В. И. КЛИМОВ

ИНТЕГРАЛЬНЫЙ ПРИНЦИП МИНИМУМА ПОЛНОЙ ДОПОЛНИТЕЛЬНОЙ ПОТЕНЦИАЛЬНОЙ ЭНЕРГИИ ТЕРМОУПРУГОЙ СИСТЕМЫ

§ 1. Общая характеристика принципа

Здесь принимаем те же основные допущения, что и в принципе минимума полной потенциальной энергии термоупругой системы [1].

Как и ранее, не учитываются взаимосвязанность механической и тепловой энергии при деформации, инерционные эффекты, обусловленные изменением температуры, и различные процессы диссипативного характера. Среда считается идеально упругой и находящейся в равновесии в любой момент нагружения или разгрузки. Предположим, что на упругое тело действуют некоторые малые внешние нагрузки или вариации массовых δX, δY, δZ и поверхностных $\delta X\nu$, $\delta Y\nu$, $\delta Z\nu$ сил. Кроме того, тело находится в состоянии неравномерного нагрева, характеризующегося изменением температуры $\delta \bar{t}$. Пусть от этих нагрузок и неравномерного нагрева в упругом теле возникло напряженное состояние, характеризующееся вариациями компонентов напряжений

$$\delta\sigma_x\,,\quad \delta\sigma_y\,,\quad \delta\sigma_z\,,\quad \delta\tau_{xy}\,,\quad \delta\tau_{yz}\,,\quad \delta\tau_{zx}\,. \tag{1}$$

Поскольку тело находится в равновесии, воспользуемся принципом возможных перемещений, приняв за них действительные перемещения u, v и w. Согласно принципу возможных перемещений, выраженному в энергетической форме, будем иметь:

$$\delta\overline{U} + \delta\overline{T} = 0. \tag{2}$$

Возможное изменение (вариация) дополнительной потенциальной энергии выразится так

$$\delta\overline{U} = \iiint \delta\overline{W} dxdydz. \tag{3}$$

Изменение объемной плотности дополнительной потенциальной энергии внутренних сил упругости вычисляется по формуле

$$\delta\overline{W} = \varepsilon_x\,\delta\sigma_x + \varepsilon_y\,\delta\sigma_y + \varepsilon_z\,\delta\sigma_z + \gamma_{xy}\,\delta\tau_{xy} + \gamma_{yz}\,\delta\tau_{yz} + \gamma_{zx}\,\delta\tau_{zx}. \tag{4}$$

Возможное изменение (вариация) энергии внешних нагрузок в этом случае запишется в виде

$$\delta\overline{T} = -\iiint (u\delta X + v\delta Y + w\delta Z)\rho dxdydz - \iint (u\delta X_\nu + v\delta Y_\nu + w\delta Z_\nu)\times \times dS \quad (5)$$

В последнем выражении u, v и w действительные перемещения, которые происходят в упругом теле от внешних нагрузок и поля температур t.

В дальнейшем будем считать, что действительные перемещения и действительное распределение температуры не варьируются. Помня об этом, в соотношении (2) выносим знак вариации за скобку

$$\delta(\overline{U} + \overline{T}) = 0. \qquad (6)$$

Выражение, стоящее в скобках, называется полной дополнительной потенциальной энергией упругой системы

$$\overline{Э} = \overline{U} + \overline{T}. \qquad (7)$$

Согласно условию (6) и (7), получаем

$$\delta\overline{Э} = 0, \qquad (8)$$

что свидетельствует о стационарности полной дополнительной энергии упругой системы. Можно показать, что $\delta^2\ \overline{Э} > 0$, следовательно

$$\overline{Э} - \min. \qquad (9)$$

Соотношения (8) и (9) являются математическим выражением вариационного принципа минимума полной дополнительной потенциальной энергии упругой системы.

Из всех статически возможных систем напряжений в действительности имеют место такие напряжения, которые сообщают полной дополнительной потенциальной энергии упругой системы минимальное значение.

Под статически возможными понимаются такие напряжения, которые удовлетворяют уравнениям равновесия и статическим граничным условиям.

Минимальное значение полной дополнительной энергии используется при решении задач строительной механики и теории упругости.

§ 2. Дополнительная потенциальная энергия внутренних сил упругости и внешних нагрузок

Вариация плотности дополнительной потенциальной энергии внутренних сил упругости определяется выражением (4). Действительный процесс деформации для упругого тела обратим, следовательно,

$$\oint \delta\overline{W} = 0 \qquad (10)$$

Это свидетельствует о том, что $\delta\overline{W}$ является полным дифференциалом. Тогда, считая плотность дополнительной энергии внутренних сил функцией напряжений, можем написать

$$\delta\overline{W} = \frac{\partial\overline{W}}{\partial\sigma_x}\delta\sigma_x + \frac{\partial\overline{W}}{\partial\sigma_y}\delta\sigma_y + \frac{\partial\overline{W}}{\partial\sigma_z}\delta\sigma_z + \frac{\partial\overline{W}}{\partial\tau_{xy}}\delta\tau_{xy} + \frac{\partial\overline{W}}{\partial\tau_{yz}}\delta\tau_{yz} + \frac{\partial\overline{W}}{\partial\tau_{zx}}\delta\tau_{zx} \quad (11)$$

Сравнивая выражения (4) и (11), получаем

$$\frac{\partial\overline{W}}{\partial\sigma_x} = \varepsilon_x, \ \frac{\partial\overline{W}}{\partial\sigma_y} = \varepsilon_y, \ \frac{\partial\overline{W}}{\partial\sigma_z} = \varepsilon_z, \ \frac{\partial\overline{W}}{\partial\tau_{xy}} = \gamma_{xy}, \ \frac{\partial\overline{W}}{\partial\tau_{yz}} = \gamma_{yz}, \ \frac{\partial\overline{W}}{\partial\tau_{zx}} = \gamma_{zx} \quad (12)$$

Эти формулы свидетельствуют о том, что $\overline{W}$ является потенциальной функцией или дополнительным потенциалом. Поскольку изменение плотности дополнительной потенциальной энергии является полным дифференциалом, то саму плотность энергии можно найти интегрированием.

Компоненты упругой деформации связаны с компонентами напряжений зависимостями обобщенного закона Гука

$$\left.\begin{aligned} e_x &= \frac{1}{E}[\sigma_x - \mu(\sigma_y + \sigma_z)], \quad \gamma_{xy} = \frac{\tau_{xy}}{G}, \\ e_y &= \frac{1}{E}[\sigma_y - \mu(\sigma_z + \sigma_x)], \quad \gamma_{yz} = \frac{\tau_{yz}}{G}, \\ e_z &= \frac{1}{E}[\sigma_z - \mu(\sigma_x + \sigma_y)], \quad \gamma_{zx} = \frac{\tau_{zx}}{G}. \end{aligned}\right\} \quad (13)$$

Компоненты полной деформации будут

$$\left.\begin{aligned} \varepsilon_x &= \frac{1}{E}[\sigma_x - \mu(\sigma_y + \sigma_z)] + \alpha t, \quad \gamma_{xy} = \frac{\tau_{xy}}{G}, \\ \varepsilon_y &= \frac{1}{E}[\sigma_y - \mu(\sigma_z + \sigma_x)] + \alpha t, \quad \gamma_{yz} = \frac{\tau_{yz}}{G}, \\ \varepsilon_z &= \frac{1}{E}[\sigma_z - \mu(\sigma_x + \sigma_y)] + \alpha t, \quad \gamma_{zx} = \frac{\tau_{zx}}{G}. \end{aligned}\right\} \quad (14)$$

На основании (4) и (14) получим

$$\begin{aligned} \overline{W} = \int \Big\{ &\Big\{\frac{1}{E}[\sigma_x - \mu(\sigma_y + \sigma_z)] + \alpha t\Big\}\delta\sigma_x + \Big\{\frac{1}{E}[\sigma_y - \mu(\sigma_z + \sigma_x)] + \alpha t\Big\} \times \\ &\times \delta\sigma_y + \Big\{\frac{1}{E}[\sigma_z - \mu(\sigma_x + \sigma_y)] + \alpha t\Big\}\delta\sigma_z + \\ &+ \frac{1}{G}(\tau_{xy}\delta\tau_{xy} + \tau_{yz}\delta\tau_{yz} + \tau_{zx}\delta\tau_{zx})\Big\} + C. \end{aligned} \quad (15)$$

Последнее выражение представим в таком виде

$$\overline{W} = \int\Big\{\frac{1}{E}\Big\{\delta\left(\frac{\sigma_x^2}{2}\right) + \delta\left(\frac{\sigma_y^2}{2}\right) + \delta\left(\frac{\sigma_z^2}{2}\right) - \mu[\delta(\sigma_x\sigma_y) + \delta(\sigma_x\sigma_z) +$$

$$+ \delta(\sigma_z \sigma_x)]\Big\} + \frac{1}{G}\left[\delta\left(\frac{\tau_{xy}^2}{2}\right) + \delta\left(\frac{\tau_{yz}^2}{2}\right) + \right.$$
$$\left. + \delta\left(\frac{\tau_{zx}^2}{2}\right)\right] + \alpha t(\delta\sigma_x + \delta\sigma_y + \delta\sigma_z)\Big\} + C. \tag{16}$$

Интегрируя и предполагая, что в начальный момент напряжения отсутствуют и $\overline{W}_0 = 0$, получим

$$\overline{W} = \frac{1}{2E}\left(\sigma_x^2 + \sigma_y^2 + \sigma_z^2\right) - \frac{\mu}{E}(\sigma_x \cdot \sigma_y + \sigma_y \cdot \sigma_z + \sigma_z \cdot \sigma_x) +$$
$$+ \frac{1}{2G}(\tau_{xy}^2 + \tau_{yz}^2 + \tau_{zx}^2) + \alpha t(\sigma_x + \sigma_y + \sigma_z). \tag{17}$$

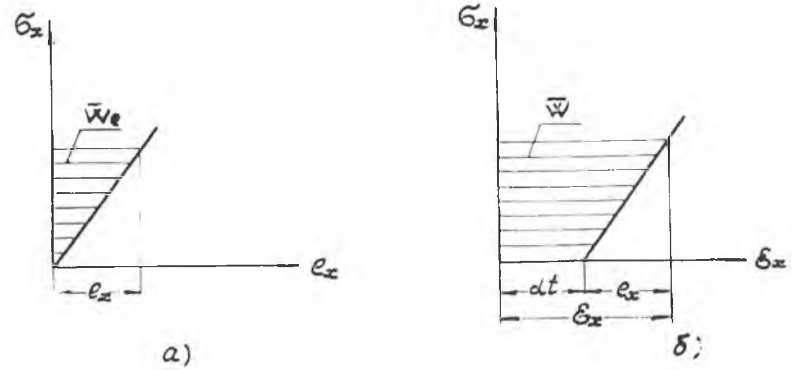

Рис. 1

Это выражение удовлетворяет соотношениям (12) и поэтому является дополнительным потенциалом.

Значение

$$\overline{W}_e = \frac{1}{2E}\left(\sigma_x^2 + \sigma_y^2 + \sigma_z^2\right) - \frac{\mu}{E}(\sigma_x \sigma_y + \sigma_y \sigma_z + \sigma_z \sigma_x) + \frac{1}{2G}\left(\tau_{xy}^2 + \tau_{yz}^2 + \tau_{zx}^2\right) \tag{18}$$

удовлетворяет согласно (13) соотношениям

$$\frac{\partial \overline{W}_e}{\partial \sigma_x} = e_x; \quad \frac{\partial \overline{W}_e}{\partial \sigma_y} = e_y; \quad \frac{\partial \overline{W}_e}{\partial \sigma_z} = e_z; \quad \frac{\partial \overline{W}_e}{\partial \tau_{xy}} = \gamma_{xy}; \quad \frac{\partial \overline{W}_e}{\partial \tau_{yz}} = \gamma_{yz}; \quad \frac{\partial \overline{W}_e}{\partial \tau_{zx}} = \gamma_{zx} \tag{19}$$

и является дополнительным упругим потенциалом.

Таким образом

$$\overline{W} = \overline{W}_e + \alpha t(\sigma_x + \sigma_y + \sigma_z). \tag{20}$$

Для линейно-упругого тела будем иметь

$$\overline{W}_e = W. \tag{21}$$

В одномерной задаче плотность дополнительной энергии имеет следующее значение

$$\overline{W}_e = \frac{\sigma_x^2}{2E}; \quad \overline{W} = \frac{\sigma_x^2}{2E} + \alpha t \cdot \sigma_x. \tag{22}$$

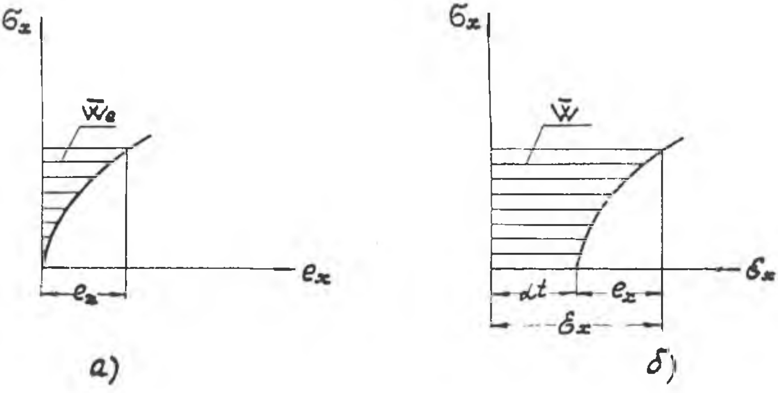

Рис. 2.

Геометрически эти величины представим заштрихованными площадями на диаграммах рис. 1.

Дополнительный потенциал в одномерной задаче можно определить и так

$$\overline{W} = \sigma_x \varepsilon_x - W = \frac{\sigma_x^2}{2E} + \alpha t \sigma_x . \tag{23}$$

В случае нелинейно-упругого тела

$$\overline{W} = \int \delta \overline{W}. \tag{24}$$

Геометрическая интерпретация для одномерной задачи показана на рис. 2, причем опять можно считать, что

$$\overline{W} = \sigma_x \varepsilon_x - W. \tag{25}$$

Обобщая этот результат на трехмерную задачу, будем иметь

$$\overline{W} = \sigma_x \varepsilon_x + \sigma_y \varepsilon_y + \sigma_z \varepsilon_z + \tau_{xy} \gamma_{xy} + \tau_{yz} \gamma_{yz} + \tau_{zx} \gamma_{zx} - W, \tag{26}$$

где W определяется согласно (21) [1].

Для линейно-упругого тела на основании (19) [1] получим

$$\overline{W} = \frac{1}{2} [\sigma_x \varepsilon_x + \sigma_y \varepsilon_y + \sigma_z \varepsilon_z + \tau_{xy} \gamma_{xy} + \tau_{yz} \gamma_{yz} + \tau_{zx} \gamma_{zx} + \alpha t (\sigma_x + \sigma_y + \sigma_z)]. \tag{27}$$

Если сюда подставить значения (14), то получим выражение (17) для дополнительного потенциала.

Отметим, что значение дополнительного потенциала не зависит от последовательности приложения нагрузки и температуры и полностью определяется конечными параметрами напряженного состояния. Дополнительная потенциальная энергия внутренних сил определяется интегрированием по всему объему тела

$$\overline{U} = \iiint \overline{W} \, dx \, dy \, dz. \tag{28}$$

Потенциальная энергия варьируемых внешних нагрузок вычисляется согласно (5) так

$$\overline{T} = -\iiint (u\cdot X + v\cdot Y + w\cdot Z)\,\rho dxdydz - \iint (uX_\nu + vY_\nu + wZ_\nu)\,dS. \quad (29)$$

Суммируя значения (28) и (29), получим полную дополнительную потенциальную энергию (7) упругой системы.

§ 3. Определение перемещений

Предположим, что к упругой системе приложены известные внешние нагрузки в виде обобщенных сил $P_1, P_2, \dots P_n$ и требуется определить обобщенное перемещение $f_к$ по заданному направлению. Прикладываем в этом направлении варьируемую обобщенную силу $\Phi_к$.

Дополнительная потенциальная энергия внутренних сил будет зависеть от внешних заданных нагрузок и обобщенной силы $\Phi_к$.

$$U = U(\overline{P}_1,\ P_2 . P_2,\ \dots P_n,\ \Phi_k). \quad (30)$$

Тогда

$$\delta \overline{U} = \frac{\partial \overline{U}}{\partial \Phi_k}\delta\Phi_k, \quad (31)$$

так как внешние нагрузки известны и их вариации равны нулю. Потенциальная энергия варьируемой внешней нагрузки выразится так

$$\overline{T} = -f_k^*\cdot\Phi_k, \quad (32)$$

а ее вариация будет

$$\delta\overline{T} = -f_k^*\cdot\delta\Phi_k. \quad (33)$$

Вариация полной дополнительной энергии (8) равна нулю, поэтому суммируя (31) и (33), получим

$$\delta\overline{Э} = \left(\frac{\partial \overline{U}}{\partial \Phi_k} - f_k^*\right)\delta\Phi_k = 0. \quad (34)$$

Отсюда, ввиду произвольности вариации $\delta\Phi_к$, будем иметь

$$\frac{\partial \overline{U}}{\partial \Phi_k} = f_k^*. \quad (35)$$

Здесь $f_к^*$ — обобщенное перемещение от заданных внешних нагрузок и обобщенной силы $\Phi_к$. Нам же требуется определить перемещение только от заданной внешней нагрузки. Поэтому, взяв производную по $\Phi_к$, далее в этом выражении полагаем $\Phi_к=0$ и получаем

$$\left[\frac{\partial \overline{U}}{\partial \Phi_k}\right]_{\Phi_k=0} = f_k. \quad (36)$$

Здесь уже $f_к$ — обобщенное перемещение по направлению обобщенной силы $\Phi_к$ от одних заданных, известных внешних нагрузок без учета нагрузки $\Phi_к$.

§ 4. Начало наименьшей дополнительной энергии внутренних сил упругости

Это начало является частным случаем принципа минимума полной дополнительной потенциальной энергии упругой системы.

Здесь предполагается, что внешние нагрузки не варьируются или варьируются те из них, для которых перемещения в их направлении равны нулю. При этом вариация потенциальной энергии внешних нагрузок равна нулю

$$\delta\overline{T} = 0. \tag{37}$$

Тогда из соотношения (2) получаем $\delta\overline{U}=0$, причем $\delta^2\overline{U}>0$, следовательно

$$\overline{U} - \min. \tag{38}$$

Это есть математическое выражение начала наименьшей дополнительной энергии внутренних сил упругости.

Из всех статически возможных систем напряжений в действительности имеют место такие напряжения, которые сообщают дополнительной потенциальной энергии внутренних сил упругости минимальное значение.

Для линейно-упругой среды при $t=0$ будем иметь

$$\overline{W} = W, \quad \overline{U} = U. \tag{39}$$

Тогда условия (38) принимают вид

$$\delta U = 0, \quad \delta^2 U > 0, \quad U - \min \tag{40}$$

и математически выражают начало наименьшей работы.

§ 5. Температурные напряжения у свободных концов цилиндрических тонкостенных конструкций

Значения температурных напряжений, получаемых на основе гипотезы плоских сечений или гипотезы секториальных площадей [2], относятся к сечениям, удаленным от свободных концов конструкции. Производя расчет по этим формулам, мы получаем самоуравновешенные напряжения на свободных концах.

Рассмотрим приближенный метод расчета, позволяющий освободить незакрепленные торцевые сечения от самоуравновешенных температурных напряжений. Для этого нагрузим свободное торцовое сечение теми же самоуравновешенными нормальными напряжениями, но взятыми с обратным знаком, и предположим, что характер их изменения будет

$$\Delta\sigma_{1t} = -\sigma_t(s) f(z). \tag{41}$$

Последнюю зависимость представим в таком виде:

$$\Delta N_{1t} = -f(z) N_{0t}(s), \tag{42}$$

где

$$\Delta N_{1t} = \int_0^\delta \Delta\sigma_{1t}\, d\nu; \quad N_{0t} = \int_0^\delta \sigma_t\, d\nu. \tag{43}$$

В рассматриваемых здесь расчетных схемах тонкостенных конструкций учитываются только продольные нормальные напряжения и сопутствующие им касательные напряжения, которые определяются из уравнения равновесия

$$\frac{\partial N}{\partial z} + \frac{\partial q}{\partial s} = 0$$

$$q = f'(z) \int_0^s N_{0t}\, ds + q_{0i}. \tag{44}$$

Для открытого контура $q_{0i} = 0$.
В однозамкнутом контуре q_{0i} определяется из условия самоуравновешенности

$$\oint qr\, ds = 0, \tag{45}$$

что дает

$$q_0 = -\frac{f'(z)}{\Omega} \oint r \left(\int_0^s N_{0t}\, ds \right) ds. \tag{46}$$

Подставляя в (44), будем иметь

$$q = f'(z)\, Q(s), \tag{47}$$

где

$$Q(s) = \int_0^s N_{0t}\, ds - \frac{1}{\Omega} \oint r \left(\int_0^s N_{0t}\, ds \right) ds. \tag{48}$$

В многозамкнутых сечениях потоки q_{0i} определяются из условия (45) и уравнений циркуляции.

Для определения неизвестной функции $f(z)$ решим вариационную задачу, используя начало дополнительной потенциальной энергии внутренних сил упругости (38).

Учитывая зависимости

$$\tau = \frac{\psi q}{\psi_c \delta}; \quad \Delta\sigma_{1t} = \frac{\varphi \cdot \Delta N_{1t}}{\varphi_c \delta}; \tag{49}$$

$$\varphi(z, s, \nu) = \frac{E(z, s, \nu)}{E_0}; \; \psi(z, s, \nu) = \frac{G(z, s, \nu)}{G_0}; \; \varphi_c = \frac{1}{\delta} \int_0^\delta \varphi\, d\nu,$$

$$\psi_c = \frac{1}{\delta} \int_0^\delta \psi\, d\nu,$$

представим согласно (17), (28) и (49) дополнительную потенциальную энергию внутренних сил в виде

$$\overline{U} = \int\oint\int_0^{\delta} \left(\frac{\varphi^2 \Delta N_{1t}^2}{2\, E \varphi_c^2\, \delta^2} + \frac{\psi^2 q^2}{2G\, \psi_c^2\, \delta^2} + \alpha t\, \frac{\varphi \Delta N_{1t}}{\varphi_c\, \delta} \right) d\nu\, ds\, dz. \tag{50}$$

Подставляя сюда значения (42) и (47), получим

$$\overline{U} = \int\oint \left[\frac{f^2(z)\, N_{0t}^2}{2E_0\, \varphi_c\, \delta} + \frac{f'^2(z)\, Q^2(s)}{2G_0\, \psi_c\, \delta} - \frac{f(z)\, N_{0t}}{\varphi_c\, \delta} \int_0^{\delta} \alpha t \varphi\, d\nu \right] ds\, dz. \tag{51}$$

Условие стационарности этого функционала

$$F_f - \frac{d}{dz} F_{f'} = 0 \tag{52}$$

в развернутом виде будет

$$\frac{d}{dz} \left[a(z) \cdot f'(z) \right] - b(z)\, f(z) = -c(z), \tag{53}$$

где

$$\left. \begin{aligned} a(z) &= \oint \frac{Q^2(s)}{G_0\, \psi_c\, \delta}\, ds, \\ b(z) &= \oint \frac{N_{0t}^2}{E_0\, \varphi_c\, \delta}\, ds, \\ c(z) &= \oint \frac{N_{0t}}{\varphi_c\, \delta} \int_0^{\delta} \alpha t \varphi\, d\nu\, ds. \end{aligned} \right| \tag{54}$$

При постоянных по длине параметрах упругости и толщине получим

$$f''(z) - \lambda^2 f(z) = -A; \tag{55}$$

здесь

$$\lambda^2 = \frac{b}{a}; \quad A = \frac{c}{a}. \tag{56}$$

Общий интеграл уравнения (55) имеет вид

$$f(z) = C_1\, sh\, \lambda z + C_2\, ch\, \lambda z + \frac{A}{\lambda^2}. \tag{57}$$

Произвольные постоянные определяются из граничных условий.

Если торцовое сочетание $z=0$ свободно, то

$$f(0) = 1. \tag{58}$$

Если торцовое сечение $z = l$ заделано, то используем естественное граничное условие $[F_{f'}]_{z=l}=0$, которое приводит к равенству

$$f'(l) = 0. \tag{59}$$

Определив значение функции (57) по формуле

$$N_{1t}^{*} = N_{1t} + \Delta N_{1t}, \tag{60}$$

находим характер изменения температурных усилий по длине конструкции.

§ 6. Температурные напряжения у свободных концов конических тонкостенных конструкций

Все сказанное в предыдущем параграфе о методике расчета цилиндрических тонкостенных конструкций у свободных концов можно отнести и к коническим конструкциям.

Рассмотрим здесь приближенный метод расчета температурных напряжений у свободных концов конических тонкостенных конструкций, аналогичный изложенному в предыдущем параграфе.

Нагрузим свободный торец конструкции самоуравновешенными температурными напряжениями $N_{0t}(s)$, взятыми с обратным знаком, и найдем характер их изменения по длине, приняв

$$\Delta N_{1t} = - f(z) \cdot N_{0t}(s). \tag{61}$$

Поток касательных напряжений связан с нормальным усилием уравнением равновесия [3]

$$\frac{\partial\left(\frac{z}{l}\,\Delta N_{1t}\right)}{\partial z} + \frac{\partial q}{\partial s} = 0. \tag{62}$$

Подставляя сюда величину (61), найдем

$$q = \left[\frac{z}{l} f'(z) + \frac{f(z)}{l}\right] \int\limits_0^s N_{0t}\, ds + q_{0i}. \tag{63}$$

Считая контур сечения однозамкнутым и определяя q_{0i} из условия (45), получим

$$q = \left[\frac{z}{l} f'(z) + \frac{f(z)}{l}\right] Q(s), \tag{64}$$

где по-прежнему введена характеристика (48).

Дополнительную потенциальную энергию внутренних сил для конических тонкостенных систем согласно (17) и (50) представим в виде

$$\overline{U} = \int\oint\int\limits_0^\delta \left(\frac{\varphi^2 \Delta N_{1t}^2}{2E\,\varphi_c^2\,\delta^2} + \frac{\psi^2 q^2}{2\,G\psi_c^2\,\delta^2} + \alpha t\, \frac{\varphi \Delta N_{1t}}{\varphi_c\,\delta} \right) \frac{z}{l}\, d\nu\, ds dz. \tag{65}$$

Подставляя сюда значения (61) и (64), получим

$$\overline{U} = \int\oint \left\{ \frac{f^2(z)\, N_{0t}^2}{2E_0\,\varphi_c\,\delta} + \left[\frac{z}{l} f'(z) + \frac{f(z)}{l}\right] \frac{Q^2(s)}{2G_0\,\psi_c\,\delta} - \right.$$

$$- f(z) \frac{N_{0l}}{\psi_c \delta} \int_0^\delta \alpha t \varphi d\nu \Big\} \frac{z}{l} ds dz. \qquad (66)$$

Условие стационарности (52) при постоянных по длине параметрах упругости и толщине в развернутой форме будет

$$z^2 f''(z) + 3z f'(z) - (\lambda^2 l^2 - 1) f(z) = - l^2 A, \qquad (67)$$

где коэффициенты имеют прежние значения (56) и (54). Общий интеграл полученного уравнения Эйлера (67) имеет вид

$$f(z) = C_1 \left(\frac{z}{e}\right)^{\lambda l - 1} + C_2 \left(\frac{z}{e}\right)^{-\lambda l - 1} + \frac{l^2 A}{\lambda^2 l^2 - 1}. \qquad (68)$$

Произвольные постоянные определяются из граничных условий. Если торцовое сечение $z = l_1$ свободное, то

$$f(l_1) = 1. \qquad (69)$$

Если торцовое сечение $z = l$ жестко заделано, то, применяя естественное граничное условие $[F_f{}']_{z=l} = 0$, получим

$$f'(l) + \frac{f(l)}{l} = 0. \qquad (70)$$

После определения функции (68) по формуле (60) находим значения продольных усилий.

ЛИТЕРАТУРА

1. Климов В. И. Термоупругие гибкие пластины. Прочность и устойчивость тонкостенных авиационных конструкций. Труды МАИ, вып. 180, 1971.

2. Климов В. И. Цилиндрические тонкостенные конструкции открытого профиля с переменными параметрами упругости при неравномерном нагреве. ИВУЗ, «Авиационная техника», № 4, 1967.

3. Климов В. И. Конические тонкостенные конструкции открытого профиля с переменными параметрами упругости при неравномерном нагреве. Труды КуАИ, вып. 39, 1968.