

В.И.Леонов, Х.С.Хазанов

ЦИЛИНДРИЧЕСКАЯ ОБОЛОЧКА ПОД ДЕЙСТВИЕМ КРУТЯЩЕГО МОМЕНТА  
ОТНОСИТЕЛЬНО НОРМАЛИ И СРЕДИННОЙ ПОВЕРХНОСТИ

Расчету цилиндрической оболочки при действии сосредоточенных и локальных нагрузок посвящено большое количество работ отечественных и зарубежных авторов. Обзор этих исследований приведен в работах [1-3]. Тем не менее, вопрос расчета оболочки, нагруженной крутящим моментом относительно нормали к срединной поверхности, выпал из поля зрения исследователей. Известна, правда, одна работа [4], в которой задача решалась с помощью двумерного интегрального преобразования Фурье. Однако использование декартовой системы координат не позволило авторам четко выделить особенности напряженного состояния вблизи точки приложения момента.

В настоящей статье исследуется напряженное состояние круговой цилиндрической оболочки с радиусом срединной поверхности  $R$  и толщиной  $\delta$  под действием сосредоточенных и локальных нагрузок, приводящихся к крутящему моменту  $M_z$  относительно нормали  $\zeta$  к срединной поверхности оболочки.

Напряженное состояние вблизи приложения нагрузки описывается известным уравнением пологой цилиндрической оболочки [5] относительно комплексной функции  $F = w + i\phi$  ( $w$  - нормальное перемещение,  $\phi$  - функция напряжения). Для рассматриваемого случая симметрии напряженного состояния решение однородного уравнения пологой цилиндрической оболочки в полярных координатах  $\rho = \frac{r}{R}$ ,  $\theta$  (угол  $\theta$  отсчитывается от образующей) приведено в [6] и виду

$$F(\rho, \theta) = \sum_{j=2,4,6,\dots}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} i^j [A_n H_n^{(j)}(z) + B_n J_n(z)] [J_{n-j}(z) - J_{n+j}(z)] \sin j\theta, \quad (I)$$

где  $z = x\sqrt{2i}$ ,  $x = \omega\rho$ ,  $\omega = \frac{1}{2}\sqrt{3(1-\mu^2)}\frac{\tau_0}{\sqrt{R\delta}}$ ,  
 $A_n = a_n + ib_n$ ,  $B_n = c_n + id_n$  — комплексные постоянные,  $\tau_0$  —  
 характерный линейный размер,  $\mu$  — коэффициент Пуассона.

Через  $J_n(z)$ ,  $H_n^{(1)}(z)$  обозначены функции Бесселя пер-  
 вого ряда и первая функция Ганкеля.

Анализ показывает, что внутренние усилия, соответствующие  
 решению (I), не могут уравновесить поверхностную нагрузку  $M_\xi$ .  
 Поэтому к (I) необходимо добавить сингулярное частное решение  
 однородного уравнения пологой цилиндрической оболочки, соответ-  
 ствующее действию сосредоточенного момента  $M_\xi$ . Это решение по-  
 лучено в работе [7] и имеет вид

$$F(\rho, \theta) = -\frac{4i\omega^2\lambda}{\pi E \tau_0^2} M_\xi \left\{ \theta + 2 \sum_{\nu=2,4,\dots}^{\infty} \sum_{k=1}^{\infty} i^\nu P_k(z) [J_{k-\nu}(z) - J_{k+\nu}(z)] \sin \nu \theta \right\}, \quad (2)$$

$$\text{где } \lambda = \frac{R}{\delta}, \quad P_k(z) = \frac{\partial J_\mu(z)}{\partial \mu} \Big|_{\mu=k} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n \left(\frac{z}{2}\right)^{k+2n}}{n!(k+n)!} \left[ \ln \frac{z}{2} - \psi(n+k+1) \right],$$

$\psi(n+k+1)$  — логарифмическая производная гамма-функции.

Исследование асимптотики поведения функции  $P_k(z)$  при  $\rho \rightarrow \infty$   
 показывает [8], что решение (2) является возрастающим на беско-  
 нечности. В связи с этим нами используется приближенный подход  
 [3], согласно которому оболочка заменяется вырезанной из нее  
 лентой (в нашем случае — круглой, радиуса  $\tau_0$ ). Исследования  
 [8,9] показали, что данный подход дает хорошие результаты для на-  
 пряженного состояния вблизи приложения нагрузки и что он не  
 применим, если нас интересует жесткость оболочки.

В настоящей работе задачи решались для двух типов граничных  
 условий на наружном контуре панели: 1) шарнирное опирание,  
 2) жесткое защемление. К перемещениям, соответствующим решению  
 (I) и (2), при записи граничных условий нужно добавить перемеще-  
 ния панели как жесткого целого, которые с учетом допущений поло-  
 гости имеют здесь вид

$$w = u = 0, \quad v = -\psi \tau_0 \rho, \quad (3)$$

где  $\psi$  — угол жесткого поворота панели,  $u$  и  $v$  — компо-  
 ненты перемещения точек срединной поверхности в полярной систе-  
 ме координат ( $u$  направлено по координате  $\tau$ ,  $v$  направлено  
 в сторону увеличения угла  $\theta$ ).

При действии на панель сосредоточенного момента  $M_\xi$  в реше-  
 нии (I) следует удерживать только возрастающую часть, т.е. положить

$\Lambda_{11} = 0$ . На рис. I для этого случая показано распределение напряжений в панели, полученное по результатам вычислений на ЭВМ, для значения параметра  $\omega = 4$ . Через  $\sigma_0$  здесь обозначена величина  $\sigma_0 = \frac{M_0}{R\delta^2}$ . Наибольшими являются мембранные касательные напряжения

$$\tau_{\rho\theta}^c = \tau_0^c(\rho) + \sum_{j=2,4,\dots}^{\infty} \tau_j^c(\rho) \sin j\theta.$$

Они имеют в начале координат сильную особенность вида  $\frac{1}{\rho^2}$ .

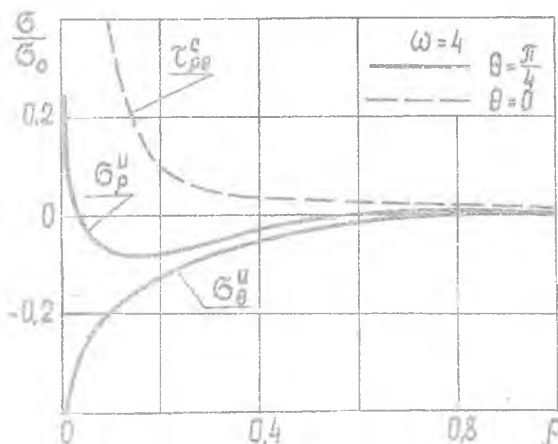


Рис. I.

Преобладающий вес вблизи точки приложения нагрузки в величине  $\tau_{\rho\theta}^c$  имеет постоянная составляющая, совпадающая с решением аналогичной плоской задачи теории упругости. Это показано для  $\omega = 4$  в таблице I. Изгибные напряжения  $\sigma_{\rho}^u$  и  $\sigma_{\theta}^u$  имеют особенность вида  $\frac{1}{\rho^2}$ .

Если момент  $M_0$  передается на панель через жесткое круглое выточечное радиуса  $r_1$ , то в рамке (I) следует удерживать как возрастающую, так и убывающую части. Постоянные интегрирования определяются из условия закрепления наружного контура панели и из условия совместности перемещения панели с жестким выточечным при  $r = r_1$ . Размер выточения будем при этом характеризовать параметром

$$\omega_0 = \frac{1}{2} \sqrt[4]{3(1-\mu^2)} \frac{r_1}{R\delta} \quad (4)$$

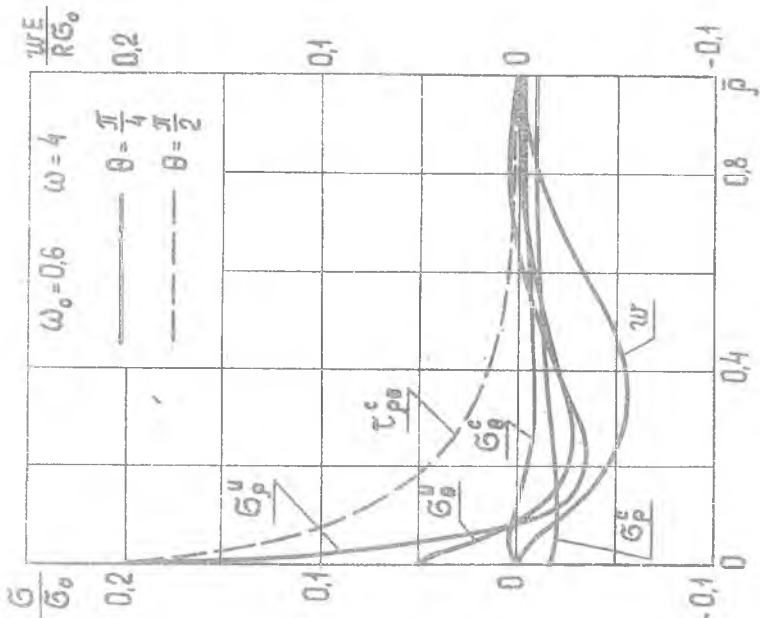


Рис. 3

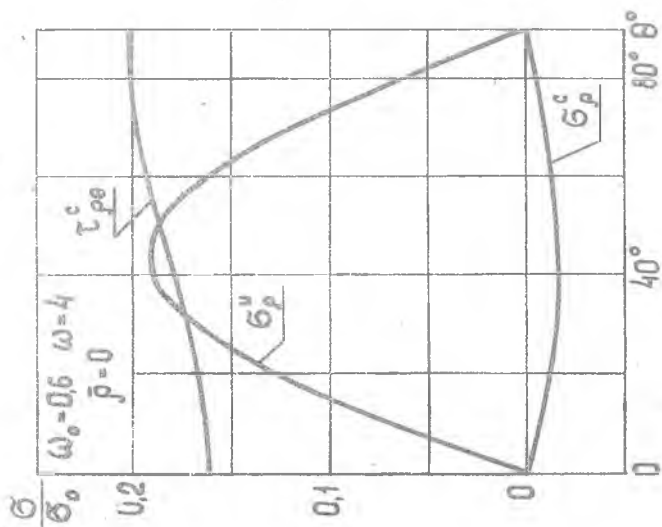


Рис. 2

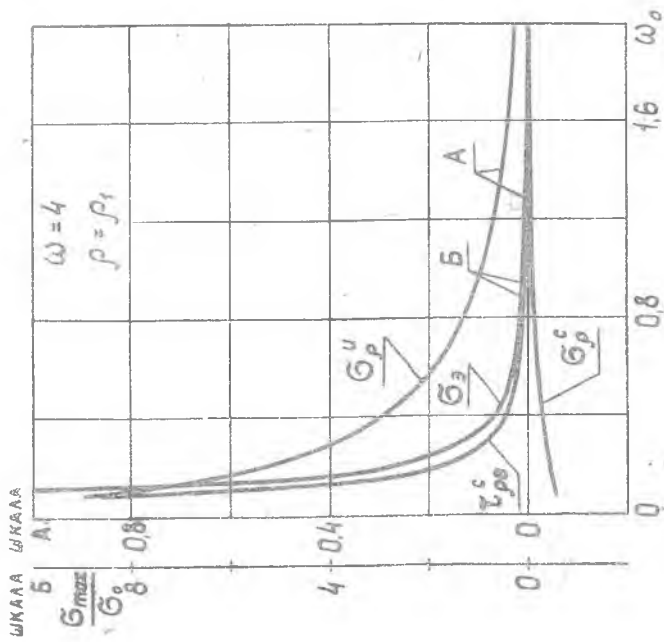


Рис. 4

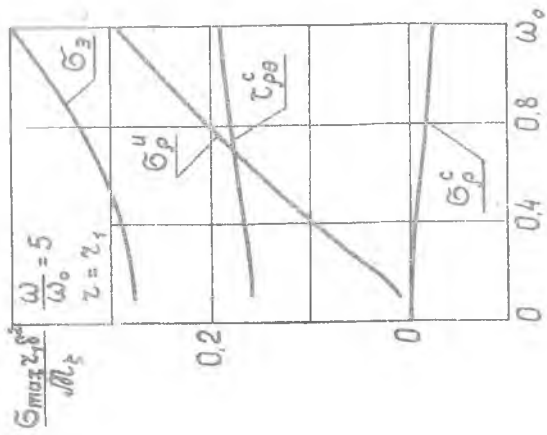


Рис. 5

Таблица I

$\frac{\tau_0 \delta^2}{M_5} \tau_1^c$	$\rho$	0	2	4	6
	0,005	6366,2	-1,6506	0,0009	-
0,1	15,915	-1,0996	0,07872	0,00047	
0,2	3,9789	-0,43149	0,10783	0,0053	

Распределение напряжений в шарнирно опертой панели по линии спая с включением для  $\omega_0 = 0,6$  и  $\omega = 4$  показано на рис. 2. Для этих же значений параметров распределение напряжений и нормальных перемещений вдоль координаты  $\bar{\rho}$  приведено на рис. 3. Через  $\bar{\rho}$  здесь обозначена величина  $\bar{\rho} = \frac{\rho - \rho_1}{1 - \rho_1}$ , где  $\rho_1 = \frac{\tau_1}{\tau_0}$ . Наибольших значений напряжения достигают на линии спая панели с включением. Зависимость максимальных напряжений от радиуса жесткого включения показана на рис. 4. Эквивалентные напряжения  $\sigma_3$  вычислялись по теории прочности энергии формоизменения. По мере уменьшения размера включения касательные напряжения  $\tau_{\rho\theta}^c$  весьма стремительно возрастают. Изгибные напряжения растут несколько медленнее. Однако доля изгибных напряжений при  $\omega_0 = 0,15$  составляет более 10% от величины касательных напряжений  $\tau_{\rho\theta}^c$  и увеличивается по мере роста  $\omega_0$ . Таким образом, учет изгибных напряжений в диапазоне  $\omega_0 > 0,15$  является обязательным.

Зависимость максимальных эквивалентных напряжений от наружного радиуса панели  $\tau_0$  (при постоянных  $R$  и  $\delta$  это эквивалентно  $\omega$ ) дана в таблице 2. Величина в числителе соответствует шарнирному опиранию наружного контура панели, в знаменателе - жесткой заделке. Из приведенных результатов видно, что радиус панели незначительно влияет на максимальные напряжения. Так же слабо влияет и способ закрепления наружного контура панели при достаточно больших значениях  $\omega$ .

Изменение максимальных напряжений в зависимости от радиуса кривизны срединной поверхности панели  $R$ , что согласно (4) при постоянных  $\tau_1$  и  $\delta$  эквивалентно  $\omega_0$ , для  $\frac{\tau_0}{\tau_1} = 5$  представлено на рис. 5. Наиболее сильно изменение кривизны срединной поверхности панели сказывается на изгибных напряжениях, которые резко возрастают по мере ее увеличения.

Таблица 2

	$\omega$	1	2	3	4	5
	0,1	<u>11,42</u>	<u>11,46</u>	<u>11,47</u>	<u>11,48</u>	--
		11,40	11,44	11,47	11,48	
$\sigma_{\text{max}}$	0,4	<u>0,7172</u>	<u>0,7416</u>	<u>0,7549</u>	<u>0,7591</u>	--
		0,7153	0,7347	0,7517	0,7582	
$\sigma_0$	0,8	--	<u>0,1987</u>	<u>0,2083</u>	<u>0,2159</u>	<u>0,2218</u>
			0,2208	0,1902	0,2071	0,2208
	1,2	--	<u>0,08401</u>	<u>0,09727</u>	<u>0,1055</u>	<u>0,1077</u>
			0,08166	0,09539	0,1016	0,1068

Л и т е р а т у р а

1. Жигалко Ю.П. В сб. "Исследования по теории пластин и оболочек", вып. 4., Казань, 1966.
2. Даревский В.М. В сб. "Труды VI Всесоюзной конференции по теории оболочек и пластинок", "Наука", 1966.
3. Чернышев Г.И. О контактных задачах в теории оболочек. Труды VII Всесоюзной конференции по теории оболочек и пластинок, "Наука", 1970.
4. Mizoguchi K., Hirakawa K. *Bulletin of the JSME*, vol.15, no 82, 1972.
5. Лурье А.И. Статика тонкостенных упругих оболочек. ОГИЗ, 1947.
6. Хазанов Х.С. Труды КуАИ, вып. 29, 1967.
7. Савельев Л.М., Хазанов Х.С. Труды КуАИ, вып. 48, 1971.
8. Леонов В.И. Хазанов Х.С. Труды КуАИ, вып. 63, 1972.
9. Леонов В.И., Хазанов Х.С. Труды КуАИ, вып. 66, 1973.