Ю. С. ВОРОБЬЕВ

ВИБРАЦИОННЫЕ РАСЧЕТЫ ЛОПАТОК ТУРБОМАШИН И ВОЗДУШНЫХ ВИНТОВ

Для решения данной проблемы используются вариационные методы.

Рабочая лопатка или воздушный винт рассматриваются как закрученный стержень несимметричного переменного поперечного сечения длиной l, закрепленный на диске радиуса R, вращающийся с угловой скоростью Ω (рис. 1). Стержень рассматривается в прямоугольной правой системе координат xyz с началом в центре масс корневого сечения. Ось x параллельна оси вращения, ось z направлена по радиусу от оси вращения. Оси ξ η являются главными центральными осями в любом поперечном сечении стержня. Оси x_1y_1 и $\xi_1\eta_1$ параллельны осям xy и $\xi\eta$ соответственно, начало их расположено в центре изгиба поперечного сечения.

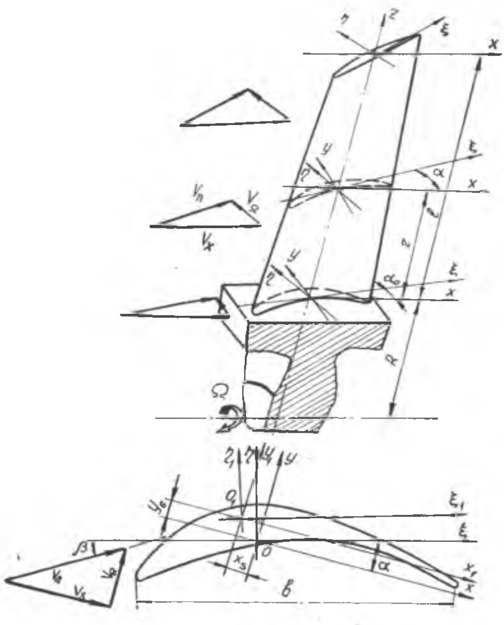

Рис. 1

α — угол закрутки сечения, $x_s y_s$ — проекции расстояния между центром масс и центром изгиба поперечного сечения. Штрихи будут означать производные по координате z, а точки над функциями — по времени t.

Перемещения элементарного объема стержня в направлениях x, y и z могут быть представлены на основании работ [1, 5] в виде:

$$U = u_1 + u_2 - \theta y_1;$$
$$V = v_1 + v_2 + \theta x_1;$$
$$W = w - \gamma_{1\eta}\xi - \gamma_{1\xi}\eta + \gamma_{2\eta}X + \gamma_{2\xi}\Psi + \theta'\varphi,$$

где $u_1(z, t)$, $v_1(z, t)$ — перемещения при изгибе;

$u_2(z, t)$, $v_2(z, t)$ — перемещения при сдвиге в направлениях x и y;

$w(z, t)$ — продольное перемещение в направлении z;

$\Theta(z, t)$ — угловое перемещение относительно центра изгиба сечения;

$\varphi(\xi, \eta, z)$ — функция кручения;

$X(\xi, \eta, z)$ и $\Psi(\xi, \eta, z)$ — функции депланации при сдвиге в направлениях ξ и η;

$\gamma_{1\xi}$, $\gamma_{1\eta}$ — углы поворота сечений относительно осей ξ и η при изгибе;

$\gamma_{2\xi}$, $\gamma_{2\eta}$ — относительные сдвиги в системе $\xi\eta z$.

Деформации стержня могут принять следующий вид [1]:

$$\varepsilon_z = w' - \varkappa_{1\eta}\xi - \varkappa_{1\xi}\eta + \varkappa_{2\eta}X + \varkappa_{2\xi}\Psi + \theta'\tau_0 r_1^2 + \theta''\varphi;$$

$$\gamma_{\xi z} = \theta'\left(\frac{\partial\varphi}{\partial\xi} - \eta_1\right) + \gamma_{2\eta}\left(1 + \frac{\partial X}{\partial\xi}\right) + \gamma_{2\xi}\frac{\partial\Psi}{\partial\xi};$$

$$\gamma_{\eta z} = \theta'\left(\frac{\partial\varphi}{\partial\eta} + \xi_1\right) + \gamma_{2\eta}\frac{\partial X}{\partial\eta} + \gamma_{2\xi}\left(1 + \frac{\partial\Psi}{\partial\eta}\right);$$

$$\varepsilon_\xi = \varepsilon_\eta = \gamma_{\xi\eta} = 0, \tag{1}$$

где $\tau_0 = \alpha'$ — закрутка стержня; $r_1^2 = \xi_1^2 + \eta_1^2$;

$\varkappa_{1\xi}$, $\varkappa_{1\eta}$ — компоненты кривизны стержня в результате изгиба, а $\varkappa_{2\xi}$, $\varkappa_{2\eta}$ — в результате сдвига.

Напряжения с учетом демпфирования в материале согласно гипотезе Фохта записываются следующим образом:

$$\sigma_z = E(\varepsilon_z + k_E\dot{\varepsilon}_z);\quad \tau_{\xi z} = G(\gamma_{\xi z} + k_G\dot{\gamma}_{\xi z});$$

$$\tau_{\eta z} = G(\gamma_{\eta z} + k_G \dot{\gamma}_{\eta z}); \quad \sigma_\xi = \sigma_\eta = \tau_{\xi\eta} = 0,$$

где E, G — модули упругости при растяжении и сдвиге;

k_E, k_G — приведенные коэффициенты вязкости материала при растяжении и сдвиге.

Вариация работы внутренних сил при деформации стержня представляет собой выражение

$$\delta L = \int_0^l \iint_F [\sigma_z \delta\varepsilon_z + \tau_{\xi z} \delta\gamma_{\xi z} + \tau_{\eta z} \delta\gamma_{\eta z}]\, dF\, dz,$$

где F — площадь поперечного сечения.

Кинетическая энергия вращающегося стержня представляет собой сумму кинетической энергии колебаний и работ центробежных и кориолисовых сил стержня на соответствующих перемещениях:

$$T = \frac{1}{2}\int_0^l \iint_F \rho\, [\dot{U}^2 + \dot{V}^2 + (\dot{W} - \dot{\zeta})^2]\, dF\, dz +$$

$$+ \frac{\Omega^2}{2}\int_0^l \iint_F \rho\, [(R + z + W - \zeta)^2 + (V + y)^2]\, dF\, dz +$$

$$+ \Omega \int_0^l \iint_F \rho\, [(V + y)(\dot{W} - \dot{\zeta}) - (R + z + W - \zeta)\, \dot{V}]\, dF\, dz,$$

где ρ — плотность стержня,

ζ — изменение проекции продольного волокна стержня на ось z при его деформации.

Если лопатки соединены между собой паяными упругими связями, то работа связей при деформации лопатки имеет вид

$$L_C = \frac{1}{2}\sum_j \left[K_{xj}\left(v_1' - \frac{v_1 + v_2}{R + z}\right)_j^2 + K_{yj}(u_1')_j^2 + K_{\theta j}\, \theta_j^2\right],$$

где K_{xj}, K_{yj}, $K_{\theta j}$ — коэффициенты жесткости связей [5];

j — номер связи.

Работу замкнутых на круг демпферных связей, свободно пропущенных сквозь отверстия в лопатках, следует определить по формуле

$$L_{C1} = \left(1 - \cos\frac{2\pi k}{m}\right)\sum_j \frac{EF_j^C}{n_j}\, (v_1 + v_2)^2,$$

где m — число лопаток на диске;

k — число узловых диаметров при колебаниях облопачивания;

h_j — шаг лопаток на уровне связи;

F_j^C — площадь поперечного сечения связи.

Если Q_n — обобщенные внешние силы, а q_n — соответствующие им перемещения, то вариация работы этих сил выразится:

$$\delta L_B = \int_S \sum_n Q_n \delta q_n dS,$$

где S — область приложения внешней нагрузки.

Для улучшения сходимости метода и облегчения расчетов удобно выбрать в качестве аппроксимируемых величин сил и моментов [2]

$$M_\xi = EI_\xi \varkappa_{1\xi}; \quad P_\xi = EFk_\xi \gamma_{2\eta}; \quad P_z = EFw';$$
$$M_\eta = EI_\eta \varkappa_{1\eta}; \quad P_\eta = EFk_\eta \gamma_{2\xi}; \quad M_\theta = GI_d \theta',$$

где I_ξ, I_η — главные центральные моменты инерции поперечного сечения;

k_ξ, k_η — коэффициенты формы сечения при сдвиге в направлениях ξ и η;

GI_d — жесткость стержня на кручение.

Аппроксимируемые величины представляются в виде рядов типа $\sum_k \Phi_k(z) f_k(t)$, где $f_k(t)$ — варьируемые функции, а $\Phi_k(z)$ — базисные функции. Перемещения и их производные определяются интегрированием. Например:

$$u_1' = [e_\eta M_\eta \cos\alpha - e_\xi M_\xi \sin\alpha]_{z=0} + \int_0^z \left(\frac{M_\eta}{EI_\eta}\cos\alpha - \frac{M_\xi}{EI_\xi}\sin\alpha\right) dz;$$

$$u_1 = \int_0^z u_1\, dz,$$

где e_η, e_ξ — коэффициенты податливости заделки лопатки [5].

Базисные функции удовлетворяют силовым граничным условиям, а при определении перемещений и их производных удовлетворяются и геометрические граничные условия. Таким образом, удается удовлетворить все граничные условия, что улучшает сходимость метода.

Учитывается также работа упругих сил податливого основания:

$$L_0 = \frac{1}{2}\left[e_\xi M_\xi^2 + e_\eta M_\eta^2 + e_\theta M_\theta^2 + e_z P_z^2 + c_\xi P_\xi^2 + c_\eta P_\eta^2\right],$$

где e_θ, e_z, c_ξ, c_η — коэффициенты податливости заделки, аналогичные величинам e_ξ, e_η.

Вариационное уравнение задачи приводит к системе дифференциальных уравнений для определения варьируемых функций $f_u = t$. Если рассматриваются свободные колебания без учета кориолисовых сил, то задача сводится к проблеме вещественных чисел и векторов вещественной матрицы [2]. После этого определяются частоты и формы собственных изгибно-крутильно-продольных колебаний лопатки и распределения относительных моментов, усилий и напряжений.

Метод реализован для ЭЦВМ М-222 и БЭСМ-4М. Предусмотрены возможность использования различных видов базисных функций и решение как общей задачи, так и ее частных случаев.

В качестве примера приводятся некоторые результаты расчетов для лопатки (рис. 1) газовой турбины длиной 11 см, закрученной на 0,605 *рад*, с отношением длины l к хорде с концевого сечения b, равным 2,32.

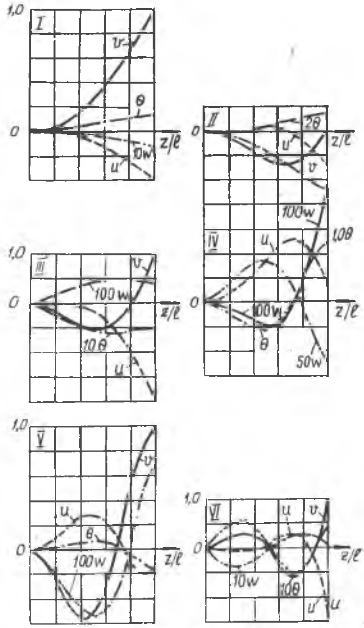

Рис. 2

Первые пять расчетных частот имеют значения (в герцах): 915,7; 1970; 3117; 4136; 5532. Соответствующие экспериментальные значения колеблются в пределах: 902÷946; 1942÷÷2046; 3100÷3300; 4000÷4200; 5600÷6100. Формы изгибно-крутильно-продольных колебаний для первых пяти токов представлены на рис. 2 ($u = u_1 + u_2$, $v = v_1 + v_2$, w в см, Θ в радианах). На рис. 3 приведено распределение относительных нормальных напряжений на входных и выходных кромках и спинке лопатки. Для сравнения тонкими линиями показано распределение напряжений, полученное при расчетах парциальных изгибных колебаний.

Предложенный метод дает возможность исследовать влияние различных факторов. На рис. 4 показаны относительные изменения частот для ряда турбинных и компрессорных лопаток под влиянием различных факторов. У турбинных лопаток отношение длины к хорде кольцевого сечения $\frac{l}{b}$ изменялось в

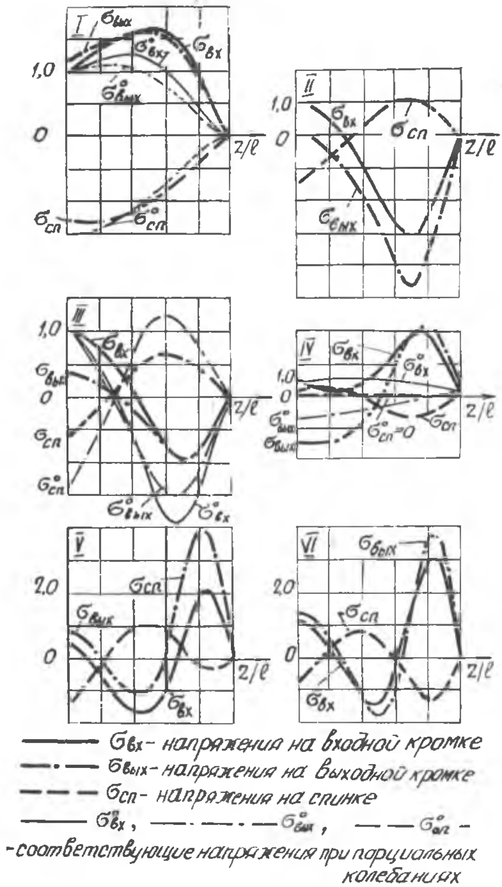

Рис. 3

пределах 2,32... 7,00, угол закрутки 2 (рад) —0,148... 1,150, среднее значение квадратного корня из отношения максимального момента инерции к минимальному $\sqrt{\frac{I_{max}}{I_{min}}}$ —2... 20. Те же параметры у компрессорных лопаток изменялись в пределах: $\frac{l}{b}$ —1,0... 2,6; α—0,192... 0,454; $\sqrt{\frac{I_{max}}{I_{min}}}$ —7... 26.

Колебания лопаток являются совместными изгибно крутильно-продольными, термины «крутильные» и «изгибные» указывают лишь на преобладание какого-либо из видов колебаний.

Результаты расчетов показывают, что для турбинных лопаток большую роль может играть инерционная связь изгибных и крутильных колебаний за счет несовпадения центра масс и центра изгиба поперечного сечения. Для компрессорных лопаток может оказаться существенной деформационная связь изгиба и кручения, которую отражает член $\Theta'\tau_0 r_1^2$ в формулах (1). Продольные колебания могут вызвать понижение крутильных и частоизгибных колебаний закрученного стержня. Стесненность депланации поперечного сечения всегда повышает частоты колебаний, а сдвиг и податливость заделки понижают частоты.

На лопатки и воздушные винты действуют аэродинамичес-

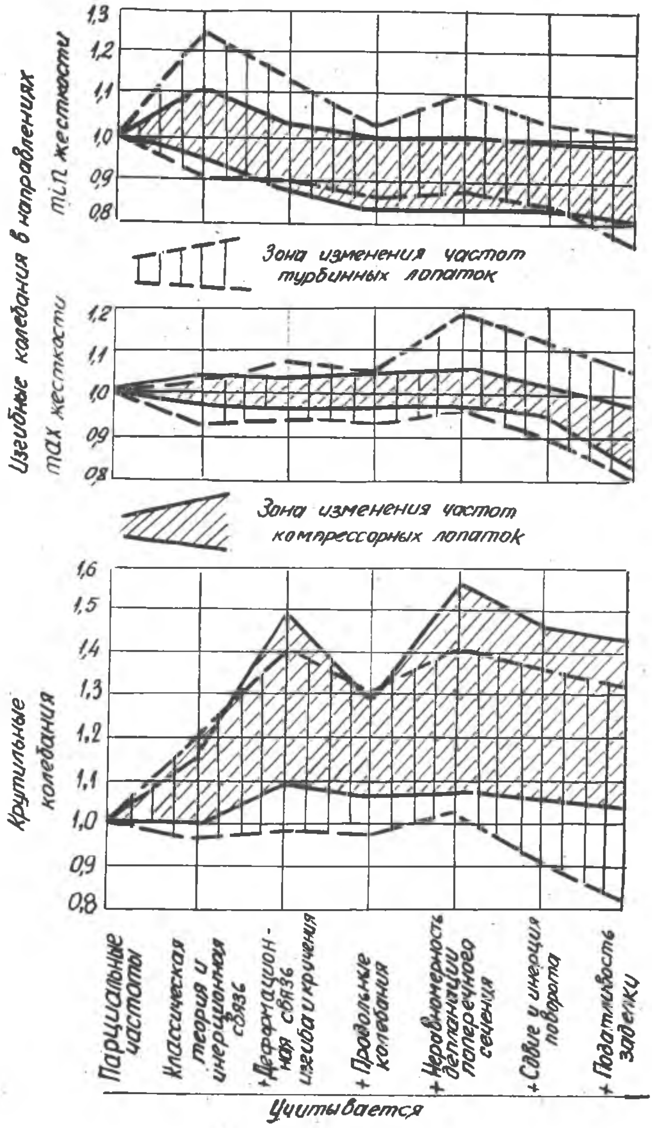
Изгибные колебания в направлениях
min жесткости
max жесткости
1,3
1,2
1,1
1,0
0,9
0,8
Зона изменения частот турбинных лопаток
Зона изменения частот компрессорных лопаток
Крутильные колебания
1,6
1,5
1,4
1,3
1,2
1,1
1,0
0,9
0,8
Парциальные частоты
Классическая теория и инерционная связь
+ Деформационная связь изгиба и кручения
+ Продольные колебания
+ Неравномерность депланации поперечного сечения
+ Сдвиг и инерция поворота
+ Податливость заделки
Учитывается

Рис. 4

кие силы со стороны газового потока, которые могут вызвать потерю динамической устойчивости и вынужденные колебания. В данном случае рассматривается только классический флаттер [3, 4] вращающихся воздушных винтов. Скорость потока $V_п$ и угол атаки β определялись с учетом осевой V_x и относительной окружной V_Ω скоростей потока. Задача в этом случае приводит к проблеме комплексных собственных чисел и векторов матрицы. Метод реализован для ЭЦВМ М-222. Расчеты показывают, что влияние кориолисовых сил и деформационная связь изгиба с кручением могут понижать критическую скорость флаттера [6].

ЛИТЕРАТУРА

1. Воробьев Ю. С. Уточненные уравнения свободных колебаний вращающихся стержней. В сб.: «Рабочие процессы в турбомашинах и прочность их элементов». Изд-во «Наукова думка», 1965.

2. Воробьев Ю. С. Колебания турбинных лопаток с учетом различных факторов. Применение ЭЦВМ в строительной механике. Изд-во «Наукова думка», 1968.

3. Риз П. М. Флаттер воздушных винтов. Труды ЦАГИ, 1939, вып. 391.

4. Филлипов А. П. Колебания механических систем. Изд-во «Наукова думка», 1965.

5. Филлипов А. П., Булгаков В. Н., Воробьев Ю. С., Кантор Б. Я., Марченко Г. А. Численные методы в прикладной теории упругости. Изд-во «Наукова думка», 1968.

6. Филлипов А. П., Кохманюк С. С., Воробьев Ю. С. Воздействие динамических нагрузок на элементы конструкций. Изд-во «Наукова думка», Киев, 1974.

А. А. ТРОЙНИКОВ, В. Н. ТРУБИН, Г. В. ЛАЗУТКИН

К ВОПРОСУ ОБ УПРУГО-ДЕМПФИРУЮЩИХ СВОЙСТВАХ МАТЕРИАЛА МР

В статье делается попытка описать упруго-демпфирующие свойства материала МР, работающего на сжатие, в обобщенном виде и найти функциональные связи основных динамических характеристик изделий из МР (коэффициента динамичности и резонансной частоты) с исходными параметрами материала [2]. Полученные результаты могут послужить базой для создания методики проектировочного расчета простейших конструкций амортизаторов из материала МР.