КУЙБЫШЕВСКИЙ АВИАЦИОННЫЙ ИНСТИТУТ им. С. П. КОРОЛЕВА
Труды, выпуск XXIX, 1967 г.
Вопросы прочности элементов авиационных конструкций

М. Н. ШАФЕЕВ

ДВОЙНЫЕ А-ИНТЕГРАЛЫ КОШИ (общего вида) И ПУАССОНА

В работе [1] нами рассмотрено представление аналитической функции

$$f(z_1, z_2) = Ц(r_1, \varphi_1;\ r_2, \varphi_2) + iV(r_1, \varphi_1;\ r_2, \varphi_2),$$

$$z_к = r_к e^{i\varphi_k},\ 0 \leqslant r_к < R_к,\ (k = 1, 2),$$

одного класса по ее С-угловым граничным значениям с помощью двойного А-интеграла Коши.

В настоящей работе результаты этой работы распространим для более общего случая и рассмотрим представление одного класса функций, бигармонических (по А. Пуанкаре) в бицилиндре

$$E_R\{\ |z_к| < R_к;\ k = 1,\ 2\},$$

с помощью двойного А-интеграла Пуассона.

Пусть $f(p) = f(\alpha_1, \alpha_2)$ — действительная функция действительных переменных α_1 и α_2, имеющая период 2π как по α_1, так и по α_2, суммируемая на двойном сегменте $\Delta_0 = [0{,}2\pi,\ 0{,}2\pi]$. Как и в работе [2] можно показать, что функция

$$Ц(r_1, \varphi_1;\ r_2, \varphi_2) = \frac{1}{4\pi^2} \iint\limits_{\Delta_0} f(p) \cdot H(z, \zeta)\, d\Delta, \qquad (1)$$

где

$$H(z, \zeta) = \prod_{k=1}^{2} p(z_к, \zeta_к) - \prod_{k=1}^{2} Q(z_к, \zeta_к) + P(z_1, \zeta_1) + P(z_2, \zeta_2),$$

$$p(z, \zeta) = \frac{R^2 - r^2}{R^2 + r^2 - 2rR\cos(\alpha - \varphi)},\quad Q(z, \zeta) = \frac{2rR\sin(\alpha - \varphi)}{R^2 + r^2 - 2r\ R\cos(\alpha - \varphi)},$$

$$\zeta_к = Re^{i\alpha_k},\ z_к = r_к e^{i\varphi_k},\ 0 \leqslant r_к < R_к (k = 1, 2),$$

является бигармонической (по А. Пуанкаре) в бицилиндре E_R.

Функция $V(r_1;\ \varphi_1;\ r_2,\ \varphi_2)$ — бигармонически сопряженная с $U(r_1, \varphi_1; r_2, \varphi_2)$ выражается так:

$$V(r_1, \varphi_1;\ r_2,\ \varphi_2) = \frac{1}{4\pi^2} \iint\limits_{\Delta_0} f(p) \cdot S(z, \zeta)\, d\Delta, \tag{2}$$

где

$$S(z_2 \zeta) = [1 + p(z_1, \zeta_1)] \cdot Q(z_2,\ \zeta_2) + [1 + p(z_2, \zeta_2)] \cdot Q(z_1, \zeta_1).$$

Определение 1: Функцию $f(x_1, x_2)$ назовем дважды A-интегрируемой на двойном сегменте $\Delta' = [a_1, b_1;\ a_2, b_2]$, если

1.

$$mE\{\,|\, f(x_1, x_2) \,|\, > n\} = 0\left(\frac{1}{n}\right);$$

2. существует конечный предел

$$\lim_{n \to \infty} \iint\limits_{\Delta'} [f(x_1, x_2)]_n d_\Delta = I,$$

где

$$[f(x_1, x_2)]_n = \begin{cases} f(x_1,\ x_2) & \text{при } |\, f(x_1,\ x_2) \,| \leqslant n, \\ 0 & \text{при } |\, f(x_1, x_2) \,| > n. \end{cases}$$

Число I назовем двойным A-интегралом функции $f(x_1,\ x_2)$ по двойному сегменту Δ':

$$(A) \iint\limits_{\Delta'} f(x_1,\ x_2)\, d\Delta = I.$$

Нетрудно доказать, что функция $f(x_1,\ x_2)$ дважды A-интегрируемая на Δ', A-интегрируема по каждой из переменных на данном сегменте для почти каждого значения другой переменной на соответствующем сегменте.

Определение 2: Будем говорить, что функция $F(z_1, z_2)$, заданная в E_R, имеет C-угловое граничное значение в точке $\zeta = (\zeta_1 \zeta_2) \in L_R = \{\,|\,\zeta_к\,|\, = R_к;\ \ k = 1,\ 2\}$, если она стремится к определенному пределу, когда точка $z = (z_1,\ z_2) \in E_R$ стремится изнутри этого бицилиндра к точке $\zeta \in L_R$ подчиняясь условию

$$\prod_{k=1}^{2} \frac{|\,\zeta_к - z_к\,|}{|\,\zeta_к\,| - |\,z_к\,|} < \text{const}.$$

Теорема 1. Пусть в бицилиндре E_R задана функция

$$F(z_1,\ z_2) = U(r_1, \varphi_1;\ \ r_2, \varphi_2) + iV(r_1, \varphi_1; r_2, \varphi_2), \tag{3}$$

где $U(r_1, \varphi_1;\ r_2,\ \varphi_2)$ и $V(r_1, \varphi_1;\ \ r_2, \varphi_2)$ соответственно, определены по формулам (1) и (2).

Тогда

$$F(z_1, z_2) = -\frac{1}{4\pi^2} \iint\limits_{L_R} \left\{ \frac{F(\zeta_1,\ \zeta_2)}{(\zeta_1 - z_1) \cdot (\zeta_2 - z_2)} + \frac{f_1(\zeta_1, \zeta_2) + i\overline{f_1^{(1)}(\zeta_1,\ \zeta_2)}}{\zeta_2(\zeta_1 - z_1)} + \right.$$

$$\left. + \frac{f_1(\zeta_1, \zeta_2) + i\overline{f^{(2)}(\zeta_1, \zeta_2)}}{\zeta_1(\zeta_2 - z_2)} \right\} d\zeta_1 d\zeta_2, \tag{4}$$

где

$$F(\zeta_1, \zeta_2) = f_1(\zeta_1, \zeta_2) - \overline{f_1(\zeta_1, \zeta_2)} + i\,[\overline{f_1^{(1)}(\zeta_1, \zeta_2)} + \\ + \overline{f_1^{(2)}(\zeta_1, \zeta_2)}],$$

$$f_1(\zeta_1, \zeta_2) \equiv f(\alpha_1, \alpha_2), \text{ а } \overline{f(\alpha_1, \alpha_2)}, \quad \overline{f^{(1)}(\alpha_1, \alpha_2)}$$

$\overline{f^{(2)}(\alpha_1, \alpha_2)}$ — функции, сопряженные с $f(\alpha_1, \alpha_2)$, соответственно, по совокупности, переменных α_1 и α_2, по переменному α_1 и по переменному α_2.

Доказательство: При фиксированных $r_к$ и $\varphi_к$ $(k = 1, 2)$, сопряжены друг к другу в смысле функций действительных переменных α_1 и α_2 [3]:

$$\overline{P(z_к, \zeta_к)} = Q(z_к, \zeta_к),$$

$$\overline{Q(z_к, \zeta_к)} = 1 - P(z_к, \zeta_к),$$

$$\prod_{k=1}^{2} \overline{P(z_к, \zeta_к)} = \prod_{k=1}^{2} Q(z_к, \zeta_к),$$

$$\prod_{k=1}^{2} \overline{Q(z_к, \zeta_к)} = \prod_{k=1}^{2} [1 - P(z_к, \zeta_к)].$$

Поэтому, используя лемму в работе [1], будем иметь:

$$\iint_{\Delta_0} f(p) \cdot \prod_{k=1}^{2} Q(z_к, \zeta_к)\, d\Delta = (A) \iint_{\Delta_0} \overline{f(p)} \cdot \prod_{k=1}^{2} P(z_к, \zeta_к)\, d\Delta,$$

$$\iint_{\Delta_0} f(p) \cdot S(z, \zeta) = (A) \iint_{\Delta_0} \{\overline{f^{(2)}(p)}\,[1 + P(z_1, \zeta_1)] \cdot P(z_2, \zeta_2) + \\ + \overline{f^{(1)}(p)} \cdot [1 + P(z_2, \zeta_2)] \cdot P(z_1, \zeta_1)\}\, d\Delta = \\ = (A) \iint_{\Delta_0} \Big\{[\overline{f^{(1)}(p)} + \overline{f^{(2)}(p)}] \cdot \prod_{k=1}^{2} P(z_к, \zeta_к) + \\ + \overline{f^{(1)}(p)} \cdot P(z_1, \zeta_1) + \overline{f^{(2)}(p)}\, P(z_2, \zeta_2)\Big\}\, d\Delta.$$

Следовательно,

$$F(z_1, z_2) = \frac{1}{4\pi^2} \iint_{\Delta_0} \Big\{ \psi(p) \prod_{k=1}^{2} P(z_к, \zeta_к) + \sum_{k=1}^{2} [f(p) + \\ + \overline{if^{(k)}(p)}] \cdot P(z_к, \zeta_к)\Big\}\, d\Delta, \tag{5}$$

где

$$\psi(P) = f(p) - \overline{f(p)} + i\,[\overline{f^{(1)}(p)} + \overline{f^{(2)}(p)}].$$

По лемме работы [1] справедливы соотношения:

$$(A) \iint_{\Delta_0} \overline{f(P)} \cdot \lambda(q, \alpha, \varphi)\, d\Delta = -\iint_{\Delta_0} f(p)\, \lambda(q, \alpha, \varphi)\, d\Delta,$$

$$(A)\iint\limits_{\Delta_0}\overline{f(p)}\,\lambda^{(1)}(q,\alpha,\varphi)\,d\Delta=\iint\limits_{\Delta_0}f(p)\,\lambda^{(2)}(q,\alpha,\varphi)\,d\Delta,$$

$$(A)\iint\limits_{\Delta_0}\overline{f(p)}\,\lambda^{(2)}(q,\alpha,\varphi)\,d\Delta=\iint\limits_{\Delta_0}f(p)\,\lambda^{(1)}(q,\alpha,\varphi)\,d\Delta,$$

$$(A)\iint\limits_{\Delta_0}\overline{f^{(k)}(p)}\,\lambda(q_к,\alpha_к,\varphi_к)\,d\Delta=i\iint\limits_{\Delta_0}f(p)\,\lambda(q_к,\alpha_к,\varphi_к)\,d\Delta,$$

$$(A)\iint\limits_{\Delta_0}\overline{f^{(1)}(p)}\cdot\lambda^{(k)}(q,\alpha,\varphi)\,d\Delta=i\iint\limits_{\Delta_0}f(p)\,\lambda^{(k)}(q,\alpha,\varphi)\,d\Delta,$$

$$(A)\iint\limits_{\Delta_0}\overline{f^{(1)}(p)}\,\lambda^{(2)}(q,\alpha,\varphi)\,d\Delta=-i\iint\limits_{\Delta_0}f(p)\lambda^{(2)}(q,\alpha,\varphi)\,d\Delta,$$

$$(A)\iint\limits_{\Delta_0}\overline{f^{(2)}(p)}\,\lambda^{(1)}(q,\alpha,\varphi)\,d\Delta=-i\iint\limits_{\Delta_0}f(p)\,\lambda^{(1)}(q,\alpha,\varphi)\,d\Delta,$$

$$(A)\iint\limits_{\Delta_0}\overline{f^{(1)}(p)}\,\lambda(q_2,\alpha_2,\varphi_2)\,d\Delta=-i(A)\iint\limits_{\Delta_0}\overline{f(p)}\,\lambda(q_2,\alpha_2,\varphi_2)\,d\Delta,$$

$$(A)\iint\limits_{\Delta_0}\overline{f^{(2)}(p)}\,\lambda(q_1,\alpha_1,\varphi_1)\,d\Delta=-i(A)\iint\limits_{\Delta_0}\overline{f(p)}\,\lambda(q_1,\alpha_1\,\varphi_1)\,d\Delta,$$

где

$$\lambda(q_1,\alpha_1,\varphi_1)=\sum_{m=1}^{\infty}q_1^m\,e^{im(\alpha_1-\varphi_1)},$$

$$\lambda(q_2,\alpha_2,\varphi_2)=\sum_{n=1}^{\infty}q_2^n\,e^{in(\alpha_2-\varphi_2)},$$

$$\lambda^{(1)}(q_1,\alpha_1,\varphi_1)=\sum_{m=0}^{\infty}q_1^m\,e^{im(\varphi_1-\alpha_1)},$$

$$\lambda^{(2)}(q_2,\alpha_2,\varphi_2)=\sum_{n=1}^{\infty}q_2^n\,e^{in(\varphi_2-\alpha_1)},$$

$$\lambda^{(1)}(q,\alpha,\varphi)=\lambda(q_1,\alpha_1,\varphi_1)\cdot\lambda^{(2)}(q_2,\alpha_2,\varphi_2).$$

$$\lambda^{(2)}(q,\alpha,\varphi)=\lambda(q_2,\alpha_2,\varphi_2)\cdot\lambda^{(1)}(q_1,\alpha_1,\varphi_1).$$

$$\lambda(q,\alpha,\varphi)=\prod_{k=1}^{2}\lambda(q_к,\alpha_к,\varphi_к),\quad q_к=\frac{r_к}{R_к},\quad(k=1,2).$$

Таким образом:

$$\frac{1}{4\pi^2}(A)\iint\limits_{\Delta_0}\Big\{\psi(p)\cdot\Bigg[\prod_{k=1}^{2}\frac{q_кe^{i(\alpha_к-\varphi_к)}}{1-q_кe^{i(\alpha_к-\varphi_к)}}+\frac{q_1e^{i(\alpha_1-\varphi_1)}}{[1-q_1e^{i(\alpha_1-\varphi_1)}]\cdot[1-q_2e^{i(\varphi_2-\alpha_2)}]}+$$

$$+\frac{q_2\,e^{i(\alpha_2-\varphi_2)}}{[1-q_2e^{i(\alpha_2-\varphi_2)}]\cdot[1-q_1\,e^{i(\varphi_1-\alpha_1)}]}\Bigg]+$$

$$+\sum_{k=1}^{2}[f(p)+i\overline{f^{(k)}(p)}]\cdot\frac{q_\kappa e^{i(\alpha_\kappa-\varphi_\kappa)}}{1-q_\kappa e^{i(\alpha_\kappa-\varphi_\kappa)}}\Bigg\}\,d\Delta= \qquad (6)$$

$$=\frac{1}{4\pi^2}(A)\iint_{\Delta_0}\Big\{\psi(p)\cdot\Big[\lambda(q,\alpha,\varphi)+\sum_{k=1}^{2}(\lambda^{(k)}(q,\alpha,\varphi)+$$

$$+\lambda(q_\kappa,\alpha_\kappa,\varphi_\kappa)\Big]+\sum_{n=1}^{2}[f(p)+i\overline{f^{(k)}(p)}]\cdot\lambda(q_\kappa,\alpha_\kappa,\varphi_\kappa)\Big\}\,d\Delta=0.$$

Из формул (5) и (6) получаем

$$F(z_1,z_2)=\frac{1}{4\pi^2}(A)\iint_{\Delta_0}\psi(p)\cdot\Big\{\prod_{k=1}^{2}P(z_\kappa,\zeta_\kappa)-\prod_{k=1}^{2}\frac{q_\kappa e^{i(\alpha_\kappa-\varphi_\kappa)}}{1-q_\kappa e^{i(\alpha_\kappa-\varphi_\kappa)}}+$$

$$+\frac{q_1 e^{i(\alpha_1-\varphi_1)}}{[1-q_1 e^{i(\alpha_1-\varphi_1)}]\cdot[1-q_2 e^{i(\varphi_2-\alpha_2)}]}+\frac{q_2 e^{i(\alpha_2-\varphi_2)}}{[1-q_2 e^{i(\alpha_2-\varphi_2)}]\cdot[1-q_1 e^{i(\varphi_1-\alpha_1)}]}\Big\}\,d\Delta+$$

$$+\frac{1}{4\pi^2}(A)\iint_{\Delta_0}\sum_{k=1}^{2}[f(p)+\overline{if^{(k)}}f(p)]\cdot\Big\{P(z_\kappa,\zeta_\kappa)-$$

$$-\frac{q_\kappa e^{i(\alpha_\kappa-\varphi_\kappa)}}{1-q_\kappa e^{i(\alpha_\kappa-\varphi_\kappa)}}\Big\}\,d\Delta=\frac{1}{4\pi^2}(A)\iint_{\Delta_0}\Big\{\psi(p)\cdot\prod_{k=1}^{2}\frac{d\alpha_\kappa}{1-q_\kappa e^{i(\varphi_\kappa-\alpha_\kappa)}}+$$

$$+\sum_{k=1}^{2}[f(p)+\overline{i f^{(k)}(p)}]\cdot\frac{d\alpha_\kappa}{1-q_\kappa e^{i(\varphi_\kappa-\alpha_\kappa)}}\Big\}=$$

$$=-\frac{1}{4\pi^2}(A)\iint_{E_R}\Big\{F(\zeta_1,\zeta_2)\cdot\prod_{k=1}^{2}\frac{d\zeta_\kappa}{\zeta_\kappa-z_\kappa}+$$

$$+\left[\frac{f_1(\zeta_1,\zeta_2)+i\overline{f_1^{(1)}(\zeta_1,\zeta_2)}}{\zeta_2(\zeta_1-z_1)}+\frac{f_1(\zeta_1,\zeta_2)+i\overline{f_1^{(2)}(\zeta_1,\zeta_2)}}{\zeta_1(\zeta_2-z_2)}\right]d\zeta_1\,d\zeta_2\Big\}.$$

Из процесса доказательства первой теоремы непосредственно следует справедливость следующего утверждения:

Теорема 2. Функция $Ц(r_1,\varphi_1;\ r_2,\varphi_2)=$

$$=\frac{1}{4\pi^2}\iint_{\Delta_0}f(P)\cdot\Big[\prod_{k=1}^{2}P(z_\kappa,\zeta_\kappa)-\prod_{k=1}^{2}Q(z_\kappa,\zeta_\kappa)\Big]\,d\Delta,$$

бигармоническая (по А. Пуанкаре) в бицилиндре E_R [2], представима там двойным A — интегралом Пуассона:

$$Ц(r_1,\varphi_1;\ r_2,\varphi_2)=\frac{1}{4\pi^2}(A)\iint_{\Delta_0}[f(p)-\overline{f(p)}]\cdot\prod_{k=1}^{2}P(z_\kappa,\zeta_\kappa)\,d\Delta,$$

а бигармонически сопряженная ей функция $V(r_1,\varphi_1,\ r_2,f_2)$ представима в E_R в виде:

$$V(r_1,\varphi_1;\ r_2,\varphi_2)=\frac{1}{4\pi^2}(A)\iint_{\Delta_0}\Big[\overline{f^{(1)}(p)}+\overline{f^{(2)}(P)}\Big]\cdot\prod_{k=1}^{2}P(z_\kappa,\zeta_\kappa)\,d\Delta,$$

где $f(p) - \overline{f(p)}$ и $\overline{f^{(1)}(p)} + \overline{f^{(2)}(p)}$ являются, соответственно, C — угловыми граничными значениями функции $Ц(r_1, \varphi_1; r_2, \varphi_2)$ и $V(r_1, \varphi_1; r_2, \varphi_2)$ на L_R.

Теорема 3. Всякая аналитическая функция, представимая в бицилиндре E_R в виде двойного L — интеграла типа Коши:

$$\frac{1}{4\pi^2}\iint\limits_{L_R} \frac{\Phi(\alpha_1, \alpha_2)}{(\zeta_1 - z_1)\cdot(\zeta_2 - z_2)}\, d\zeta_1 d\zeta_2, \tag{7}$$

где

$$\Phi(\alpha_1, \alpha_2) = \Phi_1(\alpha_1, \alpha_2) + i\Phi_2(\alpha_1, \alpha_2);$$

$\Phi_1(\alpha_1, \alpha_2)$ и $\Phi_2(\alpha_1, \alpha_2)$ — действительные функции периода 2π по каждой из действительных переменных α_1 и α_2, суммируемые на Δ_0, представима в виде двойного A — интеграла Коши (общего вида) (4),

Доказательство. Рассмотрим —

$$-\frac{1}{4\pi^2}\iint\limits_{L_R} \frac{\Phi(\alpha_1, \alpha_2)}{(\zeta_1 - z_1)\cdot(\zeta_2 - z_2)}\, d\zeta_1 d\zeta_2 =$$

$$= \frac{1}{4\pi^2}\iint\limits_{\Delta_0} \left[\Phi_1(\alpha_1, \alpha_2) + i\Phi_2(\alpha_1, \alpha_2)\right] \cdot \prod_{\kappa=1}^{2} \frac{R_\kappa e^{i\alpha_\kappa}}{R_\kappa e^{i\alpha_\kappa} - r_\kappa e^{i\varphi_\kappa}}\, d\Delta =$$

$$= \frac{1}{4\pi^2}\iint\limits_{\Delta_0} \left[\Phi_1(\alpha_1, \alpha_2) + i\Phi_2(\alpha_1, \alpha_2)\right]\cdot\lambda(q, \alpha, \varphi)\, d\Delta =$$

$$= F_1(z_1, z_2) + iF_2(z_1, z_2),$$

где

$$F_\kappa(z_1, z_2) = \frac{1}{4}\Big\{ -a^{(k)}_{0,0} + \sum_{m=0}^{\infty}\sum_{n=0}^{\infty} q_1^m q_2^n \cdot [A^{(k)}_{m,n}\cos(m\varphi_1 + n\varphi_2) -$$

$$- B^{(k)}_{m,n}\sin(m\varphi_1 + n\varphi_2)] + i\sum_{m=0}^{\infty}\sum_{n=0}^{\infty} q_1^m q_2^n \cdot [B^{(k)}_{m,n}\cos(m\varphi_1 + n\varphi_2) +$$

$$+ A^{(k)}_{m,n}\sin(m\varphi_1 + n\varphi_2)] + \sum_{m=0}^{\infty} q_1^m \cdot [A^{(k)}_{m,0}\cos m\varphi_1 -$$

$$- B^{(k)}_{m,0}\sin m\varphi_1] + \sum_{n=0}^{\infty} q_2^n \cdot [A^{(k)}_{0,n}\cos n\varphi_2 -$$

$$- B^{(k)}_{0,n}\sin n\varphi_2] + i\sum_{m=0}^{\infty} q_1^m \cdot [B^{(k)}_{m,0}\cos m\varphi_1 +$$

$$+ A^{(k)}_{m,0}\sin m\varphi_1] + i\sum_{n=0}^{\infty} q_2^n \cdot [B^{(k)}_{0,n}\cos n\varphi_2 + A^{(k)}_{0,n}\sin n\varphi_2]\Big\},$$

$$A^{(k)}_{m,n} = a^{(k)}_{m,n} - d^{(k)}_{m,n}, \quad -B^{(k)}_{m,n} = b^{(k)}_{m,n} + c^{(k)}_{m,n},$$

$$a^{(k)}_{m,n}, \quad b^{(k)}_{m,n}, \quad d^{(k)}_{m,n}, \quad c^{(k)}_{m,n},$$

$$a^{(k)}_{0,0},\ a^{(k)}_{m,0} = A^{(k)}_{m,0},\ a^{(k)}_{0,n} = A^{(k)}_{0,n},$$
$$C^{(k)}_{m,0} = -B^{(k)}_{m,0},\ b^{(k)}_{0,n} = -B^{(k)}_{0,n},$$
$$(k=1,2;\ m,\ n = 1, 2, 3, \ldots)$$

являются коэффициентами Фурье, соответственно функции $\Phi_1(\alpha_1, \alpha_2)$ и $\Phi_2(\alpha_1, \alpha_2)$. Здесь $F_1(z_1 z_2)$ и $F_2(z_1, z_2)$ — аналитические функции, построенные, соответственно, по функциям

$$\frac{1}{4}\left[\Phi_1(\alpha_1, \alpha_2) - a^{(1)}_{0,0}\right] \text{ и}$$

$$\frac{1}{4}\left[\Phi_2(\alpha_1, \alpha_2) - a^{(2)}_{0,0}\right],$$

как в первой теореме.

Следовательно, на основании первой теоремы получим:

$$F_к(z_1, z_2) = -(A)\iint\limits_{L_R}\Big\{F_к(\zeta_1 \zeta_2)\prod_{k=1}^{2}\frac{1}{\zeta_к - z_к} + \frac{1}{4}\Big[\Phi_к(\alpha_1, \alpha_2) - a^{(k)}_{0,0} +$$
$$+ i\,\overline{(\Phi^{(1)}_k(\alpha_1, \alpha_2) - a^{(k)}_{0,0})}\Big]\cdot\frac{1}{\zeta_2(\zeta_1 - z_1)} + \frac{1}{4}\Big[\Phi_к(\alpha_1, \alpha_2) -$$
$$- a^{(k)}_{0,0} + i\,\overline{(\Phi^{(2)}_k(\alpha_1, \alpha_2) - a^{(k)}_{0,0})}\cdot\frac{1}{\zeta_1(\zeta_2 - z_2)}\Big\}\,d\zeta_1 d\zeta_2.$$

Итак,

$$-\frac{1}{4\pi^2}\iint\limits_{L_R}\frac{\Phi_1(\alpha_1, \alpha_2)}{(\zeta_1 - z_1)\cdot(\zeta_2 - z_2)}\,d\zeta_1\,d\zeta_2 =$$
$$= -\frac{1}{4\pi^2}(A)\iint\limits_{L_R}\Big\{\frac{F(\zeta_1, \zeta_2)}{(\zeta_1 - z_1)(\zeta_2 - z_2)} +$$
$$+ \frac{\Phi(\alpha_1, \alpha_2) - \mu_{0,0} + i\,\overline{[\Phi^{(1)}(\alpha_1, \alpha_2) - \mu_{0,0}]}}{4\zeta_2(\zeta - z_1)} +$$
$$+ \frac{\Phi(\alpha_1, \alpha_2) - \mu_{0,0} + i\,\overline{[\Phi^{(2)}(\alpha_1, \alpha_2) - \mu_{0,0}]}}{4\zeta_1(\zeta_2 - z_2)}\Big\}\,d\zeta_1\,d\zeta_2,$$

где $\mu_{0,0} = a^{(1)}_{0,0} + ia^{(2)}_{0,0}$.

ЛИТЕРАТУРА

1. М. Н. Шафеев. «О граничных свойствах аналитической функции и о двойном А-интеграле Коши». Труды I казахст. м. н. конференции по математике и механике, стр. 167—170, 1965.

2. М. Н. Шафеев. «Об одной граничной задаче для бигармонических функций двух комплексных переменных». Изв. ВУЗов «Математика», № 5 (42), стр. 109—114, 1964.

3. А. Зигмунд. «Тригонометрические ряды», М.-Л., 1939.