

А.С.Мостовой, В.В.Архипов

К ОПРЕДЕЛЕНИЮ ДОЛГОВЕЧНОСТИ ОБРАЗЦА ПРИ СЛУЧАЙНОМ
СТАЦИОНАРНОМ НАГРУЖЕНИИ

В процессе эксплуатации элементы конструкций подвергаются действию переменных нагрузок, являющихся в большинстве случайными. Среди них можно выделить широко встречающийся класс стационарных случайных нагрузок, обладающих эргодическим свойством.

Существующие методы расчета для случайных режимов, например изложенный в работе [1], основываются на замене их блоками эквивалентной программной нагрузки. В работе В.Д.Райхера [2] долговечность определена с использованием спектральной плотности случайного процесса. Однако в основе указанных методов отсутствует физическое представление о мере повреждения.

Цель настоящей работы состоит в отыскании параметров гармонического нагружения, эквивалентного по степени вносимого повреждения исследуемому случайному процессу. Так как закономерности накопления повреждения для I-й и 2-й стадий усталостного разрушения различны, то эквивалентные гармонические режимы для них также будут различны.

Предположим, что процесс накопления повреждений до разрушения образца (от цикла к циклу) описывается двумя функциями [3]. Одна из них, обозначаемая в дальнейшем через Φ , равна нулю для начального состояния металла и единице при появлении в образце первой макротрещины. Вторая функция Ψ , характеризующая распространение трещины, равна нулю при $\Phi \leq 1$ и критическому значению $\Psi_{кр}$ при разрушении образца. Очевидно, что функции Φ и Ψ являются неубывающими функциями времени.

Пусть имеется некоторая реализация случайного нагружения (рис. 1) длительностью

$$t_p = t_k - t_n,$$

где t_n и t_k - соответственно начальный и конечный моменты

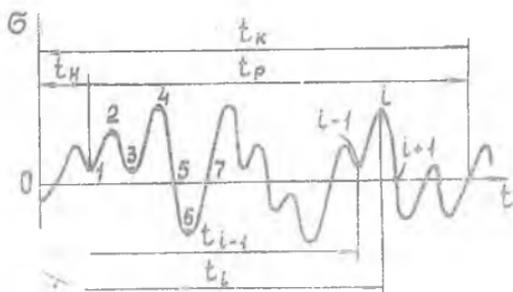


Рис. 1.

времени, отсчитанные от момента появления трещины. Весь процесс может быть разбит на участки, заключенные между экстремумами (1-2; 2-3; 3-4; ...), а также между экстремумом и осью абсцисс (4-5; 5-6; 6-7; ...).

Введем функции повреждения Φ^* и Ψ^* , характеризующие накопление повреждения в пределах гармонического цикла (внутри цикла) изменения напряжения соответственно для 1-й и 2-й стадий усталостного разрушения. Используя эти функции, найдем элементарное повреждение $\Delta\Phi^*(t_{i-1}, t_i)$, $\Delta\Psi^*(t_{i-1}, t_i)$, обусловленное изменением напряжения на участке случайного нагружения (i-1)-i. Далее определим суммарное повреждение за произвольный отрезок времени t_p как сумму элементарных повреждений за это время. Затем на основе принятых условий эквивалентности случайного и гармонического нагружений находим эквивалентные гармонические режимы для обеих стадий усталостного разрушения и, в итоге, расчетные долговечности.

Рассмотрим предварительно нагрузку гармонического характера. Применительно к такой нагрузке в работе [4] предложено метод ре-

чета долговечности, согласно которому можно получить семейство кривых в координатах "относительная поврежденная площадь \bar{F}_n - время t_r ". Под \bar{F}_n понимается отношение площади образца F_n , занятой трединой, к первоначальной площади F_0 образца в том же сечении.

Такие кривые для исследуемых плоских образцов из сплава МА-2 при плоском изгибе для амплитудных значений действительных напряжений $\sigma_a = 18,6; 18,1; 17$ и $15,5$ [кг/мм²] приведены на рис. 2, из которого видно, что от значения $\bar{F}_n \approx 0,1$ происходит

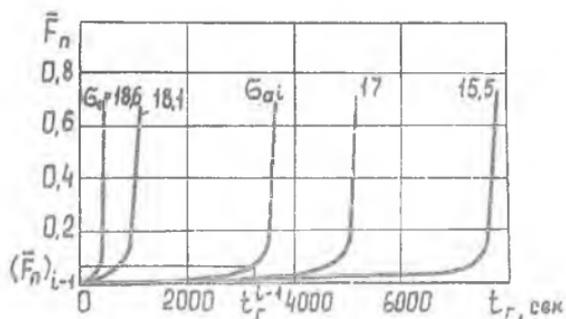


Рис. 2.

весьма быстрое распространение усталостной трещины до разрушения образца. Поэтому в дальнейшем кривые повреждаемости аппроксимировались на участке изменения $\bar{F}_n = 0 \rightarrow 0,1$. Аппроксимирующее выражение имеет вид

$$\bar{F}_n(t_r, \sigma_a) = \varphi(\sigma_a)t_r^2 + \xi(\sigma_a)t_r, \quad (1)$$

где $\varphi(\sigma_a)$ и $\xi(\sigma_a)$ - функции вида $\varphi(\sigma_a) = d_1\sigma_a + d_2$; $\xi(\sigma_a) = c_1\sigma_a + c_2$, коэффициенты которых определялись методом наименьших квадратов.

Приращение меры повреждения для i -ой стадии усталостного разрушения $\Delta\Phi_i$ за i -й цикл гармонической нагрузки найдем, используя кривую усталости по моменту появления макротрещины. Согласно [4] названная кривая является геометрическим местом точек, удовлетворяющих уравнению

$$\sum \frac{n_i}{N_{oi}} = 1,$$

где n_i - число циклов i -го уровня напряжений; N_{oi} - число

циклов до появления первой макротрещины при том же уровне;

σ_{ai} - действительное амплитудное значение напряжения i -го уровня.

Величина $\Delta \Phi_i$ зависит от напряжения σ_{ai} i -го цикла и определяется из выражения

$$\Delta \Phi_i = \frac{1}{N_{oi}} \quad (2)$$

Приращение меры повреждения для 2-ой стадии усталостного разрушения $\Delta \mathcal{D}_i$ за i -й цикл гармонической нагрузки зависит от состояния конструкции, достигаемого к концу $(i-1)$ -го цикла (т.е. от меры \mathcal{D}_{i-1}), а также от амплитудного значения напряжения σ_{ai} i -го цикла. Найдем величину $\Delta \mathcal{D}_i$, приняв для второй стадии усталостного разрушения за меру повреждения \mathcal{D} относительную поврежденную площадь \bar{F}_n .

Обозначим через $(\bar{F}_n)_{i-1}$ накопленную относительную поврежденную площадь к началу действия i -го цикла гармонической нагрузки с амплитудой σ_{ai} . Тогда

$$\Delta \mathcal{D}_i = \Delta \bar{F}_n^i = \frac{d\bar{F}_n(t_r, \sigma_{ai})}{dt} T \quad (3)$$

где T - период гармонической нагрузки.

Производная $\frac{d\bar{F}_n(t_r, \sigma_{ai})}{dt}$ должна быть взята в точке с координатой t_r^{i-1} , соответствующей $(\bar{F}_n)_{i-1}$ при σ_{ai} (рис. 2). Величина t_r^{i-1} определяется из уравнения (1).

Очевидно, что расчет приращения мер повреждения Φ и \mathcal{D} по формулам (2) и (3) для случайного нагружения невозможен в связи с неопределенностью понятия "цикл". Поэтому найдем функции повреждения Φ^* , \mathcal{D}^* в пределах цикла изменения гармонической нагрузки (внутри цикла), что позволит найти повреждение за часть цикла и в конечном счете определить повреждение для случайного нагружения за любой промежуток времени.

Представим искомые функции Φ^* и \mathcal{D}^* в виде

$$\Phi^* = K \Delta \Phi_i \psi(\tau) \quad (4)$$

$$\mathcal{D}^* = K \Delta \mathcal{D}_i \psi(\tau), \quad (5)$$

где K , $\psi(\tau)$ - соответственно коэффициент и некоторая функция времени τ , подлежащие определению; τ - текущее время цикла

($0 \leq \tau \leq T$); величины $\Delta\Phi_i$ и $\Delta\mathcal{D}_i$ определяются по формулам (2) и (3).

Сначала определим выражение для функции \mathcal{D}^* .

Закономерности накопления повреждений внутри цикла в настоящее время не исследованы в должной мере. Поэтому положим, что повреждения, обусловленные изменением напряжения на участках ob и bc (рис. 3а), равны между собой $[(\bar{F}_n)_{ob} = (\bar{F}_n)_{bc}]$. Положим также, что $(\bar{F}_n)_{oc} = (\bar{F}_n)_{cd}$. Рассмотрим изменение функции скорости

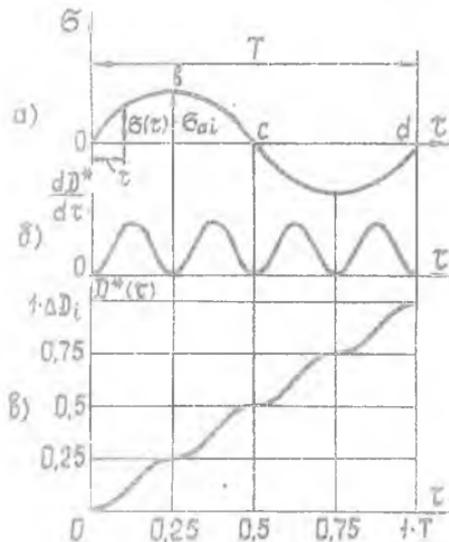


Рис. 3.

накопления повреждения $\frac{d\mathcal{D}^*}{d\tau}$ в пределах одного цикла. Она должна быть равна нулю при $\tau=0$, $\frac{T}{2}$, так как в эти моменты времени $\sigma=0$. При $\tau=\frac{T}{4}$ и $\frac{3T}{4}$ она также должна быть равна нулю, так как при этом приращение напряжения равно нулю ($\frac{d\sigma}{d\tau}=0$).

Аналитическое выражение, удовлетворяющее этим условиям, можно принять в виде.

$$\frac{d\mathcal{D}^*}{d\tau} = k\Delta\mathcal{D}_i \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{2} \cos 8\pi \frac{\tau}{T} \right). \quad (6)$$

График функции (6) показан на рис. 3б.

Интегрируя (6) по τ , получим

$$\mathcal{D}^*(\tau) = k\Delta\mathcal{D}_i \left(\frac{\tau}{2} - \frac{T}{16\pi} \sin 8\pi \frac{\tau}{T} \right) + C. \quad (7)$$

Используя граничные условия:

$$\text{при } \tau = 0, \quad \mathcal{D}^*(\tau) = 0$$

$$\text{при } \tau = T, \quad \mathcal{D}^*(\tau) = \Delta \mathcal{D}_i,$$

$$\text{получим } c = 0, \quad k = \frac{2}{T}.$$

Выражение (7) примет вид

$$\mathcal{D}^*(\tau) = \Delta \mathcal{D}_i \left(\frac{\tau}{T} - \frac{1}{8\pi} \sin 8\pi \frac{\tau}{T} \right). \quad (8)$$

Изменение величины $\mathcal{D}^*(\tau)$ в пределах цикла показано на рис.3в.

Учитывая, что

$$\tau = \frac{T}{2\pi} \arcsin \frac{\sigma(\tau)}{\sigma_{ai}},$$

соотношение (8) запишем следующим образом:

$$\mathcal{D}^*(\tau) = \Delta \mathcal{D}_i \left(\frac{1}{2\pi} \arcsin \frac{\sigma(\tau)}{\sigma_{ai}} - \frac{1}{8\pi} \sin 4\pi \arcsin \frac{\sigma(\tau)}{\sigma_{ai}} \right). \quad (9)$$

Выражение (9) позволяет найти приращение повреждения, обусловленное изменением напряжения на любом участке от τ_1 до τ_2 ($\tau_1 < \tau_2$) в пределах цикла как разность функции (9) в эти моменты времени. Так, приращение повреждения $\Delta \mathcal{D}^*(\tau, \frac{T}{4})$ на участке $\tau \in T/4$ (рис.3а) определится как

$$\Delta \mathcal{D}^*(\tau, \frac{T}{4}) = \int_{\tau}^{\frac{T}{4}} \frac{d\mathcal{D}^*}{d\tau} d\tau = \Delta \mathcal{D}_i \left[\frac{1}{4} - \frac{1}{2\pi} \arcsin \frac{\sigma(\tau)}{\sigma_{ai}} + \frac{1}{8\pi} \sin 4\pi \arcsin \frac{\sigma(\tau)}{\sigma_{ai}} \right] \quad (10)$$

Проведя аналогичные выкладки для функции Φ^* , получим

$$\Delta \Phi^*(\tau, \frac{T}{4}) = \int_{\tau}^{\frac{T}{4}} \frac{d\Phi^*}{d\tau} d\tau = \Delta \Phi_i \left[\frac{1}{4} - \frac{1}{2\pi} \arcsin \frac{\sigma(\tau)}{\sigma_{ai}} + \frac{1}{8\pi} \sin 4\pi \arcsin \frac{\sigma(\tau)}{\sigma_{ai}} \right]. \quad (11)$$

Выражения (10), (11) дают возможность определения повреждений $\Delta \mathcal{D}^*(t_{i-1}, t_i)$, $\Delta \Phi^*(t_{i-1}, t_i)$ вносимых участками $(i-1) - i$ (рис.1) случайного процесса, соответственно на первой и второй стадиях усталостного разрушения. Они находятся по формулам, аналогичным (10), (11), в которых под величинами $\sigma(\tau)$ и σ_{ai} подразумеваются соответственно минимальное и максимальное значения напряжений, определяющих участок случайной реализации (рис. 1).

Время появления трещины при случайном нагружении находим из условия

$$\mathcal{D}(T_0^{\text{расч}}) = \sum_{i=1}^k \Delta \mathcal{D}^*(t_{i-1}, t_i) = 1, \quad (12)$$

где k - число участков случайного процесса.

В соответствии с [5], используя кривую усталости по появлению первой макротрещины, находим величину $\sigma_{\text{ЭКВ}}^{\text{TP}}$ - амплитуду эквивалентной гармоника для I-ой стадии усталостного разрушения (рис. 4).

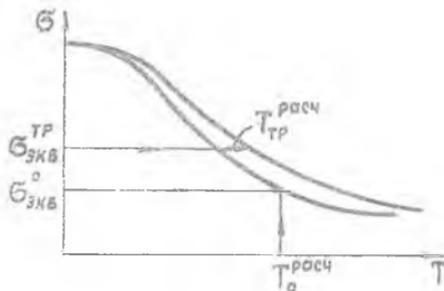


Рис. 4.

Суммарное повреждение $\mathcal{D}_{\text{СЛ}}(t_p)$, вносимое случайным нагружением за любое время реализации t_p , на 2-ой стадии усталостного разрушения находим из выражения

$$\mathcal{D}_{\text{СЛ}}(t_p) = \sum_{i=1}^m \Delta \mathcal{D}^*(t_{i-1}, t_i), \quad (13)$$

где m - число участков случайного нагружения за время t_p .

Под эквивалентной гармоникой для 2-ой стадии усталостного разрушения будем понимать гармонику амплитуды $\sigma_{\text{ЭКВ}}^{\text{TP}}$, которая вносит такое же повреждение $\bar{F}_n(t_p, \sigma_{\text{ЭКВ}}^{\text{TP}})$, как и случайная нагрузка за одно и то же время t_p . Используя условие эквивалентности, запишем уравнение (I) в виде

$$\mathcal{D}_{\text{СЛ}}(t_p) = \bar{F}_n(t_p, \sigma_{\text{ЭКВ}}^{\text{TP}}) = \psi(\sigma_{\text{ЭКВ}}^{\text{TP}})(t_k^2 - t_H^2) + \xi(\sigma_{\text{ЭКВ}}^{\text{TP}})(t_k - t_H). \quad (14)$$

Тогда, определив по уравнению (13) величину повреждения при случайном нагружении за любое время t_p , из уравнения (14) находим $\sigma_{\text{ЭКВ}}^{\text{TP}}$. Затем определим время $T_{\text{ТР}}^{\text{расч}}$ (рис. 4) распространения трещины от момента появления ее до разрушения при действии исследуемого случайного нагружения.

Для проверки изложенной методики расчета долговечности при случайном нагружении было проведено испытание плоских образцов с отверстием из сплава МА-2 на гармоническую и случайную нагрузки (поперечный изгиб). Испытания при случайном нагружении проводились на трех уровнях $S_{\sigma} = 6,8; 5,1$ и $4,24$ [кг/мм^2] (S_{σ} - с.к.о. случайного процесса). Найденные значения $\sigma_{\text{экв}}^{\circ}$, $\sigma_{\text{экв}}^{\text{ТР}}$ для каждого уровня случайной нагрузки приведены в таблице I.

Таблица I

S_{σ} [кг/мм^2]	6,8	5,1	4,24
$\sigma_{\text{экв}}^{\circ}$ [кг/мм^2]	18	17,2	16,5
$\sigma_{\text{экв}}^{\text{ТР}}$ [кг/мм^2]	17	16,6	16,1
$T_{\sigma}^{\text{расч}}$ [сек]	2440	10946	40908
$T_{\sigma}^{\text{эксп}}$ [сек]	2955	10157	33985
$T_{\text{ТР}}^{\text{расч}}$ [сек]	1538	3628	11202
$T_{\text{ТР}}^{\text{эксп}}$ [сек]	1770	5111	9917
$T_{\text{Р}}^{\text{расч}}$ [сек]	3977	14572	52110
$T_{\text{Р}}^{\text{эксп}}$ [сек]	4725	15318	43903

В этой же таблице приведены расчетные и экспериментальные значения следующих величин: T_{σ} - время до появления первой макротрещины; $T_{\text{ТР}}$ - время распространения трещины; $T_{\text{Р}} = T_{\sigma} + T_{\text{ТР}}$ - время от начала нагружения до разрушения образца - долговечность. Анализ показывает их удовлетворительное совпадение.

Л и т е р а т у р а

1. Ковалевский Дж. Сб. "Усталостная прочность и долговечность самолетных конструкций" под ред. И.И.Эскина "Машиностроение", 1965.
2. Райхер В.Л. Труды ЦАГИ, вып. 1134, 1969.
3. Болотин В.В. Статистические методы в строительной механике. Государственное изд-во литературы по строительству, архитектуре и строительным материалам, 1961.
4. Мостовой А.С. Труды КуАИ, вып., 39, 1968.
5. Мостовой А.С. Труды КуАИ, вып. 48, 1971.