КУЙБЫШЕВСКИЙ АВИАЦИОННЫЙ ИНСТИТУТ им. С. П. КОРОЛЕВА
Труды, выпуск 48, 1971 г.
Вопросы прочности элементов авиационных конструкций

Г. Е. Белашевский

КОНЦЕНТРАЦИЯ НАПРЯЖЕНИЙ В КРУГОВОЙ ЦИЛИНДРИЧЕСКОЙ ОБОЛОЧКЕ С КРИВОЛИНЕЙНЫМ ОТВЕРСТИЕМ

Принятые обозначения

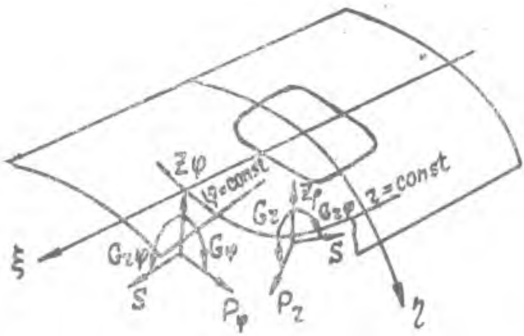
R, h — радиус срединной поверхности и толщина оболочки;
R_0 — характерный размер отверстия;
$\lambda = \frac{R}{h}$; $\varkappa = \frac{R_0}{R}$ — безразмерные параметры оболочки;
(ξ, η), (ρ, θ), (r, φ) — безразмерные прямоугольные, полярные и ортогональные криволинейные координаты точки срединной поверхности оболочки (все линейные размеры отнесены к R_0, фиг. 1);
u, v, w — компоненты вектора перемещения в (ρ, θ);
U, V, W — компоненты вектора перемещения в (r, φ);
M_ρ, M_θ, N_ρ, N_θ, $T_{\rho\theta}$ — изгибающие моменты, нормальные и касательные усилия в (ρ, θ);
G_r, G_φ, P_r, P_φ, $S_{r\varphi}$ — изгибающие моменты, нормальные и касательные усилия в (r, φ);
Q^*_ρ, $H_{\rho\theta}$, Z^*_r, $G_{r\varphi}$ — перерезывающая сила и крутящий момент в (ρ, θ) и (r, φ) соответственно;
Φ — функция напряжений;
$\nabla^2 = \frac{\partial^2}{\partial\xi^2} + \frac{\partial^2}{\partial\eta^2}$ — оператор Лапласа.

В работе изложен метод определения напряжений в цилиндрической оболочке, ослабленной некруговым вырезом средних размеров, при нагружении, симметричном относительно прямоугольных осей координат (фиг. 1). Рассмотрен также случай впаянной в отверстие абсолютно жесткой шайбы. С помощью метода возмущения формы границы, разработанного А. Н. Гузем [1], задача сведена к решению бесконечных систем алгебраических уравнений (в нулевом и первом приближениях).

Расчету цилиндрической оболочки с некруговым отверстием посвящен ряд работ, из которых отметим [2], [3] и [6]. Подробный обзор литературы приведен в [4] и [7].

1. Усилия и перемещения

Следуя общей постановке задачи о концентрации напряжений, данной Г. Н. Савиным [6], напряженное состояние оболочки условно будем разделять на основное (для оболочки без отверстия при заданной внешней нагрузке) и дополнительное, в котором по контуру выреза приложены усилия, обеспечивающие удовлетворение граничных условий. Дополнительное напряженное состояние описывается уравнением пологой цилиндрической оболочки [5]:



Фиг. 1.

$$\nabla^2 \nabla^2 F(\xi, \eta) + 8i\omega^2 \frac{\partial^2 F(\xi, \eta)}{\partial \xi^2} = 0, \tag{1}$$

где

$$F(\xi, \eta) = W(\xi, \eta) + i\Phi(\xi, \eta),$$

$$\omega^2 = \frac{\sqrt{3(1-\mu^2)}}{4} \varkappa^2 \lambda. \tag{2}$$

Решение уравнения (1) в случае круглого отверстия для принятого вида нагружения можно, переходя к полярной системе координат, представить в виде [8]:

$$F(\rho, \Theta) = \sum_{\nu=0,2,4\ldots}^{\infty} \sum_{n=0} l_\nu B_n L_{n\nu}(z) \cos \nu\Theta, \tag{3}$$

$$(l_\nu = 0{,}5 \text{ при } \nu = 0,\ l_\nu = 1 \text{ при } \nu \neq 0),$$

где

$$L_{n\nu}(z) = H_n^{(1)}(z)\left[J_{n-\nu}(z) + J_{n+\nu}(z)\right] = \alpha_{n\nu}(x) + i\beta_{n\nu}(x),$$
$$z = x\sqrt{2i}, \quad x = \omega\rho, \tag{4}$$

$J_m(z)$ — функция Бесселя; $H_n^{(1)}(z)$ — функция Ганкеля первого рода; $B_n = c_n + id_n$ — постоянные интегрирования.

Предположим, что функция

$$s = \zeta + \varepsilon f(\zeta), \quad f(\zeta) = \sum_{k=1}^{m} a_k \zeta^{-k}, \tag{5}$$

где

$$s = \rho e^{i\theta};\ \zeta = re^{i\varphi};\ |\varepsilon| < 1;\ a_к \text{ — постоянные},$$

конформно отображает бесконечную плоскость ζ с круглым отверстием единичного радиуса на бесконечную плоскость s с отверстием заданной некруговой формы.

Применяя метод возмущения формы границы [1], для усилий и перемещений в оболочке с некруговым отверстием в нулевом и первом приближениях получим выражения:

$$G_r^{(i)} = M_r^{(i)} + k_i\,\Delta G_r^{(i)},\quad G_\varphi^{(i)} = M_\varphi^{(i)} + k_i\,\Delta G_\varphi^{(i)},$$

$$P_r^{(i)} = N_r^{(i)} + k_i\,\Delta P_r^{(i)};$$

$$P_\varphi^{(i)} = N_\varphi^{(i)} + k_i\,\Delta P_\varphi^{(i)},\quad S_{r\varphi}^{(i)} = T_{r\varphi}^{(i)} + k_i\,\Delta S_{r\varphi}^{(i)};$$

$$G_{r\varphi}^{(i)} = H_{r\varphi}^{(i)} + k_i\,\Delta G_{r\varphi}^{(i)},\quad \overset{*}{Z}{}_r^{(i)} = \overset{*}{Q}{}_r^{(i)} + k_i\Delta \overset{*}{Z}{}_r^{(i)}; \tag{6}$$

$$W^{(i)} = w^{(i)} + k_i\,\Delta W^{(i)},\quad \left(\frac{\partial W}{\partial n}\right)^{(i)} = \left(\frac{\partial w}{\partial r}\right)^{(i)} + k_i\Delta\left(\frac{\partial W}{\partial n}\right)^{(i)};$$

$$U^{(i)} = u^{(i)} + k_i\,\Delta U^{(i)},\quad V^{(i)} = v^{(i)} + k_i\,\Delta V^{(i)}, \tag{7}$$

$$(i = 0{,}1,\quad k_0 = 0,\quad k_1 = 1).$$

Здесь n — нормаль к криволинейному контуру. Индексом i обозначен номер приближения. Формулы для $M_r^{(i)}$, $M_\varphi^{(i)}$ ... $v^{(i)}$ можно получить путем формальной замены ρ, θ, $x = \omega\rho$ в выражениях (9), (11) и (16) работы [8] соответственно на r, φ, $y = \omega r$. Используя дифференциальные операторы L_k^m, приведенные в монографии [7], получим

$$\Delta G_r^{(1)} = -\frac{\varkappa^2 ER}{64\omega^2\lambda}\sum_{\nu=0,2,4\ldots}^{\infty}\sum_{n=0}^{\infty} l_\nu\,[c_n^{(0)}\bar f_{1n\nu} - d_n^{(0)}\bar f_{2n\nu}]\,y\cos\nu\varphi,$$

$$\Delta\overset{*}{Z}{}_r^{(1)} = -\frac{\varkappa E}{64\omega\lambda}\sum_{\nu=0,2,4\ldots}^{\infty}\sum_{n=0}^{\infty} l_\nu\,[c_n^{(0)}\bar f_{3n\nu} - d_n^{(0)}\bar f_{4n\nu}]\cos\nu\varphi,$$

$$\Delta P_r^{(1)} = -\frac{E}{8\lambda}\sum_{\nu=0,2,4\ldots}^{\infty}\sum_{n=0}^{\infty} l_\nu\,[c_n^{(0)}\bar f_{6n\nu} + d_n^{(0)}\bar f_{5n\nu}]\,y\cos\nu\varphi,$$

$$\Delta S_{r\varphi}^{(1)} = -\frac{E}{8\lambda}\sum_{\nu=2,4\ldots}^{\infty}\sum_{n=0}^{\infty}[c_n^{(0)}\bar f_{8n\nu} + d_n^{(0)}\bar f_{7n\nu}]\,y\sin\nu\varphi,$$

$$\Delta P_\varphi^{(1)} = -\frac{E}{8\lambda}\sum_{\nu=0,2,4\ldots}^{\infty}\sum_{n=0}^{8} l_\nu\,[c_n^{(0)}\bar f_{12n\nu} + d_n^{(0)}\bar f_{11n\nu}]\,y\cos\nu\varphi,$$

$$\Delta G_{r\varphi}^{(1)} = (1-\mu)\frac{\varkappa^2 ER}{64\omega^2\lambda}\sum_{\nu=2,4\ldots}^{\infty}\sum_{n=0}^{\infty}[c_n^{(0)}\bar f_{7n\nu} - d_n^{(0)}\bar f_{8n\nu}]\,y\sin\nu\varphi,$$

$$\Delta G_\varphi^{(1)} = -\frac{\varkappa^2 ER}{64\omega^2\lambda}\sum_{\nu=0,2,4\ldots}^{\infty}\sum_{n=0}^{\infty} l_\nu\,[c_n^{(0)}\bar f_{9n\nu} - d_n^{(0)}\bar f_{10n\nu}]\,y\cos\nu\varphi,$$

$$\Delta W^{(1)} = \sum_{\nu=0,2,4\ldots}^{\infty}\sum_{n=0}^{\infty} l_\nu\,[c_n^{(0)}\bar f_{13n\nu} - d_n^{(0)}\bar f_{14n\nu}]\,y^3\cos\nu\varphi,$$

$$\Delta\left(\frac{\partial W}{\partial n}\right)^{(1)} = \frac{\omega}{R_0} \sum_{\nu=0,2,4\ldots}^{\infty} \sum_{n=0}^{\infty} l_\nu \left[c_n^{(0)} \overline{f}_{15n\nu} - d_n^{(0)} \overline{f}_{16n\nu}\right] y^2 \cos \nu\varphi,$$

$$\Delta U^{(1)} = \frac{\varkappa}{16} \sum_{\nu=0,2,4\ldots}^{\infty} \sum_{n=0}^{\infty} l_\nu \left[c_n^{(0)} \left(\overline{S}_{2n\nu} + y^2 \overline{S}_{3n\nu}\right) + d_n^{(0)} \left(\overline{S}_{1n\nu} - y^2 \overline{S}_{4n\nu}\right)\right] y \cos \nu\varphi$$

$$\Delta V^{(1)} = \frac{\varkappa}{16} \sum_{\nu=2,4\ldots}^{\infty} \sum_{n=0}^{\infty} \left[c_n^{(0)} \left(\overline{S}_{6n\nu} + y^2 \overline{S}_{7n\nu}\right) + d_n^{(0)} \left(\overline{S}_{5n\nu} - y^2 \overline{S}_{8n\nu}\right)\right] y \sin \nu \qquad (8$$

В формулах (8) приняты обозначения:

$$\overline{f}_{tn\nu} = \sum_{k=1}^{m} \left[b_{t4} \alpha_{np}^{IV} + \frac{b_{t3}}{y} \alpha_{np}''' + \frac{b_{t2}}{y^2} \alpha_{np}'' + \right.$$

$$\left. + \frac{b_{t1}}{y^3} \alpha_{np}' + \frac{b_{t0}}{y^4} \alpha_{np}\right] \frac{a_k}{2y^k} \omega^{k+1} \cos \frac{p\pi}{2}, \qquad (9)$$

$$(t = 1,\ 3,\ 5 \ldots 15,\ p = k + 1 \mp \nu),$$

где

$$b_{1,4} = 0,\ \ b_{1,3} = 1,\ \ b_{1,2} = \mu + p,\ \ b_{1,1} = p\left[\mu(1-p) - 2(k+1)(1-\mu)\right] -$$

$$b_{1,0} = p\left[\mu p (2-p) + 2(k+1)(1-\mu)\right],$$

$$b_{3,4} = 1,\ \ b_{3,3} = 1 + p,\ \ b_{3,2} = p\left[(1-2\mu)k - (2-\mu)p + 2(1-\mu)\right] -$$

$$- (1-\mu)(k+1) - 2,$$

$$b_{3,1} = p\left[(7-3\mu)p + (\mu-2)p^2 - (4-3\mu)k - (5-3\mu)\right] + (1-\mu)(k+1)^2 +$$

$$b_{3,0} = p^2\left[(2-\mu)kp + (5-2\mu)p - 3(3-\mu) - (1-\mu)(k+1)^2\right] +$$

$$+ 2p(1-\mu)(k+1),$$

$$b_{5,4} = 0,\ \ b_{5,3} = 0,\ \ b_{5,2} = 1,$$

$$b_{5,1} = p(3 - p + 2k) - 1,\ \ b_{5,0} = p^2(2-p) - 2p(k+1),$$

$$b_{7,4} = 0,\ \ b_{7,3} = 0,\ \ b_{7,2} = 1,$$

$$b_{7,1} = p(2-p) - k - 1,\ \ b_{7,0} = p^2(k+2) - 2p,$$

$$b_{9,4} = 0,\ \ b_{9,3} = \mu,\ \ b_{9,2} = 1 + \mu p,$$

$$b_{9,1} = p\left[1 - p + 2(1-\mu)(k+1)\right] - 1,\ \ b_{9,0} = p^2(2-p) - 2p(1-\mu)(k+1$$

$$b_{11,4} = 0,\ \ b_{11,3} = 1,\ \ b_{11,2} = p,\ \ b_{11,1} = -2p(k+1),\ \ b_{11,0} = -b_{11,1}$$

$$b_{13,4} = 0;\ b_{13,3} = 0;\ b_{13,2} = 0;$$

$$b_{13,1} = 1,\ \ b_{13,0} = p,$$

$$b_{15,4} = b_{15,3} = 0,\ \ b_{15,2} = 1,\ \ b_{15,1} = p,$$

$$b_{15,0} = -p(k+1). \qquad (1$$

$$\bar{S}_{tn\nu} = \sum_{k=1}^{m} \frac{a_k \omega^k}{p(p^2-1)\, y^{k-1}} \left[A_{tnp} + I_{tnp} + K_{tnp}\right] \cos\frac{p\pi}{2} \tag{11}$$

$$(t = 1,\ 3,\ 5,\ 7),$$

причем

$$A_{tnp} = \delta_{t4}\, \alpha_{np}^{\mathrm{IV}} + \frac{\delta_{t3}}{y} \alpha_{np}''' + \frac{\delta_{t2}}{y^2} \alpha_{np}'' + \frac{\delta_{t1}}{y^3} \alpha_{np}' + \frac{\delta_{t0}}{y^4} \alpha_{np},$$

$$I_{tnp} = \frac{1}{y^2}\left(g_{t2}\, \alpha_{np+2}'' + \frac{g_{t1}}{y} \alpha_{np+2}' + \frac{g_{t0}}{y^2} \alpha_{np+2}\right),$$

$$K_{tnp} = \frac{1}{y^2}\left(q_{t2}\, \alpha_{np-2}'' + \frac{q_{t1}}{y} \alpha_{np-2}' + \frac{q_{t0}}{y^2} \alpha_{np-2}'\right), \tag{12}$$

$$\delta_{1,4} = -p,\ \delta_{1,3} = k+2-(p+1)^2,\ \ \delta_{1,2} = (2+\mu)\, p^3 -$$
$$-(k+1)(p^2-1) + (1-\mu)\, p,$$
$$\delta_{1,1} = (2+\mu)\, p^4 - 3p^3 - (1+\mu+2k)\, p^2 - (k+1),$$
$$\delta_{1,0} = p^2\left[(3+\mu)(k+1) + 3p - (3+\mu k+\mu)\, p^2\right],$$
$$g_{1j} = q_{1j} = 0,$$
$$\delta_{3,4} = \delta_{3,3} = 0,\ \delta_{3,2} = -4p,\ \delta_{3,1} = 4(k+1) - 4p(p+1),\ \delta_{3,0} = 4p(1-pk),$$
$$g_{3,2} = 2p,\ \ g_{3,1} = 6p(p+1) - 2(k+1),$$
$$g_{3,0} = 4p^3 + 2(k+4)\, p^2 - 2(2k+1)\, p - 4(k+1),$$
$$q_{3,2} = 2p,\ \ q_{31} = 2p(3-p) - 2(k+1),$$
$$q_{3,0} = -4p^3 + 2kp^2 + 2(2k+3)\, p - 4(k+1),$$
$$\delta_{5,4} = 1,\ \ \delta_{5,3} = -(p^2+pk-3),\ \ \delta_{5,2} = p - 3p^2 - p^3,$$
$$\delta_{5,1} = -\mu p^4 + (2k+\mu k+\mu)\, p^3 + (3+\mu)\, p^2 + (k-\mu k-\mu)\, p,$$
$$\delta_{5,0} = -\mu p^5 + \mu p^4 - (3k-\mu)\, p^3 - (3+\mu)\, p^2,\quad g_{5,j} = q_{5j} = 0,$$
$$\delta_{7,4} = \delta_{7,3} = 0,\ \delta_{7,2} = 4,\ \delta_{7,1} = 4(2-kp-p^2),\ \delta_{7,0} = -4(p^2+p-k-1)\, p,$$
$$g_{7,2} = 2,\ g_{7,1} = 2(p-4)(p+1) + 2p\,(k+1);$$
$$g_{7,0} = 2p^3 + (4k+2)\, p^2 + (2k-6)\, p - 4,$$
$$q_{7,2} = -1,\ q_{7,1} = 2p^2 + 2(k+2)\, p - 8,$$
$$q_{7,0} = 2p^3 - 2(2k-1)\, p^2 + 2(k+1)\, p - 4. \tag{13}$$

При $p=0$ соответствующий член суммы (11) вычисляется по формуле

$$\frac{a_k\, \omega^k}{y^{k-1}}\left[A_{tn0} + I_{tn0}\right].$$

В этом случае

$$\delta_{1,4} = \delta_{1,1} = \delta_{1,0} = 0,\ \ \delta_{1,3} = -1,\ \delta_{1,2} = \mu - 1,\ \ g_{1}j = 0;$$
$$\delta_{3,4} = \delta_{3,3} = \delta_{3,2} = 0,\ \delta_{3,1} = \delta_{3,0} = -4,\ g_{3,2} = 0;\ g_{3,1} = g_{3,0} = -4,$$
$$\delta_{5j} = g_{5j} = 0,\ \ \delta_{7j} = g_{7j} = 0.$$

Замена в (9), (11) и (12) t на $t+1$ и α_{np} на β_{np} с учетом равенств $b_{t+1,j}=b_{tj}$; $\delta_{t+1,j}=\delta_{tj}$; $g_{t+1,j}=g_{tj}$; $q_{t+1,j}=q_{tj}$ приводит к формулам для $\overline{f}_{t+1,n\nu}$ и $\overline{S}_{t+1,n\nu}$ с четным значением индекса $t+1$.

Функции α_{np}, β_{np} и их производные, обозначенные штрихом, зависят от аргумента y, который для сокращения записи опущен. Вычисление α_{np}, β_{np} и их производных можно проводить с помощью формулы

$$\alpha_{np}(y)+i\beta_{np}(y)=H_n^{(1)}\left(y\sqrt{2i}\right)\left[J_{n-p}\left(y\sqrt{2i}\right)+J_{n+p}\left(y\sqrt{2i}\right)\right] \quad (14)$$

Для функций $\overline{f}_{jn\nu}$, $\overline{S}_{jn\nu}$ выражение под знаком суммы подсчитывается для двух значений p, определяемых по формуле $p=k+1\mp\nu$. Полученные результаты суммируются.

2. Граничные условия

В случае отверстия с неподкрепленным (свободным) контуром граничные условия в нулевом и первом приближениях имеют вид

$$[G_r^{(0)}(r,\varphi)+\varepsilon G_r^{(1)}(r,\varphi)]_{r=1}=0,$$

$$[\overset{*}{Z}{}_r^{(0)}(r,\varphi)+\varepsilon \overset{*}{Z}{}_r^{(1)}(r,\varphi)]_{r=1}=0,$$

$$[P_r^{(0)}(r,\varphi)+\varepsilon P_r^{(1)}(r,\varphi)+\hat{P}_r(r,\varphi)]_{r=1}=0,$$

$$[S_{r\varphi}^{(0)}(r,\varphi)+\varepsilon S_{r\varphi}^{(1)}(r,\varphi)+\hat{S}_{r\varphi}(r,\varphi)]_{r=1}=0. \quad (15)$$

Через $\hat{P}_r$, $\hat{S}_{r\varphi}$ обозначены компоненты основного напряженного состояния, которые можно представить в виде

$$\hat{P}_r=\hat{P}_r^{\circ}+\varepsilon\hat{P}_r^{(1)};\quad \hat{S}_{r\varphi}=\hat{S}_{r\varphi}^{(0)}+\varepsilon\,\hat{S}_{r\varphi}^{(1)}. \quad (16)$$

Если воспользоваться выражениями (6), а также формулами (11) работы [8], то на основании (15) и (16) можно записать:

$$\frac{\varkappa^2 ER}{64\omega^2\lambda}\sum_{\nu=0,2,4\ldots}^{\infty}\sum_{n=0}^{\infty} l_\nu\,[c_n^{(i)}f_{1n\nu}-d_n^{(i)}f_{2n\nu}]\cos\nu\varphi=k_i\,\Delta G_r^{(i)},$$

$$\frac{\varkappa E}{64\omega\lambda}\sum_{\nu=0,2,4\ldots}^{\infty}\sum_{n=0}^{\infty} l_\nu\,[c_n^{(i)}f_{3n\nu}-d_n^{(i)}f_{4n\nu}]\cos\nu\varphi=k_i\,\Delta \overset{*}{Z}{}_r^{(i)};$$

$$\frac{E}{8\omega\lambda}\sum_{\nu=0,2,4\ldots}^{\infty}\sum_{n=0}^{\infty} l_\nu\,[c_n^{(i)}f_{6n\nu}+d_n^{(i)}f_{5n\nu}]\cos\nu\varphi=\hat{P}_r^{(i)}+k_i\,\Delta P_r^{(i)},$$

$$\frac{E}{8\omega\lambda}\sum_{\nu=2,4}^{\infty}\sum_{n=0}^{\infty}[c_n^{(i)}f_{8n\nu}+d_n^{(i)}f_{7n\nu}]\sin\nu\varphi=\hat{S}_{r\varphi}^{(i)}+k_i\,\Delta\hat{S}_{r\varphi}^{(i)}. \quad (17)$$

$$(i=0{,}1;\ k_0=0;\ k_1=1).$$

Ограничивая в (17) суммирование до $n=\nu=t$ (t зависит от сходимости рядов), получим с учетом линейной зависимости [8] замкнутые системы линейных алгебраических уравнений для постоянных $c_n^{(i)}$, $d_n^{(i)}$ нулевого и первого приближений.

Граничные условия для оболочки с некруговым отверстием, в которое впаяна жесткая шайба, имеют вид:

$$[W^{(0)}(r,\varphi)+\varepsilon W^{(1)}(r,\varphi)+\hat{W}(r,\varphi)]_{r=1}=c;$$
$$\left[\frac{\partial W(r,\varphi)}{\partial r}\right]^{(0)}_{r=1}+\varepsilon\left[\frac{\partial W(r,\varphi)}{\partial r}\right]^{(1)}_{r=1}=0;$$
$$[U^{(0)}(r,\varphi)+\varepsilon U^{(1)}(r,\varphi)+\hat{U}(r,\varphi)]_{r=1}=[U_c(r,\varphi)]_{r=1};$$
$$[V^{(0)}(r,\varphi)+\varepsilon V^{(1)}(r,\varphi)+\hat{V}(r,\varphi)]_{r=1}=[V_c(r,\varphi)]_{r=1}. \qquad (18)$$

Здесь $\hat{U}$, $\hat{V}$, $\hat{W}$ — компоненты вектора перемещения в основном напряженном состоянии:

$$\hat{U}=\hat{U}^{(0)}+\varepsilon\hat{U}^{(1)};\quad \hat{V}=\hat{V}^{(0)}+\varepsilon\hat{V}^{(0)};\quad \hat{W}=\hat{W}^{(0)}+\varepsilon\hat{W}^{(1)}. \qquad (19)$$

Константа $c=c^{(0)}+\varepsilon c^{(1)}$ характеризует жесткое смещение шайбы. Появление в правых частях двух последних равенств (18) членов

$$U_c=U_c^{(0)}+\varepsilon U_c^{(1)};\quad V_c=V_c^{(0)}+\varepsilon V_c^{(1)}, \qquad (20)$$

в которых

$$U_c^{(0)}=-\frac{c^{(0)}\varkappa}{2}r(1-\cos 2\varphi);\quad U_c^{(1)}=-\frac{c^{(1)}\varkappa}{2}r(1-\cos 2\varphi)-$$
$$-c^{(0)}\varkappa\sum_{k=1}^{m}\frac{a_k}{4r^k}[(k-2)\cos(k-1)\varphi+2\cos(k+1)\varphi-k\cos(k+3)\varphi];$$
$$V_c^{(0)}=-\frac{c^{(0)}\varkappa}{2}r\sin 2\varphi;\quad V_c^{(1)}=-\frac{c^{(1)}\varkappa}{2}\sin 2\varphi-$$
$$-c^{(0)}\varkappa\sum_{k=1}^{m}\frac{a_k}{4r^k}[(k-2)\sin(k-1)\varphi-2(k+1)\sin(k+1)\varphi+k\sin(k+3)\varphi]. \qquad (21)$$

объясняется тем, что точки линии спая оболочки с шайбой смещаются не по нормали к срединной поверхности.

Подстановка выражений (7), (19) и (20) в (18) с ограничением суммирования $n=\nu=t$ приводит к замкнутым системам алгебраических уравнений для определения интегрирования.

3. Одноосное растяжение цилиндрической оболочки с эллиптическим отверстием

Приняв в (5) $f(\zeta)=\frac{1}{\zeta}$, получим функцию s, отображающую внешность отверстия единичного радиуса на внешность эллиптического отверстия. В этом случае

$$\varepsilon=\frac{a-b}{a+b},\quad R_0=\frac{a+b}{2},$$

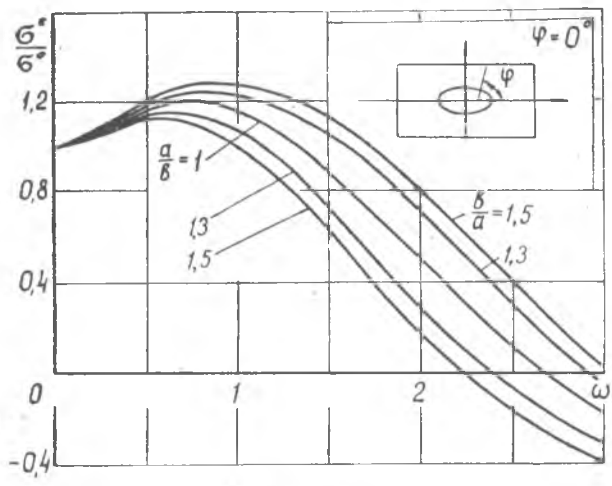
где a, $в$ — полуоси эллипса, причем полуось a направлена по обра-зующей цилиндра. Рассмотрим частный случай нагружения оболочки растягивающими силами N. Компоненты основного напряженного состояния (16) будут иметь вид:

$$\hat{P}_r^{(0)} = \frac{N}{2}(1+\cos 2\varphi);$$

$$\hat{P}_r^{(1)} = -\frac{a_1 N}{2r^2}(1-\cos 4\varphi);$$

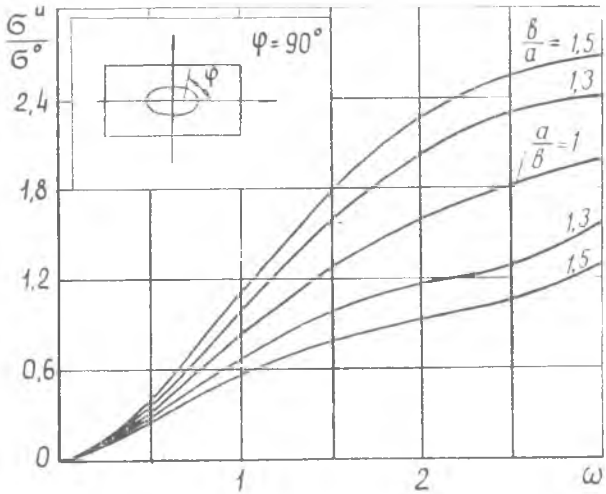
$$\hat{S}_{r\varphi}^{(0)} = -\frac{N}{2}\sin 2\varphi;$$

$$\hat{S}_{r\varphi}^{(1)} = +\frac{a_1 N}{2r^2}\sin 4\varphi. \qquad (2$$



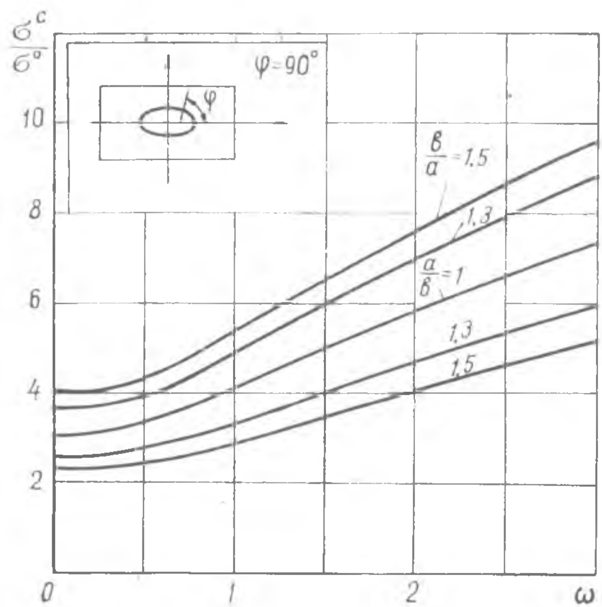
Фиг. 2.

Для проведения числовых расчетов была составлена программа решения задачи на ЭВМ «Урал-2». Параметр ω варьировался в пределах $0<\omega\leqslant 3$. Случай $\omega=0$ соответствует плоской пластине. На фиг. 2—4 показаны графики отношений $\sigma_\varphi^c/\sigma^0$, $\sigma_\varphi^u/\sigma^0$ на контуре отверстия в зависимости от ω (σ^0 — напряжение в неослабленной оболочке; σ_φ^c, σ_φ^u — напряжения в оболочке с отверстием от усилий P_φ, G_φ соответственно). В интервале $0<\omega<0{,}4$ значения $\sigma_\varphi^c/\sigma_0$ совпадают с данными работы [2], если при определении коэффициента концентрации учесть только нулевое и первое приближения.



$\frac{\sigma^u}{\sigma^\circ}$
$\varphi = 90°$
φ
$\frac{b}{a} = 1{,}5$
1,3
$\frac{a}{b} = 1$
1,3
1,5
2,4
1,8
1,2
0,6
0
1
2
ω

Фиг. 3.



$\frac{\sigma^c}{\sigma^\circ}$
$\varphi = 90°$
φ
$\frac{b}{a} = 1{,}5$
1,3
$\frac{a}{b} = 1$
1,3
1,5
10
8
6
4
2
0
1
2
ω

Фиг. 4.

ЛИТЕРАТУРА

1. О. М. Гузь. Про наближении метод визначення концентрації напружень біля криволінійних отворів в оболонках, «Прикладная механика», 1962, в. 6, т. VIII.

2. О. М. Гузь. Концентрація напружень біля еліптичного отвору з малим ексцентриситетом в циліндричній оболонці, ДАН УРСР, 1963, 10.

3. А. Н. Гузь. Концентрация напряжений около криволинейных отверстий на боковой поверхности кругового цилиндра. «Инж. журнал», т. 4, в. 1964.

4. А. Н. Гузь. Концентрация напряжений около отверстий в тонких оболочках (обзор). «Прикладная механика». Т. V, в 3, 1969.

5. А. И. Лурье. Статика тонкостенных упругих оболочек. ОГИЗ, М—Л, 1947.

6. Г. М. Савин. Про концентрацію напружень навколо отворів у тонких пружних оболонках. «Прикладная механика». Т. VII, в. 1, 1961.

7. Г. Н. Савин. Распределение напряжений около отверстий. «Наукова думка», К., 1968.

8. Х. С. Хазанов. К расчету цилиндрических оболочек с круглыми отверстиями. Труды КуАИ, в. 29, Куйбышев, 1967