

Б. А. Горлач

### ФИЗИЧЕСКИ НЕЛИНЕЙНЫЕ СООТНОШЕНИЯ ТЕОРИИ ОСЕСИММЕТРИЧНО НАГРУЖЕННЫХ ОБОЛОЧЕК ВРАЩЕНИЯ С УЧЕТОМ СЖИМАЕМОСТИ МАТЕРИАЛА

В работе на основе деформационной теории пластичности получены выражения для определения напряжений, усилий и моментов в осесимметрично нагруженных оболочках вращения с учетом изменения коэффициента поперечной деформации в процессе нагружения.

1. Для получения физических соотношений применительно к оболочкам, материал которых работает за пределами упругости, воспользуемся деформационной теорией, в основу которой положены три гипотезы [1]:

а) средняя деформация  $e_0$  на всем диапазоне нагружения пропорциональна среднему напряжению  $\sigma_0$ ;

б) интенсивность напряжений является вполне определенной, не зависящей от типа напряженного состояния функцией интенсивности деформаций;

в) девиаторы напряжений и деформаций пропорциональны.

Следуя первой гипотезе, запишем:

$$\sigma_0 = 3Ke_0, \quad (1)$$

Здесь  $K$  — объемный модуль упругости.

Для осесимметрично нагруженных оболочек вращения

$$\sigma_0 = \frac{1}{3}(\sigma_x + \sigma_y), \quad e_0 = \frac{1}{3}(\varepsilon_x + \varepsilon_y + \varepsilon_z),$$

где  $\sigma_x, \sigma_y$  — нормальные напряжения в произвольной точке оболочки;

$\varepsilon_x, \varepsilon_y, \varepsilon_z$  — относительные удлинения оболочки на расстоянии  $z$  от срединной поверхности;

$x, y, z$  — прямоугольные координаты (начало координат на срединной поверхности оболочки, положительное направление оси  $z$  совпадает с направлением внешней нормали).

Объемный модуль упругости  $K$  можно определить из следующих соотношений теории упругости:

$$K = \frac{E}{3(1-2\mu)} = \frac{2(1+\mu)}{3(1-2\mu)} G = \frac{EG}{3(3G-E)}.$$

Здесь  $E$ ,  $G$  — модули упругости и сдвига,  $\mu$  — коэффициент Пуассона.

Зависимость (1) хорошо согласуется с опытами Бриджмена [1], установившего, что модуль  $K$  мало зависит от величины деформаций.

Согласно второй гипотезе, представим зависимость между интенсивностью напряжений

$$\sigma_i = \sqrt{\sigma_x^2 + \sigma_y^2} = \sigma_x \sigma_y.$$

и интенсивностью деформаций

$$e_i = \frac{\sqrt{2}}{3} \sqrt{(\varepsilon_x - \varepsilon_y)^2 + (\varepsilon_y - \varepsilon_z)^2 + (\varepsilon_z - \varepsilon_x)^2}$$

таким виде [1]:

$$\frac{\sigma_i}{e_i} = 3G [1 - \omega(e_i)]. \quad (2)$$

Здесь  $\omega(e_i)$  — функция А. А. Ильюшина.

Третья гипотеза позволяет записать три уравнения, связывающие компоненты напряжений и деформаций:

$$\sigma_x = 3Ke_0 + \frac{2\sigma_i}{3e_i} (\varepsilon_x - e_0), \quad (3)$$

$$\sigma_y = 3Ke_0 + \frac{2\sigma_i}{3e_i} (\varepsilon_y - e_0), \quad (4)$$

$$0 = 3Ke_0 + \frac{2\sigma_i}{3e_i} (\varepsilon_z - e_0). \quad (5)$$

Решая уравнение (5) относительно  $\varepsilon_z$ , найдем:

$$\varepsilon_z = A(\varepsilon_x + \varepsilon_y), \quad (6)$$

где

$$A = \frac{\frac{2}{9} \frac{\sigma_i}{e_i} - K}{K + \frac{4}{9} \frac{\sigma_i}{e_i}}.$$

Сокращая числитель и знаменатель последнего выражения на

$$K = \frac{2(1+\mu)}{3(1-2\mu)} G \quad (7)$$

и имея в виду (2), запишем:

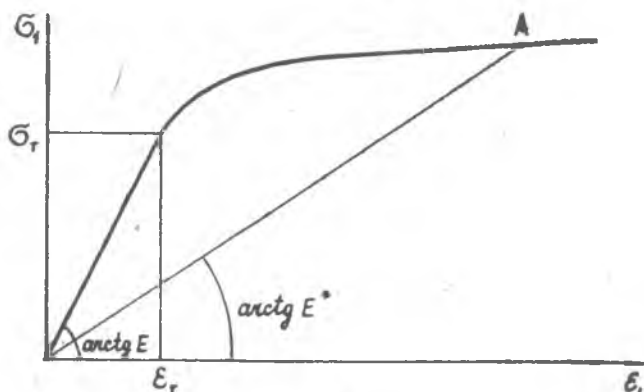
$$A = \frac{(1-2\mu)(1-\omega) - (1+\mu)}{(1+\mu) + 2(1-2\mu)(1-\omega)}.$$

Подставляя теперь (6) в выражения (3) и (4) с учетом (2) получим

$$\sigma_x = \frac{2G(1-\omega)}{1-p} (\varepsilon_x + p\varepsilon_y), \quad (8)$$

$$\sigma_y = \frac{2G(1-\omega)}{1-p} (\varepsilon_y + p\varepsilon_x), \quad (9)$$

$$p = \frac{(1+\mu) - (1-2\mu)(1-\omega)}{2(1+\mu) + (1-2\mu)(1-\omega)}. \quad (10)$$



Фиг. 1.

2. Следуя [3], коэффициент поперечной деформации  $\mu^*$  найдем из выражения

$$\mu^* = \frac{1}{2} \left( 1 - \frac{1-2\mu}{E} \frac{\sigma_1}{\varepsilon_1} \right) = \frac{1}{2} \left( 1 - \frac{E^*}{3K} \right). \quad (11)$$

$E^*$  определяется по диаграмме растяжения образца  $\sigma_1(\varepsilon_1)$  (фиг. 1).

Покажем, что функция  $p$ , определяемая формулой (10), совпадает с коэффициентом  $\mu^*$ . Для этого перейдем от диаграммы растяжения  $\sigma_1(\varepsilon_1)$  к диаграмме деформирования  $\sigma_i(e_i)$  (фиг. 2), согласно выражениям [1]:

$$\sigma_i = \sigma_1, \quad e_i = \frac{2(1+\mu^*)}{3} \varepsilon_1.$$

Отсюда

$$\frac{\sigma_1}{\varepsilon_1} = E^* = \frac{\sigma_i}{e_i} \frac{2(1+\mu^*)}{3}$$

или

$$\frac{\sigma_i}{e_i} = \frac{3E^*}{2(1+\mu^*)}.$$

Сравнивая это выражение с (2), запишем

$$3G(1-\omega) = \frac{3E^*}{2(1+\mu^*)}. \quad (12)$$

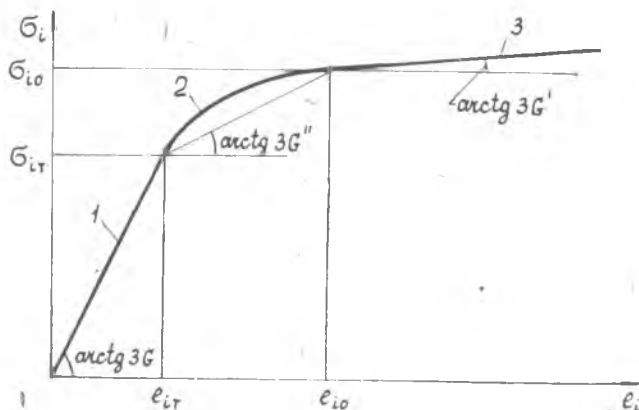
Имея в виду, что  $E^* = 3K(1 - 2\mu^*)$  и учитывая равенство (7), из (12) получаем

$$1 - \omega = \frac{(1 + \mu)(1 - 2\mu^*)}{(1 + \mu^*)(1 - 2\mu)}.$$

Подставляя это выражение в (10), убедимся, что

$$\rho = \mu^*.$$

Следовательно,  $\rho$  представляет собой переменный коэффициент поперечной деформации, определяемый формулой (11).



Фиг. 2.

Теперь, используя гипотезу Кирхгофа

$$\varepsilon_x = \varepsilon_1 + x_1 z, \quad \varepsilon_y = \varepsilon_2 + x_2 z$$

( $\varepsilon_1, \varepsilon_2$  — относительные удлинения срединной поверхности оболочки;  $x_1, x_2$  — изменения главных кривизн), формулы для определения напряжений запишем в виде

$$\sigma_x = \frac{2G(1 - \bar{\omega})}{1 - \mu} [\varepsilon_1 + \mu\varepsilon_2 + (x_1 + \mu x_2)z + \mu\Omega(\varepsilon_2 + x_2 z)], \quad (13)$$

$$\sigma_y = \frac{2G(1 - \bar{\omega})}{1 - \mu} [\varepsilon_2 + \mu\varepsilon_1 + (x_2 + \mu x_1)z + \mu\Omega(\varepsilon_1 + x_1 z)]. \quad (14)$$

Здесь введены обозначения:

$$\bar{\omega} = 1 - \frac{(1 - \mu)(1 - \omega)}{1 - \mu^*},$$

$$\Omega = \frac{\mu^*}{\mu} - 1.$$

3. Нормальные усилия  $N_1, N_2$  и изгибающие моменты  $M_1, M_2$  в оболочке определяются формулами:

$$N_1 = \int_{-\delta/2}^{\delta/2} \sigma_x dz, \quad N_2 = \int_{-\delta/2}^{\delta/2} \sigma_y dz,$$

$$M_1 = \int_{-\delta/2}^{\delta/2} \sigma_x z dz, \quad M_2 = \int_{-\delta/2}^{\delta/2} \sigma_y z dz,$$

где  $\delta$  — толщина оболочки.

Производя интегрирование этих выражений с учетом (13) и (14), после несложных преобразований получим

$$N_k = \frac{2G\delta}{1-\mu} (\varepsilon_k + \mu\varepsilon_l - \alpha_k),$$

$$M_k = \frac{G\delta^3}{1-\mu} \left( \chi_k + \mu\chi_l - \frac{1}{\delta} \eta_k \right),$$

где

$$\alpha_k = \frac{1}{2} \left[ \varphi_0 (\varepsilon_k + \mu\varepsilon_l) + \frac{\varphi_1 \delta}{2} (\chi_k + \mu\chi_l) + \mu \left( \varepsilon_l \psi_0 + \frac{\psi_1 \delta}{2} \chi_l \right) \right],$$

$$\eta_k = 3 \left[ \varphi_1 (\varepsilon_k + \mu\varepsilon_l) + \frac{\varphi_2 \delta}{2} (\chi_k + \mu\chi_l) + \mu \left( \varepsilon_l \psi_1 + \frac{\psi_2 \delta}{2} \chi_l \right) \right],$$

$$k = 1, 2, \quad l = 2, 1, \quad k \neq l.$$

$$\varphi_n = \int_{-1}^1 \bar{\omega} t^n dt, \quad \psi_n = \int_{-1}^1 \Omega (1 - \bar{\omega}) t^n dt,$$

$$t = \frac{z}{\delta/2}, \quad n = 0, 1, 2.$$

Напряжения на верхней и нижней поверхностях оболочки определяются по формуле:

$$\sigma_k \left( \pm \frac{\delta}{2} \right) = \frac{2G}{1-\mu} \left[ 1 - \bar{\omega} \left( \pm \frac{\delta}{2} \right) \right] \left\{ \varepsilon_k + \mu^* \left( \pm \frac{\delta}{2} \right) \varepsilon_l \pm \right.$$

$$\left. \pm \frac{\delta}{2} \left[ \chi_k + \mu^* \left( \pm \frac{\delta}{2} \right) \chi_l \right] \right\}.$$

4. При выводе приведенных выше формул на вид диаграммы  $\sigma_1(e_i)$ , которую можно легко построить по известной зависимости  $\sigma_1(e_1)$  [2], не накладывалось никаких ограничений. Однако на практике при вычислении функций  $\omega, \bar{\omega}, \Omega$  необходимо задаваться конкретной зависимостью  $\sigma_1(e_1)$ , соответствующей реальному материалу. Для широкого круга конструкционных материалов эту зависимость можно с достаточной точностью аппроксимировать диаграммой с тремя участками (фиг. 2). В этом случае функция А. А. Ильюшина  $\omega$  может быть вычислена следующим образом [4]:

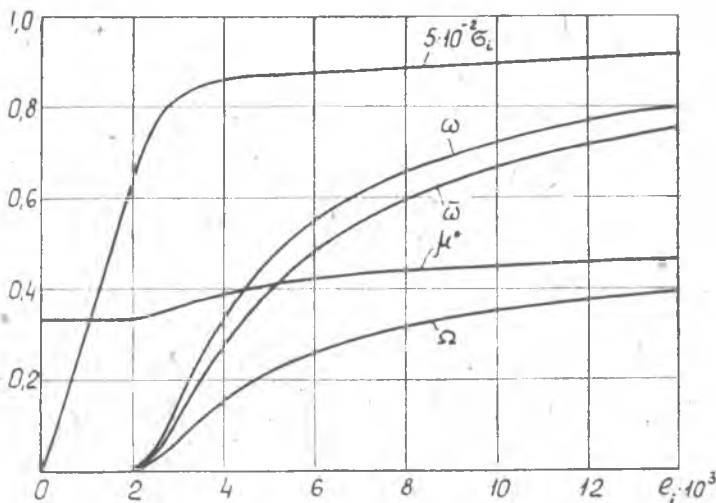
$$\omega = \frac{1}{2} [1 + q(e_{i0})] \left( a - \frac{b}{e_i} \right) + \frac{1}{4} [1 + q(e_{i\tau})] [1 - q(e_{i0})] \frac{c}{e_i} (e_{i0} - e_i)^y.$$

Здесь

$$q(e) = \text{sign}(e_i - e),$$

$$a = 1 - \frac{G'}{G}, \quad b = \frac{\sigma_{i0} - 3G'e_{i0}}{3G}, \quad c = \frac{G'' - G'}{G(e_{i0} - e_{iT})^{\nu-1}},$$

$$G'' = \frac{\sigma_{i0} - \sigma_{iT}}{3(e_{i0} - e_{iT})}, \quad \nu = \frac{G - G'}{G'' - G'}.$$



Фиг. 3.

Интенсивность деформаций  $e_i$  для оболочек определяется из выражения

$$e_i = \sqrt{\gamma_0 + \gamma_1 t + \gamma_2 t^2},$$

где

$$\gamma_0 = \lambda [\dot{\epsilon}_1^2 + \beta \epsilon_1 \epsilon_2 + \epsilon_2^2],$$

$$\gamma_1 = \delta \lambda \left[ \epsilon_1 x_1 + \frac{\beta}{2} (\epsilon_1 x_2 + \epsilon_2 x_1) + \epsilon_2 x_2 \right],$$

$$\gamma_2 = \frac{\delta^2 \lambda}{4} [x_1^2 + \beta x_1 x_2 + x_2^2],$$

$$\lambda = \frac{4(1 - \mu^* + \mu^{*2})}{9(1 - \mu^*)^2}, \quad \beta = 2 - \frac{3}{4\lambda}.$$

На фиг. 3 приведены графики функций  $\omega(e_i)$ ,  $\bar{\omega}(e_i)$ ,  $\Omega(e_i)$ ,  $\mu^*(e_i)$ , построенные для некоторого материала с известной зависимостью  $\sigma_i(e_i)$ .

## ЛИТЕРАТУРА

1. А. А. Ильюшин. Пластичность, Гостехиздат, 1948.
2. С. Д. Пономарев и др. Расчеты на прочность в машиностроении т. 2, Машгиз, 1959.
3. Н. Н. Малинин. Прикладная теория пластичности и ползучести. Машгиз, 1968.
4. И. С. Ахмедьянов. Малые упруго-пластические деформации сферической оболочки при осесимметричном нагружении. Сб. «Вопросы прочности элементов авиационных конструкций». Труды КуАИ, в. 39, 1968.