}-Q_{ck}=0, \tag{9}$$

где Q_{ak} и $Q_{b(k-1)}$ — усилия, действующие в точке c_k со стороны правого и левого периодов пояса связи;

Q_{ck} — внешнее усилие, действующее в точке c_k.

Тогда, используя (7), (8) и (9), получим

$$Q_{ck}=-Q_{ak}+Q_{b(k-1)}=$$

$$=D_{aa}q_{ck}+D_{ab}q_{c(k+1)}+D_{ba}q_{c(k-1)}+D_{bb}q_{ck}.$$

Имея же в виду, что

$$Q_{ck}=Q_c e^{i\frac{2\pi}{S}mk}, \quad q_{ck}=q_c e^{i\frac{2\pi}{S}mk}$$

найдем

$$Q_c=\widetilde{H}_c^m q_c, \tag{10}$$

где $\widetilde{H}_c^m$ — матрица волновых динамических жесткостей пояса связи, которая может быть найдена из выражения:

$$\widetilde{H}_c^m=D_{ab}e^{i\frac{2\pi}{S}m}+D_{aa}+D_{bb}+D_{ba}e^{-i\frac{2\pi}{S}m}. \tag{11}$$

Отметим особенности этой матрицы.

Поскольку

$$e^{i\frac{2\pi}{S}m}=\cos\frac{2\pi}{S}m+i\sin\frac{2\pi}{S}m, \quad e^{-i\frac{2\pi}{S}m}=\cos\frac{2\pi}{S}m-i\sin\frac{2\pi}{S}m,$$

то из (11) получим:

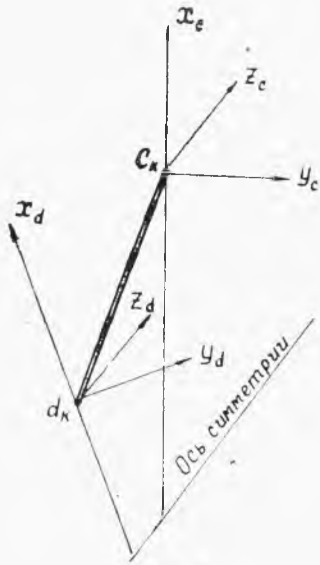
$$\widetilde{H}_c^m=D_{aa}+D_{bb}+(D_{ba}+D_{ab})\cos\frac{2\pi}{S}m+i({}_{ab}D-D_{ba})\sin\frac{2\pi}{S}m. \tag{12}$$

Отсюда видно, что матрица волновых динамических жесткостей пояса связи является суммой двух матриц, первая из которых симметрична и имеет вещественные элементы, а вторая кососимметрична и имеет мнимые элементы.

Таким образом, матрица волновых динамических жесткостей в отличие от обычных матриц динамических жесткостей, которые всегда симметричны, является самосопряженной (эрмитовой).

То, что матрица волновых динамических жесткостей является самосопряженной, предопределяет возможность относительного сдвига в окружном направлении компонентов волн усилий и перемещений.

Выражение (12) позволяет по динамическим характеристикам периода пояса связи определить волновые динамические жесткости всего пояса связи. Естественно, что волновые динамические жесткости пояса связи должны определяться для всех целых чисел m, которые допускаются порядком циклической симметрии системы, т. е. для $0\leqslant m\leqslant\frac{S}{2}$.



Фиг. 4.

б) Волновые динамические жесткости циклически симметричного набора стержней, не связанных между собой. (элемент 11).

На фиг. 4 показан один (к-тый) из S свободных стержней, из которых составлен рассматриваемый элемент. Его динамические характеристики зададим в виде фундаментальной матрицы динамических жесткостей, которая будет устанавливать связь между амплитудами гармонических усилий и перемещений в местных прямоугольных системах координат, ориентированных так же, как и в предыдущем случае.

$$\left\|\begin{array}{c} -Q_{dk} \\ \hline Q_{ck} \end{array}\right\| = \left\|\begin{array}{c|c} D_{dd} & D_{dc} \\ \hline D_{cd} & D_{cc} \end{array}\right\| \cdot \left\|\begin{array}{c} q_{dk} \\ \hline q_{ck} \end{array}\right\| \quad (13)$$

Поскольку стержни идентичны и не связаны между собой, то аналогичной зависимостью могут быть связаны комплексные амплитуды волн усилий и перемещений.

Имея в виду, что

$$Q_{dk} = Q_d\, e^{i\frac{2\pi}{S}mk}, \quad Q_{ck} = Q_c\, e^{i\frac{2\pi}{S}mk},$$

$$q_{dk} = q_d\, e^{i\frac{2\pi}{S}mk}, \quad q_{ck} = q_c\, e^{i\frac{2\pi}{S}mk},$$

получим из (13):

$$\left\|\begin{array}{c} -Q_d \\ \hline Q_c \end{array}\right\| = \left\|\begin{array}{c|c} D_{dd} & D_{dc} \\ \hline D_{cd} & D_{cc} \end{array}\right\| \cdot \left\|\begin{array}{c} q_d \\ \hline q_c \end{array}\right\| . \quad (14)$$

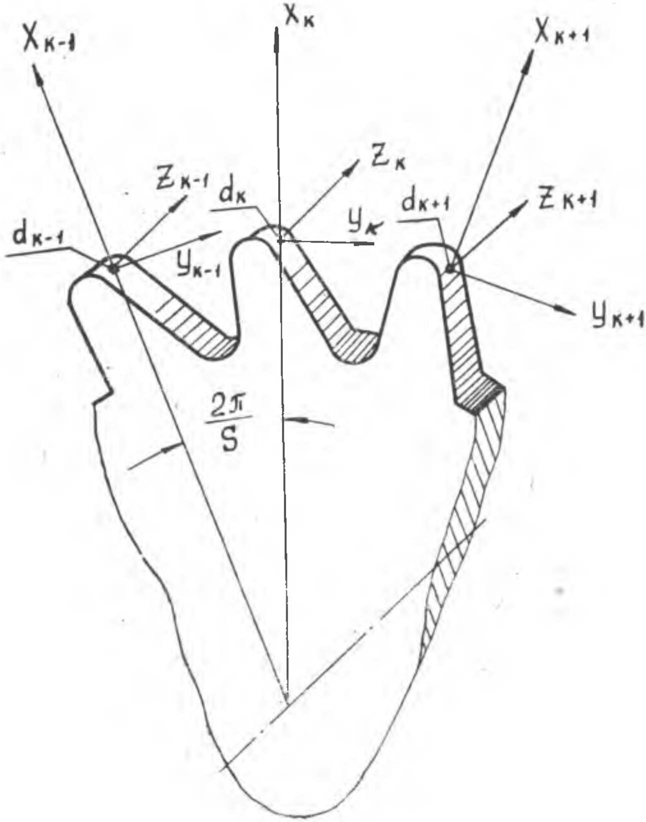
Если в выражении (13) квадратная матрица являлась фундаментальной матрицей k-того стержня, то в выражении (14) та же матрица уже является фундаментальной матрицей волновых динамических жесткостей всего рассматриваемого элемента. Эти матрицы совпадают, поскольку отсутствуют связи между стержнями.

Как видно, волновые динамические жесткости рассматриваемого кольцевого элемента не зависят от числа волн деформации m.

в) Волновые динамические жесткости циклически симметричного тела (элемент III).

На фиг. 5 показано некоторое тело, обладающее циклической симметрией с порядком S. Определим волновые динамические податливости этого тела в точках d, где предполагается его сочленение со стержневой частью системы. В этих точках, как и ранее, размещены местные системы координат с той же ориентацией осей.

Будем предполагать известным решение задачи о вынужденных колебаниях этого тела под действием системы шести независимых усилий, приложенных в одной из точек d, например, в точке $d_к$.



Фиг. 5.

Это решение представим в виде совокупности S матриц динамических податливостей T_{nk}, определенных для всех S точек d. Компоненты матриц будем определять в соответствии с перемещениями и усилиями, задаваемыми в местных системах координат.

Если в точках d к телу приложены гармонические усилия с амплитудами, задаваемыми в виде матриц-столбцов $Q_{d0}, Q_{d1}, \ldots, Q_{dk}, \ldots Q_{d(S-1)}$, то n-ая точка d получит перемещения:

$$q_{dn} = \sum_{k=0}^{S-1} T_{nk} Q_{dk},$$

где q_{dn} — матрица-столбец амплитуд перемещений n-ой точки;
Q_{dk} — матрица-столбец амплитуд усилий, действующих в k-той точке;
T_{nk} — квадратная матрица динамических податливостей, устанавливающая связь между амплитудами гармонических усилий, действующих в k-той точке, и амплитудами гармонических перемещений n-ой точки.

Полагая

$$q_{dn} = q_d e^{i\frac{2\pi}{S}mn}, \quad Q_{dk} = Q_d e^{i\frac{2\pi}{S}mk},$$

где q_d и Q_d — матрицы-столбцы комплексных амплитуд волн перемещений и усилий, получим:

$$q_d = \sum_{k=0}^{S-1} T_{nk} Q_d e^{i\frac{2\pi}{S}m(k-n)}. \tag{15}$$

В силу циклической симметрии

$$T_{nk} = T_{(n+r)(k+r)},$$

где r — любое целое число. Поэтому

$$q_d = \sum_{k=0}^{S-1} T_{ok} Q_d e^{i\frac{2\pi}{S}mk}. \tag{16}$$

При нечетном S это соотношение можно записать в виде

$$q_d = \left[T_{oo} + \sum_{k=1}^{\frac{S-1}{2}} T_{ok} e^{i\frac{2\pi}{S}mk} + \sum_{k=1}^{\frac{S-1}{2}} T_{o(S-k)} e^{i\frac{2\pi}{S}m(S-k)}\right] Q_d$$

и соответственно, при четном S:

$$q_d = \left[T_{oo} + T_{0\frac{S}{2}} e^{i\pi m} + \sum_{k=1}^{\frac{S}{2}-1} T_{ok} e^{i\frac{2\pi}{S}mk} + \sum_{k=1}^{\frac{S}{2}-1} T_{o(S-k)} e^{i\frac{2\pi}{S}m(S-k)}\right] Q_d.$$

Тогда, имея в виду, что в силу теоремы взаимности

$$T_{ok}^T = T_{ko},$$

и что из условия цикличности вытекает

$$T_{ko} = T_{o(S-k)},$$

получим

$$q_d = \left[R_d^m + iP_d^m\right] Q_d = \widetilde{\Pi}_d^m Q_d, \tag{17}$$

где для нечетного S

$$R_d^m = T_{00} + \sum_{k=1}^{\frac{S-1}{2}} (T_{ok} + T_{ok}^T) \cos\frac{2\pi}{S}mk,$$

$$= P_d^m \sum_{k=1}^{\frac{S-1}{2}} (T_{ok} - T_{ok}^T) \sin\frac{2\pi}{S} mk$$

для четного S

$$R_d^m = T_{00} + T_{0\frac{S}{2}}(-1)^m + \sum_{k=1}^{\frac{S}{2}-1}(T_{ok} + T_{ok}^T)\cos\frac{2\pi}{S}mk,$$

$$P_d^m = \sum_{k=1}^{\frac{S}{2}-1}(T_{ok} - T_{ok}^T)\sin\frac{2\pi}{S}mk.$$

Матрица $\widetilde{\Pi}_d{}^m$ в выражении (17) является матрицей волновых динамических податливостей циклически симметричного тела. Как следует из вышеизложенного, она может быть найдена для всех допускаемых порядком симметрии чисел волн m, если решена задача о вынужденных колебаниях рассматриваемого тела под действием системы шести независимых единичных усилий, прилагаемых в одной из тех его точек, в которых эта матрица должна быть определена. Нетрудно видеть, что в общем случае она также является самосопряженной (эрмитовой).

Матрица волновых динамических жесткостей для данного случая может быть получена путем обращения матрицы волновых динамических податливостей, т. е. из

$$\widetilde{H}_d^m = (\widetilde{\Pi}_d^m)^{-1}. \qquad (18)$$

Она имеет аналогичную структуру, т. е. также является самосопряженной. Когда рассматриваемое тело обладает осевой симметрией ($S=\infty$, круглый диск, осесимметричная оболочка и т. п.), а число точек S, в которых происходит стыковка его со стержневыми элементами системы, достаточно велико, действие дискретных сил, приложенных в этих точках, может быть приближенно заменено действием эквивалентных распределенных нагрузок. Такой прием облегчает определение динамических характеристик тела и широко используется (например [2]). Он соответствует замене циклически симметричной системы, некоторой приближенно эквивалентной осесимметричной системой. В этом случае волновые динамические жесткости будут устанавливать связь между комплексными амплитудами волн распределенных нагрузок и комплексными амплитудами волн перемещений.

§ 3. Использование волновых динамических жесткостей и податливостей для целей расчета

Введение волновых динамических жесткостей и податливостей позволяют строить решение задач о колебаниях циклически симметричных систем совершенно аналогично тому, как это делается при решении задач о колебаниях обычных цепных и разветвленных систем методами динамических жесткостей и податливостей [2, 5]. Проиллюстрируем это на примере системы, показанной на фиг. 2.

Если в заданном диапазоне частот определены матрицы волновых динамических жесткостей в точках d центрального тела и установлена зависимость

$$Q_d^{\mathrm{III}} = (\widetilde{H}_d^m)^{\mathrm{III}} q_d^{\mathrm{III}}, \tag{19}$$

то волновая динамическая жесткость части системы в точках c, которая включает в себя центральное тело и связанные с ним в точках d стержни, может быть найдена следующим образом. Имея в виду (14), запишем

$$-Q_d^{\mathrm{II}} = D_{dd} q_d^{\mathrm{II}} + D_{dc} q_c^{\mathrm{II}}, \tag{20}$$

$$Q_c^{\mathrm{II}} = D_{cd} q_d^{\mathrm{II}} + D_{cc} q_c^{\mathrm{II}}. \tag{21}$$

Учитывая условие равновесия $Q_d^{\mathrm{III}} - Q_d^{\mathrm{II}} = 0$ и условие совместности деформаций $q_d^{\mathrm{III}} = q_d^{\mathrm{II}}$ и используя (19) и (20), найдем

$$q_d = q_d^{\mathrm{II}} = q_d^{\mathrm{III}} = -\left[(\widetilde{H}_d^m)^{\mathrm{III}} + D_{dd}\right]^{-1} D_{dc} q_c''.$$

Исключив с помощью этого выражения q_d в (21), получим

$$Q_c^{\mathrm{II+III}} = (\widetilde{H}_c^m)^{\mathrm{II+III}} q_c^{\mathrm{II}}. \tag{22}$$

Здесь

$$(\widetilde{H}_c^m)^{\mathrm{II+III}} = \left\{-D_{cd}\left[(\widetilde{H}_d^m)^{\mathrm{III}} + D_{dd}\right]^{-1} D_{dc} + D_{cc}\right\}. \tag{23}$$

Эта матрица является матрицей волновых динамических жесткостей части системы, включающей в себя элементы II и III и которая определена в точках c.

Если динамические характеристики элемента III заданы в виде матрицы волновых динамических податливостей, т. е. в виде

$$(\widetilde{\Pi}_c^m)^{\mathrm{III}} = \left[(\widetilde{H}_c^m)^{\mathrm{III}}\right]^{-1},$$

то волновая динамическая жесткость части системы, определяемая в точках c, может быть найдена из аналогичного выражения

$$(\widetilde{H}_c^m)^{\mathrm{II+III}} = \left\{-D_{cd}\left[I + (\widetilde{\Pi}_c^m)^{\mathrm{III}} D_{dd}\right]^{-1} (\widetilde{\Pi}_c^m)^{\mathrm{III}} D_{dc} + D_{cc}\right\}.$$

Теперь, учитывая условия равновесия и совместности деформаций, нетрудно найти волновую динамическую жесткость в точках c для всей системы:

$$(\widetilde{H}_c^m)^{\mathrm{I+II+III}} = (\widetilde{H}_c^m)^{\mathrm{I}} + (\widetilde{H}_c^m)^{\mathrm{II+III}},$$

где $(\widetilde{H}_c{}^m)^{\mathrm{I}}$ — волновая динамическая жесткость пояса связи (элемент I) в точках c.

Комплексные амплитуды волн внешних усилий, действующих в точках c, и комплексные амплитуды волн перемещений будут связаны независимостью

$$Q_c = (\widetilde{H}_c^m)^{\mathrm{I+II+III}} q_c. \tag{24}$$

Если в точках c система свободна, тогда $Q_c = 0$, но поскольку $q_c \neq 0$, то уравнением частот будет определитель

$$\left| \left(\widetilde{H}_c^m \right)^{\mathrm{I+II+III}} \right| = 0. \tag{25}$$

После выявления с помощью (25) собственных частот системы и конкретных значений элементов матрицы волновых динамических жесткостей перемещения точек c могут быть определены с помощью системы однородных уравнений

$$\left(\widetilde{H}_c^m \right)^{\mathrm{I+II+III}} q_c = 0. \tag{26}$$

Нужно иметь в виду, что в этой системе уравнений некоторые ее коэффициенты (матрица коэффициентов является самосопряженной), а также искомые неизвестные являются комплексными величинами. После решения данной системы могут быть определены с точностью до постоянного множителя абсолютные величины амплитуд волн перемещений различных компонентов, а также относительный сдвиг этих волн в окружном направлении.

Для того чтобы определить полный спектр собственных движений, уравнение частот (25) и система уравнений (26) должны быть разрешены для всех целых чисел волн m, допускаемых порядком симметрии, т. е. для $0 \leqslant m \leqslant \frac{s}{2}$.

Изложенный пример достаточно полно иллюстрирует пути использования матриц волновых динамических жесткостей и податливостей для решения различных задач о колебаниях циклически симметричных систем. Как видно, введение понятий волновых динамических жесткостей и податливостей позволяет эффективно применить хорошо разработанные методы динамических жесткостей и податливостей [1—5] и применительно к расчету колебаний упругих систем, обладающих циклической симметрией, допуская в ряде случаев, на что указано в [9], получение корректных решений, которые ранее отсутствовали.

Практически численное решение задач, когда приходится рассматривать сложные многосвязные системы, реально осуществимо на ЭЦВМ. Использование стандартных программ действий над самосопряженными матрицами, к которым относятся матрицы волновых динамических жесткостей и податливостей, облегчает эту работу.

ЛИТЕРАТУРА

1. Ф. М. Диментберг. Применение метода динамической жесткости для расчета связанных колебаний. Сб. «Динамика и прочность коленчатых валов». ИМАШ, АН СССР, 1948.

2. В. К. Дондошанский. Расчет колебаний упругих систем. Машиностроение, 1965.

3. М. Л. Кемпнер. Методы динамических податливостей и жесткостей для расчета изгибных колебаний упругих систем со многими степенями свободы. Сб. «Поперечные колебания и критические скорости». ИМАШ АН СССР. 1951.

4. А. М. Огуречников. Динамические жесткости вращающихся валов. Труды МАИ, вып. 55, Оборонгиз, 1956.

5. В. А. Троицкий. Матричные методы расчета колебаний стержневых систем. Труды ЛПИ, вып. 210, 1960.

7. В. П. Иванов. Некоторые вопросы колебаний лопаточных венцов и других упругих тел, обладающих циклической симметрией. Сб. «Динамика и прочность авиационных двигателей». Машиностроение, вып. 6.

8. В. П. Иванов. Общие свойства спектра собственных движений линейно-упругих тел, обладающих циклической симметрией. Помещена в настоящем сборнике.

9. В. П. Иванов. Свободные колебания лопаточного венца с лопатками, обладающими изгибно-крутильной связанностью. Труды КуАИ, вып. 39, 1968.