КУЙБЫШЕВСКИЙ АВИАЦИОННЫЙ ИНСТИТУТ им. С. П. КОРОЛЕВА
Труды, выпуск 48, 1971 г.
Вопросы прочности элементов авиационных конструкций

О. А. Горячев

К РАСЧЕТУ ЦИЛИНДРИЧЕСКИХ ОБОЛОЧЕК ПЕРЕМЕННОЙ ТОЛЩИНЫ МЕТОДОМ СЕТОК

Рассматривается приложение метода сеток к расчету тонких круговых цилиндрических оболочек переменной толщины.

Дифференциальные уравнения цилиндрической оболочки переменной толщины в перемещениях

Основные уравнения круговой цилиндрической оболочки переменной толщины [1], [2], [3] можно свести к следующей системе дифференциальных уравнений в перемещениях (фиг. 1).

$$
\begin{gathered}
u_{xx}+\frac{1-\nu}{2R^2}u_{\theta\theta}+\frac{1+\nu}{2R}v_{x\theta}+\frac{\nu}{R}w_x=-\frac{1-\nu^2}{Eh}p_1-f_1,\\
\frac{1+\nu}{2R}u_{x\theta}+\frac{1}{R^2}v_{\theta\theta}+\frac{1-\nu}{2}v_{xx}+\frac{1}{R^2}w_\theta-\\
-\frac{h^2}{12R^2}\left[\frac{1}{R^2}w_{\theta\theta\theta}+w_{xx\theta}-\frac{1-\nu}{2}v_{xx}-\frac{1}{R^2}v_{\theta\theta}\right]=-\frac{1-\nu^2}{Eh}p_2-f_2, \quad (1)\\
\nu u_x+\frac{1}{R}v_\theta+\frac{w}{R}+\frac{h^2}{12R^2}\left[R^3w_{xxxx}+2Rw_{xx\theta\theta}+\frac{1}{R}w_{\theta\theta\theta\theta}-\right.\\
\left.-\frac{1}{R}v_{\theta\theta\theta}-Rv_{xx\theta}\right]=\frac{R(1-\nu^2)}{Eh}p_3-f_3,
\end{gathered}
$$

где u, v, w — компоненты перемещений срединной поверхности вдоль осей x, y, z; u_{xx}, $u_{\theta\theta}$, $v_{x\theta}$, w_x, ... $w_{xx\theta}$ ... — частные производные от u, v, w по x и θ; E — модуль упругости; ν — коэффициент Пуассона; R — радиус оболочки; h — толщина оболочки; p_1, p_2, p_3 — проекции интенсивности нагрузки на направления x, y, z.

$$
f_1=\frac{1}{h}h_x\left[u_x+\nu\left(\frac{1}{R}v_\theta+\frac{w}{R}\right)\right]+\frac{1-\nu}{2Rh}h_\theta\left(\frac{1}{R}u_\theta+v_x\right),
$$

$$f_2 = \frac{1-\nu}{2h} h_x \left(\frac{1}{R} u_\theta + v_x \right) + \frac{1}{Rh} h_\theta \left(\frac{1}{R} v_\theta + \frac{w}{R} + \nu u_x \right) -$$

$$- \frac{3(1-\nu) h}{12R^2} h_x \left(w_{x\theta} - \frac{1}{2} v_x \right) - \frac{3h}{12R^2} h_\theta \left[\frac{1}{R^2} (-v_\theta + w_{\theta\theta}) + \nu w_{xx} \right],$$

$$f_3 = \frac{2(1-\nu)}{12Rh} \left\{ 3h^2 h_x \left(w_{x\theta\theta} - \frac{1}{2} v_{x\theta} \right) + 3h^2 h_\theta \left(w_{xx\theta} - \frac{1}{2} v_{xx} \right) + \right.$$

$$\left. + (3h^2 h_{x\theta} + 6hh_x h_\theta) \left(w_{x\theta} - \frac{1}{2} v_x \right) \right\} +$$

$$+ \frac{R}{12h} \left\{ 6h^2 h_x \left[w_{xxx} + \frac{\nu}{R^2} (-v_{x\theta} + w_{x\theta\theta}) \right] + \right.$$

$$\left. + [3h^2 h_{xx} + 6h (h_x)^2] \left| w_{xx} + \frac{\nu}{R^2} (-v_\theta + w_{\theta\theta}) \right| \right\} +$$

$$+ \frac{1}{12Rh} \left\{ 6h^2 h_\theta \left[\frac{1}{R^2} (-v_{\theta\theta} + w_{\theta\theta\theta}) + \nu w_{xx\theta} \right] + \right.$$

$$\left. + [3h^2 h_{\theta\theta} + 6h (h_\theta)^2] \left[\frac{1}{R^2} (-v_\theta + w_{\theta\theta}) + \nu w_{xx} \right] \right\},$$

здесь h_x, h_θ, h_{xx}, $h_{x\theta}$, $h_{\theta\theta}$ — частные производные от h по x и θ.

При $h = \text{const}$ $f_1 = f_2 = f_3 = 0$ и система (1) переходит в известную систему дифференциальных уравнений оболочки постоянной толщины [1], [2].

Конечно-разностные уравнения для цилиндрической оболочки переменной толщины

Выразим частные производные в уравнениях (1) через конечные разности, для чего разделим исследуемую область на прямоугольные ячейки сеткой с переменным шагом (фиг. 2). Пусть f_0, f_1, ... f_{12} — значения некоторой функции $f=f(x, y)$ в узлах 1, 2,... 12 соответственно. Разложим функцию $f(x, y)$ в степенной ряд в области, примыкающей к узлу 0 [1]:

$$f(x, y) = f_0 + a_1 x + a_2 y + a_3 x^2 + a_4 y^2 + a_5 xy + \ldots \tag{2}$$

Беря от $f(x, y)$ частные производные первого и второго порядков и используя условия

$$f = f_0 \text{ при } x = y = 0, \; f = f_4 \text{ при } x = 0, \; y = -\Delta y_2,$$
$$f = f_2 \text{ при } x = 0, \; y = \Delta y_3, \; f = f_1 \text{ при } x = \Delta x_3, \; y = 0,$$
$$f = f_3 \text{ при } x = -\Delta x_2, \; y = 0$$

для определения коэффициентов a_1, a_2, ... через значения функции $f(x, y)$ в узлах 1, 2,... 12 получим

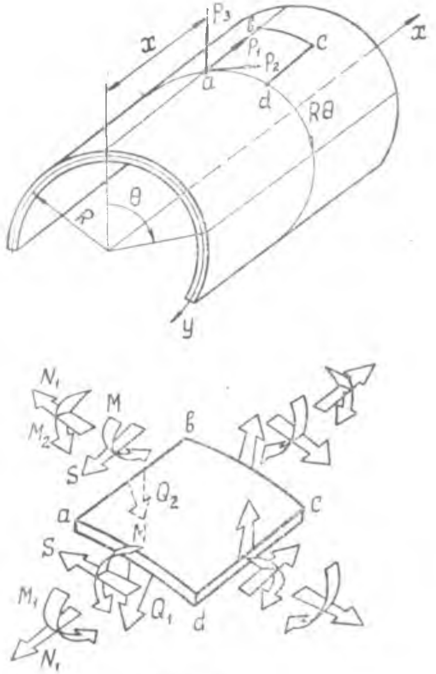
$$\frac{\partial f}{\partial x} \approx k_1 f_1 - k_3 f_0 - k_5 f_3, \quad \frac{\partial f}{\partial y} \approx k_2 f_2 - k_4 f_0 - k_6 f_4,$$
$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} \approx k_7 f_1 - k_9 f_0 + k_{11} f_3, \quad \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} \approx k_8 f_2 - k_{10} f_0 + k_{12} f_4, \tag{3}$$

где

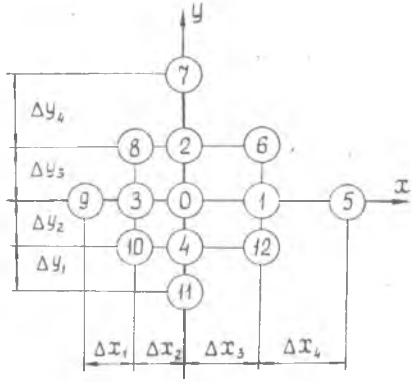
$$k_1=\frac{\Delta x_2}{\Delta x_3(\Delta x_2+\Delta x_3)},\quad k_3=\frac{1}{\Delta x_3}-\frac{1}{\Delta x_2},\quad k_5=\frac{\Delta x_3}{\Delta x_2(\Delta x_2+\Delta x_3)},$$

$$k_7=\frac{2}{\Delta x_3(\Delta x_2+\Delta x_3)},\quad k_9=\frac{2}{\Delta x_2\,\Delta x_3},\quad k_{11}=\frac{2}{\Delta x_2(\Delta x_2+\Delta x_3)}.$$

Формулы для коэффициентов с четными индексами $k_2, k_4, \ldots, k_{12}$ получаются из соответствующих формул для коэффициентов с нечетными индексами $k_1, k_3, \ldots, k_{11}$ путем замены в них переменной x на y. Например, из выражения $k_9=\frac{1}{\Delta x_2\,\Delta x_3}$, заменяя x на y, получим $k_{10}=\frac{1}{\Delta y_2\,\Delta y_3}$.



Фиг. 1.



Фиг. 2.

Конечно-разностные выражения для остальных производных получаются повторным применением операторов (3).

Выражая в уравнениях (1) частные производные через конечные разности и проведя некоторые преобразования, получим уравнения цилиндрической оболочки переменной толщины в конечных разностях для сетки с нерегулярной структурой:

$$-\left(k_9+\frac{1-\nu}{2}k_{10}\right)u_0+k_7u_1+\frac{1-\nu}{2}k_8u_2+k_{11}u_3+\frac{1-\nu}{2}k_{12}u_4+$$

$$+\frac{1+\nu}{2}(k_{3-4}v_0-k_{1-4}v_1-k_{3-2}v_2+k_{5-4}v_3+k_{3-6}v_4+k_{1-2}v_6-$$

$$-k_{5-2}v_8+k_{5-6}v_{10}-k_{1-6}v_{12})-\frac{\nu}{R}(k_3w_0-k_1w_1+k_5w_3)=$$

$$=-\frac{1-\nu^2}{Eh_0}p_{10}-\bar{f}_1,$$

$$\left(k_{3-4}\, u_0 - k_{1-4}\, u_1 - k_{3-2}\, u_2 + k_{5-4}\, u_3 + k_{3-6}\, u_4 + k_{1-2}\, u_6 - \right.$$

$$\left. - k_{5-2}\, u_8 + k_{5-6}\, u_{10} - k_{1-6}\, u_{12} \right) + \left(1 + \frac{h_0^2}{12R^2}\right)\left[- \left(\frac{1-\nu}{2} k_9 + k_{10} \right) v_0 + \right.$$

$$\left. + \frac{1-\nu}{2} k_7 v_1 + k_8 v_2 + \frac{1-\nu}{2} k_{11} v_3 + k_{12} v_4 \right] - \frac{1}{R} \left\{ \left[k_4 + \frac{h_0^2}{12}(k_{18} + k_{9-4}) \right] w_0 - \right.$$

$$- \frac{h_0^2}{12} k_{7-4} w_1 - \left[k_2 + \frac{h_0^2}{12}(k_{16} + k_{9-2}) \right] w_2 - \frac{h_0^2}{12} k_{4-11}\, w_3 +$$

$$+ \left[k_6 + \frac{h_0^2}{12}(k_{20} + k_{6-9}) \right] w_4 + \frac{h_0^2}{12} (k_{2-7}\, w_6 + k_{14}\, w_7 + k_{2-11}\, w_8 -$$

$$\left. - k_{6-11}\, w_{10} - k_{22}\, w_{11} - k_{6-7}\, w_{12}) \right\} = - \frac{1-\nu^2}{Eh_0} p_{20} - \overline{f}_2, \qquad (4$$

$$- \nu (k_3 u_0 - k_1 u_1 + k_5 u_3) - \left[k_4 + \frac{h_0^2}{12}(k_{18} + k_{4-9}) \right] v_0 +$$

$$+ \frac{h_0^2}{12} k_{4-7}\, v_1 + \left[k_2 + \frac{h_0^2}{12}(k_{16} + k_{2-9}) \right] v_2 + \frac{h_0^2}{12} k_{4-11}\, v_3 -$$

$$- \left[k_6 + \frac{h_0^2}{12}(k_{20} + k_{6-9}) \right] v_4 - \frac{h_0^2}{12}(k_{2-7} v_6 + k_{14} v_7 + k_{2-11} v_8 -$$

$$- k_{6-11} v_{10} - k_{22} v_{11} - k_{6-7} v_{12}) + \left[\frac{1}{R} + \frac{h_0^2 R}{12}(k_{27} + 2k_{9-10} + k_{28}) \right] w_0 -$$

$$- \frac{h_0^2 R}{12} [(k_{25} + 2k_{7-10}) w_1 + (2k_{9-8} + k_{26}) w_2 + (k_{29} + 2k_{11-10}) w_3 +$$

$$+ (2k_{9-12} + k_{30}) w_4 - k_{23} w_5 - 2k_{7-8} w_6 - k_{24} w_7 - 2k_{11-8} w_8 -$$

$$- k_{31} w_9 - 2k_{11-12} w_{10} - k_{32} w_{11} - 2k_{7-12} w_{12}] = \frac{R(1-\nu^2)}{Eh_0} p_{30} - \overline{f}_3,$$

где

$$\overline{f}_1 = - \frac{1}{h_0^2} \left[\left(dk_3 + \frac{1-\nu}{2} ek_4 \right) u_0 - dk_1 u_1 - \frac{1-\nu}{2} ek_2 u_2 + dk_5 u_3 + \right.$$

$$+ \frac{1-\nu}{2} ek_6 u_4 + \left(\frac{1-\nu}{2} ek_3 + \nu dk_4 \right) v_0 - \frac{1-\nu}{2} ek_1 v_1 -$$

$$\left. - \nu dk_2 v_2 + \frac{1-\nu}{2} ek_5 v_3 + \nu \left(dk_6 v_4 - \frac{1}{R} dw_0 \right) \right],$$

$$\overline{f}_2 = - \frac{1}{h_0^2} \left[\left(\frac{1-\nu}{2} dk_4 + \nu ek_3 \right) u_0 - \nu ek_1 u_1 - \frac{1-\nu}{2} dk_2 u_2 + \nu ek_5 u_3 + \frac{1-\nu}{2} dk_6 \right] -$$

$$- \left(\frac{1}{h_0^2} + \frac{1}{4R^2} \right) \left[\left(\frac{1-\nu}{2} dk_3 + ek_4 \right) v_0 - \frac{1-\nu}{2} dk_1 v_1 - ek_2 v_2 + \right.$$

$$\left. + \frac{1-\nu}{2} dk_5 v_3 + ek_6 v_4 \right] + \frac{1}{R} \left\{ \frac{e}{h_0^2} - \frac{1}{4} [d(1-\nu) k_{3-4} - e(k_{10} + \nu k_9)] \right\} w_0 +$$

$$+\frac{1}{4R}\{[d(1-\nu)k_{1-4}-\nu ek_7]w_1+[(1-\nu)dk_{3-2}-ek_8]w_2-$$
$$-[(1-\nu)dk_{5-4}+\nu ek_{11}]w_3-[(1-\nu)dk_{3-6}+ek_{12}]w_4+$$
$$+(1-\nu)(-k_{1-2}w_6+k_{5-2}w_8-k_{5-6}w_{10}+k_{1-6}w_{12})d\},$$

$$\overline{f}_3=-\left\{\frac{1+\nu}{4}dk_{3-4}-\frac{1-\nu}{4}(ek_9+ak_3)-\frac{1}{2}[ek_{10}+(c+\nu b)k_4]\right\}v_0+$$
$$+\left[\frac{1+\nu}{4}dk_{1-4}-\frac{1-\nu}{4}(ek_7+ak_1)\right]v_1+\left\{\frac{1+\nu}{4}dk_{3-2}-\frac{1}{2}[(c+\nu b)k_2+ek_8]\right\}v_2-$$
$$-\left[\frac{1+\nu}{4}dk_{5-4}+\frac{1-\nu}{4}(ek_{11}-ak_5)\right]v_3+\left\{\frac{1+\nu}{4}dk_{6-3}+\right.$$
$$\left.+\frac{1}{2}[ek_{12}-(c+\nu b)k_6]\right\}v_4-\frac{1+\nu}{4}d(k_{1-2}v_6-k_{5-2}v_8+k_{5-6}v_{10}-k_{1-6}v_{12})+$$
$$+\frac{R}{2}\{[d(k_{3-10}+k_{17})+e(k_{4-9}+k_{18})+(1-\nu)ak_{3-4}-(b+\nu c)k_9-$$
$$-(c+\nu b)k_{10}]w_0+[-d(k_{1-10}+k_{15})-ek_{4-7}-(1-\nu)ak_{1-4}+(b+\nu c)k_7]w_1+$$
$$+[-dk_{3-8}-e(k_{16}+k_{2-9})-(1-\nu)ak_{3-2}+(c+\nu b)k_8]w_2+$$
$$+[d(k_{5-10}+k_{19})-ek_{4-11}+(1-\nu)ak_{5-4}+(b+\nu c)k_{11}]w_3+$$
$$+[-dk_{3-12}+e(k_{6-9}+k_{20})+(1-\nu)ak_{3-6}+(c+\nu b)k_{12}]w_4+$$
$$+dk_{13}w_5+[dk_{1-8}+ek_{2-7}+(1-\nu)ak_{1-2}]w_6+ek_{14}w_7+[-dk_{5-8}+$$
$$+ek_{2-11}-(1-\nu)ak_{5-2}]w_8-dk_{21}w_9+[-dk_{5-12}-ek_{6-11}+$$
$$+(1-\nu)ak_{5-6}]w_{10}-ek_{22}w_{11}+[dk_{1-12}-ek_{6-7}-(1-\nu)ak_{1-6}]w_{12}\},$$
$$d=h_0(k_1h_1-k_3h_0-k_5h_3),\quad e=h_0(k_2h_2-k_4h_0-k_6h_4),$$
$$a=h_0(k_{1-2}h_6-k_{1-4}h_1-k_{1-6}h_{12}-k_{3-2}h_2+k_{3-4}h_0+k_{3-6}h_4-$$
$$-k_{5-2}h_8+k_{5-4}h_3+k_{5-6}h_{10})+2(k_1h_1-k_3h_0-k_5h_3)(k_2h_2-k_4h_0-k_6h_4),$$
$$b=\frac{h_0}{2}(k_7h_1-k_9h_0+k_{11}h_3)+(k_1h_1-k_3h_0-k_5h_3)^2,$$
$$c=\frac{h_0}{2}(k_8h_2-k_{10}h_0+k_{12}h_4)+(k_2h_2-k_4h_0-k_6h_4)^2,$$

Здесь $k_{3-4}=k_3\cdot k_4$, $k_{1-4}=k_1\cdot k_4$, ... и т. д.

$$k_{13}=\frac{2}{\Delta x_4(\Delta x_2+\Delta x_3)(\Delta x_3+\Delta x_4)},\quad k_{15}=\frac{2}{\Delta x_3\,\Delta x_4(\Delta x_2+\Delta x_3)},$$
$$k_{17}=\frac{2}{\Delta x_3(\Delta x_2+\Delta x_3)(\Delta x_3+\Delta x_4)}-\frac{2}{\Delta x_2(\Delta x_1+\Delta x_2)(\Delta x_2+\Delta x_3)},$$
$$k_{19}=\frac{2}{\Delta x_1\,\Delta x_2(\Delta x_2+\Delta x_3)},\quad k_{21}=\frac{2}{\Delta x_1(\Delta x_1+\Delta x_2)(\Delta x_2+\Delta x_3)},$$
$$k_{23}=\frac{4}{\Delta x_3\,\Delta x_4(\Delta x_2+\Delta x_3)(\Delta x_3+\Delta x_4)},\quad k_{25}=\frac{4}{(\Delta x_3)^2(\Delta x_2+\Delta x_3)}\left(\frac{1}{\Delta x_2}+\frac{1}{\Delta x_4}\right),$$
$$k_{27}=\frac{4}{(\Delta x_3)^2(\Delta x_2+\Delta x_3)(\Delta x_3+\Delta x_4)}+\left(\frac{2}{\Delta x_2\Delta x_3}\right)^2+\frac{4}{(\Delta x_2)^2(\Delta x_1+\Delta x_2)(\Delta x_2+\Delta x_3)},$$

$$k_{29} = \frac{4}{(\Delta x_2)^2 (\Delta x_2 + \Delta x_3)} \left(\frac{1}{\Delta x_1} + \frac{1}{\Delta x_3} \right), \ k_{31} = \frac{4}{\Delta x_1 \Delta x_2 (\Delta x_1 + \Delta x_2)(\Delta x_2 + \Delta x_3)}$$

Выражения для коэффициентов с четными индексами k_{14}, k_{16}, ...k_{32} получаются, как было указано выше, из соответствующих выражений для коэффициентов с нечетными индексами k_{13}, k_{16}, ... k_{31} путем замены переменной x на y.

Покрывая поверхность рассчитываемой оболочки сеткой и составляя для каждого узла уравнения (4), придем к системе линейных алгебраических уравнений, из решения которой определятся значения перемещений u, v, w. Силы и моменты, действующие в оболочке (фиг. 1), вычисляются по известным соотношениям между силами, моментами и перемещениями [1], [2], которые предварительно записываются в конечных разностях.

ЛИТЕРАТУРА

1. Ван-Цзи-де. Прикладная теория упругости. Физматгиз, М., 1959.

2. Н. В. Колкунов. Основы расчета упругих оболочек. Изд. «Высшая школа», М, 1963.

3. E. Reissner. A new derivation of the equations for the deformation of lastic shells. Am. G. Math., 63, N 1, 1941.