

М.Б.Вахитов

К РАСЧЕТУ КОНСОЛЬНЫХ АНИЗОТРОПНЫХ ПЛАСТИН
ПРИ СОВМЕСТНОМ ДЕЙСТВИИ ПОПЕРЕЧНОЙ НАГРУЗКИ И
НЕРАВНОМЕРНОГО НАГРЕВА

В последние годы вопросу построения приближенных методов расчета консольных конструктивно-анизотропных пластин переменной жесткости уделяется много внимания как в нашей стране, так и за рубежом. Это связано с тем, что такая пластина служит расчетной моделью современного тонкого многолонжеронного крыла малого удлинения. Использование гипотез теории пластин позволяет свести расчет такой сложной конструкции к значительно более простому и обобщимому алгоритму, чем в методе конечных элементов [1]. В то же время, соответственно, эти гипотезы несколько сужают область возможного применения пластинной аналогии [2]. Тем не менее, исследование показало приемлемость такой расчетной схемы для крыла с регулярной структурой, не несущих больших сосредоточенных нагрузок [3].

Во всех работах указанного направления напряженно-деформированное состояние крыла-пластины отыскивается как результат воздействия лишь внешних сил. Однако известно, что крыло летательного аппарата подвергается в полете также и существенному нагреву. В связи с этим здесь проведено обобщение метода расчета, развитого в работах автора [3 - 5], для учета одновременного воздействия на крыло-пластину внешней поперечной нагрузки и произвольного неравномерного объемного температурного поля.

Как и в [4], рассматриваются консольная пластина переменной жесткости, отнесенная к координатам (рис. 1).

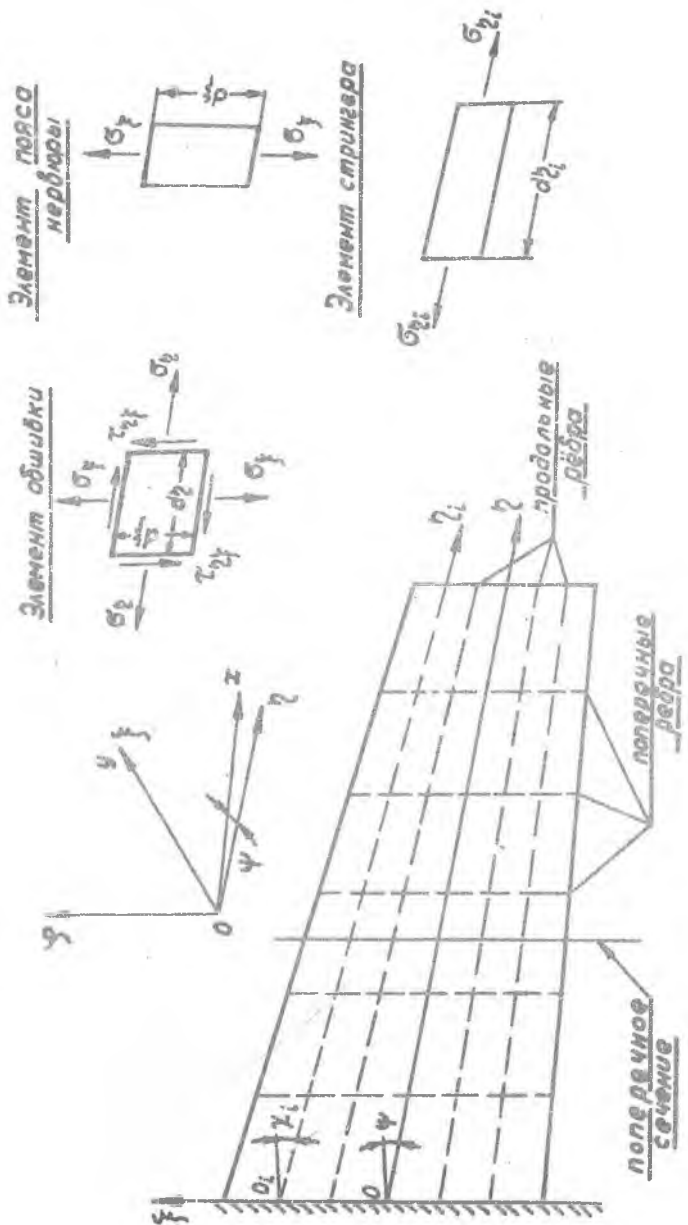


Рис. I.

Она состоит из толстой верхней и нижней обшивок, подкрепленных ребрами жесткости, создающими анизотропию упругих свойств. Продольные ребра (стрингеры, пояса лонжеронов) не параллельны друг другу, а поперечные (пояса нервюр) - параллельны плоскости заделки. Те и другие схематизируются, как это принято в строительной механике крыла, в виде гибких нитей, работающих только на общее напряжение. Обшивка находится в плоском напряженном состоянии.

Температурное поле предполагается стационарным. Изменение механических постоянных материала по температуре считается известным и учитывается при подсчете жесткостных характеристик пластины. В связи с тем, что температурные напряжения в крыле представляют собой лишь часть суммарных, причем обычно меньшую, мембранные температурные напряжения не учитываются. Таким образом, срединная плоскость пластины считается нейтральной. Кроме того, как обычно, [6], предполагается, что гипотеза прямой нормали остается справедливой и при неравномерном по толщине нагреве.

1. Как и в [3, 4], прогиб пластины отыскиваем в виде ряда

$$w(\eta, \xi) = \sum_0^m \psi_k(\eta) \xi^k, \quad (1)$$

а уравнения для определения неизвестных функций $\psi_k(\eta)$ получаем с помощью принципа возможных перемещений

$$\delta U^* = \delta A, \quad (2)$$

который, следуя [6], считаем справедливым для рассматриваемой искомой несвязанной задачи термоупругости.

Для работы внешней нагрузки δA на возможных перемещениях можно воспользоваться выражением, полученным ранее в [3, 4], тогда как изменение потенциальной энергии пластины δU^* будет содержать по сравнению с [4] дополнительные температурные члены

$$\delta U^* = \delta U + \delta(\Delta U). \quad (3)$$

Здесь δU определяется из выражения [4]:

$$\delta U = \int d\eta \sum_0^m \{ \Phi_{k_0} \delta \psi_k + \Phi_{k_1} \delta \psi_k' + \Phi_{k_2} \delta \psi_k'' \}. \quad (4)$$

Функционалы $\Phi_{k_i} = \Phi_{k_i}(\psi_n)$ выражаются формулами (3) работы [4].

Поскольку вычисление энергии пластины в [3, 4] проводится

суммированием энергии, накапливаемой в обшивке и ребрах (поясах нервюр, стрингерах), дополнительное слагаемое в (3) также найдем как сумму

$$\delta(\Delta U) = \delta(\Delta U_{\text{обш}}) + \delta(\Delta U_{\text{пн}}) + \delta(\Delta U_{\text{стр}}). \quad (5)$$

Для нахождения величины $\delta(\Delta U_{\text{обш}})$ необходимо вначале получить для плоского напряженного состояния закон Гука с учетом нагрева в косоугольных координатах. В прямоугольных координатах xOy (рис. I) этот закон имеет вид [7]

$$\begin{aligned} \sigma_x &= \frac{E}{1-\mu^2} [\varepsilon_x + \mu \varepsilon_y - (1+\mu)\alpha T] \\ \sigma_y &= \frac{E}{1-\mu^2} [\varepsilon_y + \mu \varepsilon_x - (1+\mu)\alpha T] \\ \tau_{xy} &= \frac{E}{2(1+\mu)} \gamma_{xy}. \end{aligned} \quad (6)$$

Используем установленную в [8] связь между компонентами напряжений и деформаций в прямоугольных xOy и косоугольных $\eta O\xi$ осях (рис. I)

$$\begin{aligned} \sigma_\eta &= \sigma_x \frac{1}{\cos \psi}, & \sigma_\xi &= \sigma_x \frac{\sin^2 \psi}{\cos \psi} + \sigma_y \cos \psi + 2\tau_{xy} \sin \psi \\ \tau_{\eta\xi} &= \sigma_x \operatorname{tg} \psi + \tau_{xy} \end{aligned} \quad (7)$$

и

$$\begin{aligned} \varepsilon_x &= \varepsilon_\eta \frac{1}{\cos^2 \psi} + \varepsilon_\xi \operatorname{tg}^2 \psi + \gamma_{\eta\xi} \frac{\sin \psi}{\cos^2 \psi}, & \varepsilon_y &= \varepsilon_\xi \\ \gamma_{xy} &= 2\varepsilon_\xi \operatorname{tg} \psi + \gamma_{\eta\xi} \frac{1}{\cos \psi}. \end{aligned} \quad (8)$$

Подставляя (6) в (7) используя (8), получим закон Гука в косоугольных координатах:

$$\begin{aligned} \sigma_\eta &= \frac{E}{(1-\mu^2)\cos^3 \psi} [\varepsilon_\eta + \mu_2 \varepsilon_\xi + \theta \gamma_{\eta\xi} - (1-\theta^2)(1+\mu)\alpha T] \\ \sigma_\xi &= \frac{E}{(1-\mu^2)\cos^3 \psi} [\varepsilon_\xi + \mu_1 \varepsilon_\eta + \theta \gamma_{\eta\xi} - (1-\theta^2)(1+\mu)\alpha T] \\ \tau_{\eta\xi} &= \frac{E}{(1-\mu^2)\cos^3 \psi} [\theta \varepsilon_\eta + \theta \varepsilon_\xi + \frac{1}{2}(1-\mu_1)\gamma_{\eta\xi} - \theta(1-\theta^2)(1+\mu)\alpha T], \end{aligned} \quad (9)$$

где использованы введенные в [3] обозначения

$$\theta = \sin \psi, \quad \mu_1 = \mu - (1+\mu)\theta^2, \quad \mu_2 = \mu + (1-\mu)\theta^2.$$

Для ребер, находящихся в одноосном напряженном состоянии, формулы (9) упрощаются. Так, для поясов нервюр $\sigma_{\eta} = \tau_{\eta\xi} = 0$ (рис. 1), тогда из (9) следует

$$\sigma_{\xi} = E \cos \psi (\varepsilon_{\xi} - \alpha T). \quad (10)$$

Для стрингеров вводятся вспомогательные координатные системы η_i, ξ_i (рис. 1), совпадающие с их осями. Записывая (9) в этих осях и учитывая, что $\sigma_{\xi_i} = \tau_{\eta_i \xi_i} = 0$ (рис. 1), имеем

$$\sigma_{\eta_i} = E \cos \chi_i (\varepsilon_{\eta_i} - \alpha T). \quad (11)$$

Взвешиваем потенциальную энергию обшивки и ребер как полусумму произведений напряжений на соответствующие деформации и заменим напряжения по формулам (9) - (11), а деформации - по соотношениям Лире-Гольфа:

$$\varepsilon_{\eta} = -\xi \frac{\partial^2 w}{\partial \eta^2}, \quad \varepsilon_{\xi} = -\xi \frac{\partial^2 w}{\partial \xi^2}, \quad \gamma_{\eta\xi} = -2\xi \frac{\partial^2 w}{\partial \eta \partial \xi}, \quad \varepsilon_{\eta_i} = -\xi_i \frac{\partial^2 w}{\partial \eta_i^2}.$$

Последнее выражение после перехода к общим осям будет:

$$\varepsilon_{\eta_i} = -\xi_i \frac{1}{\cos^2 \psi} \left[\frac{\partial^2 w}{\partial \eta^2} \cos^2 \chi_i + \frac{\partial^2 w}{\partial \xi^2} \sin^2 (\chi_i - \psi) - 2 \frac{\partial^2 w}{\partial \eta \partial \xi} \cos \chi_i \sin (\chi_i - \psi) \right].$$

Заменив w по (1) и вычисляя малое приращение потенциальной энергии, получим дополнительное слагаемое (5) в виде

$$\delta(\Delta U) = \int_0^l d\eta \int_0^m \left\{ \Psi_{k_0} \delta \varphi_k + \Psi_{k_1} \delta \varphi'_k + \Psi_{k_2} \delta \varphi''_k \right\}, \quad (12)$$

где

$$\Psi_{k_0} = k(k-1) \left[\int_0^b (\alpha_{обш} + \alpha_{нн}) \xi^{k-2} d\xi + \sum \alpha_{стр_i} \xi_i^{k-2} \sin^2 (\chi_i - \psi) \right]$$

$$\Psi_{k_1} = 2k \left[\theta \int_0^b \alpha_{обш} \xi^{k-1} d\xi - \sum \alpha_{стр_i} \xi_i^{k-1} \cos \chi_i \sin (\chi_i - \psi) \right], \quad (13)$$

$$\Psi_{k_2} = \int_0^b \alpha_{обш} \xi^k d\xi + \sum \alpha_{стр_i} \xi_i^k \cos^2 \chi_i.$$

В (13) интегрирование ведется по всей хорде b сечения (рис. 1), а суммы распространяются на все продольные ребра. Кроме того, в (13) введены обозначения

$$\alpha_{обш} = \frac{1}{2 \cos \psi} \int_{обш} \frac{E}{1-\mu} \xi \alpha T d\xi, \quad \alpha_{нн} = \frac{1}{2} \cos \psi \int_{нн} E \xi \alpha T d\xi, \quad \alpha_{стр_i} = \frac{1}{2 \cos \psi} \int_{стр_i} E \xi \alpha T d\xi \quad (14)$$

где в первых двух выражениях интегралы берутся по высоте обшив-

ки и поясов, а в последнем — по площади ℓ -го стрингера (пояса лонжерона)^{*}.

Сложим (I2) с (4) и приравняем, на основании (2), работе δA , выражаемой формулой [3]:

$$\delta A = \int_0^{\ell} d\eta \sum_0^m S_k \delta \psi_k + \sum_0^m \{ B_k \delta \psi'_k + T_k \delta \psi_k \}_{\eta=\ell}, \quad (I5)$$

где $S_k(\eta)$, B_k , T_k — соответственно характеристики внешней поверхностной и концевой сосредоточенной нагрузок (см. [3]).

После проведения тех же операций, что и в [4], получим систему дифференциальных уравнений

$$\Phi_{k_0} - \Phi'_{k_1} + \Phi''_{k_2} = S_k - \Psi_{k_0} + \Psi'_{k_1} - \Psi''_{k_2} \quad (k=0, 1, \dots, m). \quad (I6)$$

и естественные краевые условия на свободном торце

$$\{\Phi_{k_1} - \Phi'_{k_2}\}_{\eta=\ell} = T_k - \{\Psi_{k_1} - \Psi'_{k_2}\}_{\eta=\ell}, \quad \{\Phi_{k_2}\}_{\eta=\ell} = B_k - \{\Psi_{k_2}\}_{\eta=\ell} \quad (k=0, 1, \dots, m). \quad (I7)$$

Последние совместно с геометрическими условиями в заделке

$$\Psi_k(0) = \Psi'_k(0) = 0 \quad (k=0, 1, \dots, m).$$

составляют полную систему краевых условий, необходимых для решения системы (I7).

В (I6), (I7) члены с Ψ_{k_i} перенесены в правые части, т.к. согласно (I3), (I4) они, в отличие от Φ_{k_i} , не содержат неизвестных функций $\psi_k(\eta)$ и могут быть заранее подсчитаны по заданному температурному полю $T(\eta, \xi, \zeta)$, как и характеристики внешней нагрузки S_k, T_k, B_k .

Сравнение (I6), (I7) с формулами (5), (6) работы [4] показывает, что эффект нагрева эквивалентен догрузке конструкции внешней поверхностной и концевой нагрузками с характеристиками:

$$\Delta S_k = -\Psi_{k_0} + \Psi'_{k_1} - \Psi''_{k_2}, \quad \Delta T_k = -\{\Psi_{k_1} - \Psi'_{k_2}\}_{\eta=\ell}, \quad \Delta B_k = -\{\Psi_{k_2}\}_{\eta=\ell}. \quad (I8)$$

2. Подставляя в (I6) выражения Φ_{k_i} через искомые функции $\psi_k(\eta)$ по (3) [4], получим систему дифференциальных уравнений для определения последних. Для реальных конструкций эта система будет иметь переменные коэффициенты η (4) [4]. Поэтому ее решение возможно лишь численными методами. В работе [5] для

^{*} Здесь так же, как и в [4], дискретные поперечные ребра учитываются как непрерывно распределенные ("размытые") по размаху. Продольные ребра рассматриваются дискретными.

системы (5), [4], был успешно использован численный аппарат интегрирующих матриц. Поскольку влияние нагрева свелось лишь к "догрузке" конструкции (18), очевидно, что этот путь решения применим и к уравнениям (16). Однако в связи с появлением конечной "догрузки" в (17), которая в [5] отсутствовала, здесь необходимо разрешающее матричное уравнение получить заново. При этом, как и в [5], полагаем, что внешняя конечная нагрузка на пластину отсутствует, т.е. $T_k = B_k = 0$.

Проинтегрируем каждое уравнение (16) дважды от η до ℓ . Тогда после использования крайевых условий (17) будем иметь

$$\int_{\eta}^{\ell} d\eta \left[\int_{\eta}^{\ell} \Phi_{k_0} d\eta + \int_{\eta}^{\ell} \Phi_{k_1} d\eta + \Phi_{k_2} \right] = \int_{\eta}^{\ell} d\eta \left[\int_{\eta}^{\ell} (S_k - \Psi_{k_0}) d\eta - \int_{\eta}^{\ell} \Psi_{k_1} d\eta - \Psi_{k_2} \right] \quad (19)$$

$(k=0, 1, \dots, m)$

Выберем на пластине $n+1$ сечений с произвольным шагом* по размаху и запишем уравнения (19) в этих дискретных сечениях $\eta = \eta_i$ ($i=0, 1, \dots, n$). Тогда после использования интегрирующих матриц [9] получим систему матричных уравнений

$$Z_1^2 \Phi_{k_0} + Z_1 \Phi_{k_1} + \Phi_{k_2} = Z_1^2 S_k - Z_1^2 \Psi_{k_0} - Z_1 \Psi_{k_1} - \Psi_{k_2}, \quad (20)$$

где Z_1 - интегрирующая матрица первого рода [9];

$\Phi_{k_i}, \Psi_{k_i}, S_k$ - столбцы значений соответствующих величин в расчетных сечениях.

Выражая дальше, подобно тому, как это сделано в [5], Φ_{k_i} через $\Psi_k(\eta_i)$ и представляя систему (20) в виде одного уравнения, получим окончательно

$$A \Psi'' - P_1^2 S - P_1^2 \Psi_0 - P_1 \Psi_1 - \Psi_2, \quad (21)$$

где Ψ'' - столбец, составленный из столбцов значений Ψ_k'' ($k=0, 1, \dots, m$) в расчетных сечениях; S, Ψ_1 - подобные же столбцы из S_k, Φ_{k_i} . Матрицы же A и P имеют тот же вид, что и в (9) [5].

Обращением матрицы A из (21) находится Ψ'' , затем по (12), (13) [5] вычисляются $\Psi_k'(\eta), \Psi_k(\eta)$, а по (7), (8) [4] и (1) - все напряжения и прогибы в расчетных сечениях.

Отметим, что численная методика [5] была использована для расчета рзальных конструкций (см., например, [2]) и хорошо

* В [5] сечения выбирались с постоянным шагом. Однако в связи с дальнейшим развитием аппарата интегрирующих матриц, проведенным в [9], это ограничение было снято. Подробнее о выборе расчетных сечений и самом аппарате см. [9].

себя зарекомендовала. Поскольку уравнение (2I) отличается от (9) [5] лишь нагрузочными членами правой части, то это будет справедливо и для полученного здесь уравнения.

В заключение отметим, что в матричном уравнении (2I) в отличие от дифференциальных (I6) в правой части отсутствуют производные от температурных членов Ψ_k . В случае табличного задания температурного поля $T(\eta_i, \xi_i, \zeta_i)$ наличие таких производных привело бы к внесению погрешностей при определении температурной "догрузки".

Л и т е р а т у р а

1. Современные методы расчета сложных статически неопределимых систем. Сб. под ред. А.П.Филина, Судпромгиз, 1961.
2. Вахитов М.Б. ИВУЗ "Авиационная техника", № 1, 1967.
3. Вахитов М.Б. ИВУЗ "Авиационная техника", № 1, 1958.
4. Вахитов М.Б. ИВУЗ "Авиационная техника", № 2, 1961.
5. Вахитов М.Б. ИВУЗ "Авиационная техника", № 2, 1962.
6. Гейтвуд Б.Е. Температурные напряжения. ИЛ, 1959.
7. Мелан Э., Паркус Г. Температурные напряжения, вызываемые стационарными температурными полями. Физматгиз, 1958.
8. Вахитов М.Б. ИВУЗ "Авиационная техника", № 1, 1964.
9. Вахитов М.Б. ИВУЗ "Авиационная техника", № 3, 1966.