КУЙБЫШЕВСКИЙ АВИАЦИОННЫЙ ИНСТИТУТ им. С. П. КОРОЛЕВА
Труды, выпуск XXXVI, 1969 г.
Вибрационная прочность и надежность двигателей
и систем летательных аппаратов

Р. Н. СТАРОБИНСКИЙ

ВЫНУЖДЕННЫЕ КОЛЕБАНИЯ В МАГИСТРАЛЯХ С КВАДРАТИЧНЫМ ТРЕНИЕМ

Дифференциальные уравнения движения вязкой сжимаемой жидкости в трубопроводе имеют вид [1]:

$$-\frac{dp}{dx} = \frac{1}{f}\frac{\partial M}{\partial t} + \xi\frac{|M|}{2}M + p_{\text{ист}}(x, t), \quad (1)$$

$$-\frac{\partial M}{\partial x} = \frac{f}{a^2}\frac{\partial p}{\partial t} + M_{\text{ист}}(x, t). \quad (2)$$

Функции $p_{\text{ист}}(x, t)$ и $M_{\text{ист}}(x, t)$ описывают внешние возмущения, приложенные к системе.

Будем искать периодические решения системы (1—2) для случая периодического внешнего возмущения

$$p_{\text{ист}}(x, t) = p_{\text{ист}}(x, t + T); \quad (3)$$

$$M_{\text{ист}}(x, t) = M_{\text{ист}}(x, t + T). \quad (4)$$

Представим решение $M(x, t)$ в форме:

$$M(x, t) = M_0 + \sum_{k=1}^{\infty}\tilde{M}_{\text{к}}\cos(k\omega t + \varphi_{\text{к}}), \quad (5)$$

при этом из уравнения (2)

$$p(x, t) = p_0 + \sum_{k=1}^{\infty}\tilde{p}_{\text{к}}\cos(k\omega t + \varphi_{p\text{к}}). \quad (6)$$

Выражения (5) и (6) можно записать в комплексной форме

$$M(x_1 t) = \sum_{k=0}^{\infty}\frac{M_{\text{к}}e^{ik\omega t} + M_{\text{к}}^{*}e^{-ik\omega t}}{2}; \quad (7)$$

$$p(x, t) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{p_к e^{ik\omega t} + p_к^* e^{-ik\omega t}}{2}. \qquad (8)$$

Здесь $p_к$ и $p_к^*$; $M_к$ и $M_к^*$ — комплексно сопряженные числа,

$$Im\, M_0 = 0; \quad Im\, p_0 = 0.$$

Если подставить $p(x, t)$ и $M(x, t)$ из (7) и (8) в уравнения (1) — (2) и применить к обеим частям уравнений (1—2) преобразование

$$F(\omega) = \frac{2}{T} \int_0^T f(t)\, e^{-ik\omega t}\, dt, \qquad (9)$$

то для каждого «k» получим подсистему из двух уравнений. Совместное решение этих $2(k+1)$ уравнений дает значения $M_к$ и $p_к$, входящие в формулы (7), (8).

При ограничении конечным числом членов в разложении функции $M(x, t)$ в ряд Фурье

$$M(x, t) = M_0 + \sum_{k=1}^{k} \widetilde{M}_к \cos(k\omega t + \varphi_к). \qquad (10)$$

$M(x, t)$ находится из полученных указанным выше способом уравнений, а $p(x, t)$ может определяться непосредственной квадратурой уравнения (1).

Описанный выше метод соответствует методу гармонического баланса, записанному в комплексной форме.

Рассмотрим решение системы (1—2) для случая, когда:

$$M(x, t) > 0 \qquad (11)$$

и разложение функции $M_{ист}(x, t)$ и $p_{ист}(x, t)$ в ряды Фурье не содержит гармоник выше второй, причем амплитуды первых гармоник значительно больше амплитуд вторых.

Ограничимся для этого случая $k = 2$.

При этом система (1—2), распадается на 3 подсистемы, для отдельных гармонических составляющих:

$$-\frac{\partial p_0}{\partial x} = \xi \left[\frac{M_0^2}{2} + \frac{M_1^2}{4} + \frac{M_2^2}{4} \right] + p_{0\,ист};$$

$$-\frac{\partial M_0}{\partial x} = M_{0\,ист}; \qquad (12)$$

$$-\frac{\partial p_1}{\partial x} = i\omega \frac{1}{f} M_1 + \xi (M_0 + e^{-2i\varphi_1} M_2) M_1 + p_{1\,ист};$$

$$-\frac{\partial M_1}{\partial x} = i\omega \frac{f}{a^2} p_1 + M_{1\,ист}; \qquad (13)$$

$$\frac{\partial p_2}{\partial x} = i\omega \frac{1}{f} M_2 + \xi M_0 M_2 + p_{2\,ист} + \xi \frac{M_1^2}{4};$$

$$-\frac{\partial M_2}{\partial x} = i\omega \frac{f}{a^2} p_2 + M_{2\,\text{ист}}, \tag{14}$$

здесь $\varphi_1 = \arg M_1$.

Подсистемы (12—14) линейны относительно основной для каждой подсистемы гармоники и их решение может быть найдено обычными методами. Совместное решение (12—14) находится методом последовательных приближений.

Отметим следующие особенности уравнений (12—14):

1. В уравнениях для M_2 появляются дополнительные источники давления, зависящие от амплитуды и фазы 1-ой гармоники. Каждому элементарному гидросопротивлению ξdx соответствует источник давления $\xi \frac{M_1}{4} dx$ с внутренним сопротивлением $\xi M_0 dx$ (т. е. величина «собственного» дополнительного расхода через сопротивление

$$M_{2\,\text{доп «соб»}} \leqslant \frac{1}{4} \frac{\widetilde{M}_1}{M_0} \widetilde{M}_1. \tag{15}$$

2. В коэффициенте линеаризации в уравнениях для 1-ой гармоники появляется дополнительный член $\xi e^{-2i\varphi_1} M_2$, описывающий влияние 2-ой гармоники на 1-ую.

3. Коэффициент линеаризации в уравнениях для 1-ой гармоники без учета 2-ой совпадает с коэффициентом линеаризации исходных уравнений в точке $M = M_0$.

Как было указано выше, рассмотренный метод может быть распространен и на $k>2$, а также на случай произвольного спектрального состава возмущения и более общего вида нелинейностей. При этом комплексная форма записи $p(x,t)$ и $M(x,t)$ (7, 8) и преобразование (9) дают возможность легко выделять отдельные гармонические составляющие, используя равенства

$$\frac{1}{T}\int_0^T e^{ik\omega t} dt = 0 \quad k \neq 0 \, (k = \pm 1; \ \pm 2 \ldots). \tag{16}$$

$$\frac{1}{T}\int_0^T e^{ik\omega t} dt = 1 \quad k = 0. \tag{17}$$

В качестве примера рассматривалось решение для трубопровода длиной $[l = {}^1/_8 \lambda_1]$ с источником расхода $[M = 1 + 0{,}4 \cos \omega_1 t]$ на одном конце, нагруженного дросселем $\left[\Delta p = 0{,}4 \cdot 10^6 \frac{|M|}{2} \cdot M\right]$ на другом. Волновое сопротивление трубопровода $z_0 = 10^6$ (здесь λ_1— длина волны основной частоты ω_1).

Периодическое решение для расхода через дроссель без учета второй гармоники:

$$M_{\text{др}} = 1 + 0{,}526 \cos(\omega_1 t - 0{,}38), \tag{18}$$

с учетом второй гармоники

$$M_{\text{др}} = 1 + 0{,}531 \cos(\omega_1 t - 0{,}36) + 0{,}0702 \cos(2\omega_1 t + 2{,}42). \quad (19)$$

Как видно из (18) и (19), учет 2-ой гармоники в некоторых системах может существенно уточнить решение задачи о вынужденных колебаниях в магистралях с квадратичным трением.

ЛИТЕРАТУРА

1. И. А. Чарный. Неустановившееся движение вязкой сжимаемой жидкости в трубопроводах. «Гостехиздат», 1950.

2. Е. П. Попов, И. П. Пальтов. Приближенные методы исследования нелинейных автоматических систем. Физматгиз, 1960.