8. Бакланов В.С., Вуль В.М. Влияние связанных колебаний сложных динамических систем на оценку эффективности виброизоляции.- В кн.: Доклады X Всесоюзной акустической конференции. М.:Изд-во Акустического института, 1983, с. 65-68.

УДК 534.014.4

И.А.Биргер

ВАРИАЦИОННЫЕ МЕТОДЫ В ЗАДАЧАХ ПРОЧНОСТИ И ДИНАМИКИ

Вариационные методы и различные их реализации (методы конечных элементов и др.) позволяют свести краевые задачи механики деформируемого тела к решению систем линейных алгебраических уравнений обычно с симметричной, положительно определенной матрицей.

Идея вариационных методов восходит к работам Релея, Ритца, Тимошенко, но только современные ЭВМ позволили получить их эффективную реализацию. В настоящей работе приводятся общие уравнения вариационных методов при учете температурных и дополнительных деформаций.

Для метода Релея-Ритца указывается общая структура линейных уравнений для пространственных задач.

Рассмотрим классические вариационные методы /1,2/.

Метод вариации перемещений. Пусть деформируемое тело объемом V находится в равновесии под действием внешних сил. На части поверхности S_σ заданы распределенные по поверхности усилия (напряжения) P :

$$\{P\} = \{P^*\} \in S_\sigma . \tag{1}$$

Здесь и в дальнейшем заданные значения отмечаются верхним индексом *; символ $\in$ означает принадлежность.

На части поверхности S_u заданы перемещения

$$\{u\} = \{u^*\} \in S_u . \tag{2}$$

Если точки тела получат "возможные смещения", то в соответствии с началом Лагранжа-Пуассона

$$\delta \Phi_\varepsilon = \iiint\limits_V \{\delta\varepsilon\}^T \{\sigma\} dV - \iiint\limits_V \{\delta u\}^T \{F^*\} dV - \iint\limits_{S_\sigma} \{\delta u\}^T \{P^*\} dS = 0, \tag{3}$$

где $\delta\Phi_\varepsilon$ – вариация функционала Лагранжа; $\{F^*\},\{P^*\}$ – заданные значения объемной и поверхностной нагрузок.

Вектор вариации деформаций и вектор напряжений

$$\{\delta\varepsilon\}^T=\{\delta\varepsilon_{11}, \delta\varepsilon_{22}, \delta\varepsilon_{33}, 2\delta\varepsilon_{12}, 2\delta\varepsilon_{21}, 2\delta\varepsilon_{31}\};$$

$$\{\sigma\}^T=\{\sigma_{11}, \sigma_{22}, \sigma_{33}, \sigma_{12}, \sigma_{23}, \sigma_{31}\}.$$

Величина $\{\delta\varepsilon\}^T\{\sigma\}=\delta Э_1$

представляет работу внутренних сил на возможных перемещениях или вариацию удельной энергии деформации.

Для упругого тела

$$\{\sigma\}=[A](\{\varepsilon\}-\{\alpha T\}-\{\varepsilon^o\}), \tag{4}$$

где $[A]$ – матрица жесткости материала;

$\{\alpha T\},\{\varepsilon^o\}$ – векторы температурных и дополнительных деформаций.

Тогда /3/

$$\delta\Phi_\varepsilon=\iiint\limits_V\{\delta\varepsilon\}^T[A](\{\varepsilon\}-\{\alpha T\}-\{\varepsilon^o\})dV-$$

$$-\iiint\limits_V\{\delta u\}^T\{F^*\}dV-\iint\limits_{S_\sigma}\{\delta u\}^T\{P^*\}dS=0. \tag{5}$$

Вариационное уравнение Лагранжа (5) для упругого тела эквивалентно выполнению уравнений равновесия

$$\sigma_{ij,j}+F_i^*=0 \tag{6}$$

и краевых условий (I).

Выполнение условий (2) должно обеспечиваться заранее, причем на поверхности S_u

$$\{\delta u\}=0\in S_u . \tag{7}$$

Для решения вариационного уравнения Лагранжа можно использовать метод Релея-Ритца, в соответствии с которым смещения тела предполагаются в виде

$$u=u_1=\sum_{i=1}^N a_i f_i(x,y,z); \quad v=u_2=\sum_{i=1}^N b_i \varphi_i(x,y,z);$$
$$w=u_3=\sum_{i=1}^N c_i \psi_i(x,y,z), \tag{8}$$

где f_i, φ_i, ψ_i - заранее выбранные системы функций, удовлетворяющие условиям закрепления (2); a_i, b_i, c_i - коэффициенты разложения, подлежащие определению.

Вариации смещений принимаются в виде

$$\delta u=\sum_{i=1}^{N}\delta a_i f_i(x,y,z),\ \delta v=\sum_{i=1}^{N}\delta b_i \varphi_i(x,y,z),\ \delta w=\sum_{i=1}^{N}\delta c_i \psi_i(x,y,z)$$

что позволяет удовлетворить условию (8). Вариации деформаций, входящие в уравнение (6),

$$\delta\varepsilon_{11}=\sum_{i=1}^{N}\delta a_i\frac{\partial f_i}{\partial x},\ \dots\ ,\ \delta\varepsilon_{12}=\frac{1}{2}\left(\sum_{i=1}^{N}\delta a_i\frac{\partial f_i}{\partial y}+\sum_{i=1}^{N}\delta b_i\frac{\partial\varphi_i}{\partial x}\right)$$

или в общем виде

$$\delta\varepsilon_{ij}=\frac{1}{2}\left(\frac{\partial(\delta u_i)}{\partial x_j}+\frac{\partial(\delta u_j)}{\partial x_i}\right).$$

<u>Общие уравнения метода Релея-Ритца.</u> Учитывая соотношения (8), можно записать:

$$\{\varepsilon\}=\begin{Bmatrix}\sum a_i f_{i,x}\\ \sum b_i\varphi_{i,y}\\ \sum c_i\psi_{i,z}\\ \sum(a_i f_{i,y}+b_i\varphi_{i,x})\\ \sum(b_i\varphi_{i,z}+c_i\psi_{i,y})\\ \sum(c_i\psi_{i,x}+a_i f_{i,z})\end{Bmatrix},$$

где суммирование ведется по i ; запятая в нижнем индексе означает дифференцирование по координате, указанной далее.

Аналогичным образом выражается $\{\delta\varepsilon\}$, но коэффициенты заменяются их вариациями.

Далее следует внести значения $\{\varepsilon\}$ и $\{\delta\varepsilon\}$ в уравнение (4) и собрать все члены при вариациях $\delta a_i, \delta b_i$ и δc_i. В силу произвольности вариаций каждое выражение, стоящее множителем при указанных вариациях, обращается в нуль, что дает систему трех линейных алгебраических выражений порядка $3N$. После простых, но несколько громоздких преобразований получаем следующую систему уравнений для определения коэффициентов a_i, b_i и c_i :

$$\sum_{j=1}^{N}\begin{bmatrix}\alpha_{ij}^{11} & \alpha_{ij}^{12} & \alpha_{ij}^{13}\\ \alpha_{ij}^{21} & \alpha_{ij}^{22} & \alpha_{ij}^{23}\\ \alpha_{ij}^{31} & \alpha_{ij}^{32} & \alpha_{ij}^{33}\end{bmatrix}\begin{Bmatrix}a_j\\ b_j\\ c_j\end{Bmatrix}=\begin{Bmatrix}g_{i1}\\ g_{i2}\\ g_{i3}\end{Bmatrix}_{(i=1,2,\dots,N).} \quad (9)$$

Для более краткой записи элементов матрицы α_{ij} введем векторы производных для функций f_i, φ_i и ψ_i:

$$\{f_i\}=\begin{Bmatrix}f_{i,x}\\ 0\\ 0\\ f_{i,y}\\ 0\\ f_{i,z}\end{Bmatrix};\quad \{\varphi_i\}=\begin{Bmatrix}0\\ \varphi_{i,y}\\ 0\\ \varphi_{i,x}\\ \varphi_{i,z}\\ 0\end{Bmatrix};\quad \{\psi_i\}=\begin{Bmatrix}0\\ 0\\ \psi_{i,z}\\ 0\\ \psi_{i,y}\\ \psi_{i,z}\end{Bmatrix}.$$

Учитывая симметрию матрицы жесткости $[A]$, получим:

$$\alpha_{ij}^{11}=\iiint\limits_V\{f_{i,}\}^T[A]\{f_{j,}\}dV;\qquad \alpha_{ij}^{12}=\alpha_{ij}^{21}=\iiint\limits_V\{f_{i,}\}^T[A]\{\varphi_j\}dV;$$

$$\alpha_{ij}^{13}=\alpha_{ij}^{31}=\iiint\limits_V\{f_{i,}\}^T[A]\{\psi_{j,}\}dV;\quad \alpha_{ij}^{22}=\iiint\limits_V\{\varphi_i\}^T[A]\{\varphi_{j,}\}dV;$$

$$\alpha_{ij}^{23}=\alpha_{ij}^{32}=\iiint\limits_V\{\varphi_{i,}\}^T[A]\{\psi_{j,}\}dV;\quad \alpha_{ij}^{33}=\iiint\limits_V\{\psi_{i,}\}^T[A]\{\psi_{j,}\}dV. \quad (10)$$

Выражения для функций g_i будут такими:

$$g_{i1}=\iiint\limits_V\{f_i\}^T[A](\{\alpha T\}+\{\varepsilon^\circ\})dV+\iiint\limits_V f_i F_x^* dV+\iint\limits_{S_\sigma} f_i P_x^* dS;$$

$$g_{i2}=\iiint\limits_V\{\varphi_i\}^T[A](\{\alpha T\}+\{\varepsilon^\circ\})dV+\iiint\limits_V \varphi_i F_y^* dV+\iint\limits_{S_\sigma} \varphi_i P_y^* dS;$$

$$g_{i3}=\iiint\limits_V\{\psi_i\}^T[A](\{\alpha T\}+\{\varepsilon^\circ\})dV+\iiint\limits_V \psi_i F_z^* dV+\iint\limits_{S_\sigma} \psi_i P_z^* dS. \quad (11)$$

В формулах (10) и (11) для сокращения вычислений можно сразу положить равными нулю строчки матрицы $[A]$, соответствующие нулевым компонентам стоящего слева вектора. Уравнения (9) являются общими уравнениями метода Релея-Ритца для упругого анизотропного тела. Они пригодны для учета деформаций пластичности по методу переменных параметров упругости или методу дополнительных деформаций и ползучести по теории старения. При использовании метода последовательных нагружений с помощью уравнений (9) можно учесть деформации пластичности по теории пластического течения и деформации ползучести.

Выбор аппроксимирующих функций. Функции f_i, φ_i и ψ_i в равенстве (8), как указывалось, должны удовлетворять условиям закрепления. Обычно на поверхности S_u задают нулевые смещения. Если заданные смещения отличны от нуля, то можно принять

$$u = u^\circ + \sum_{i=1}^{N} a_i f_i\ ; \quad v = v^\circ + \sum_{i=1}^{N} b_i \varphi_i\ ; \quad w = w^\circ + \sum_{i=1}^{N} c_i \psi_i\ ,$$

где

$$\begin{Bmatrix} u^\circ \\ v^\circ \\ w^\circ \end{Bmatrix} = \{u^*\} \in S_u \qquad \begin{Bmatrix} f_i \\ \varphi_i \\ \psi_i \end{Bmatrix} = 0 \quad \in S_u .$$

Функции u°, v°, w°, как и f_i, φ_i, ψ_i, должны быть непрерывными (до третьих частных производных) функциями.

Значения ε° соответствуют смещениям u°, v° и w°. Как известно, функции f_i, φ_i, ψ_i должны обладать достаточной полнотой с тем, чтобы при $N \to \infty$ решение стремилось к точному. В силу этого указанные функции должны быть, по крайней мере, линейно независимыми. В практических задачах последнее требование является и достаточным. Можно выбрать для некоторого упрощения $f_i = \varphi_i = \psi_i$. Однако при этом векторы $\{f_i,\}$, $\{\varphi_i,\}$, $\{\psi_i,\}$ не окажутся тождественными. Отметим, что при соответствующем выборе аппроксимирующих функций уравнения (9) совпадают с уравнениями метода конечных элементов, ассоциированными с функционалом Лагранжа.

Метод Б.Г.Галеркина. В механике твердого деформируемого тела можно рассматривать как видоизменение метода Релея-Ритца. Преобразуя первый интеграл в равенстве (3) с помощью формулы Гаусса-Остроградского и учитывая условие (7), находим

$$\delta \Phi_\varepsilon = \iiint_V (\sigma_{ij,j} + F_i^*)\,\delta u_i\, dV - \iint_{S_\sigma} (\sigma_{ij} l_i + p_i^*)\,\delta u_i\, dS = 0$$

или в матричной форме

$$\delta \Phi_\varepsilon = \iiint_V \{\delta u\}^T([D]^T\{\sigma\} + \{F^*\})\,dV - \iint_{S_\sigma} \{\delta u\}^T([L]^T\{\sigma\} - \{p^*\})\,dS = 0.$$

В силу произвольности вариации $\{\delta u\}$ очевидно, что приведенные вариационные уравнения эквивалентны условиям равновесия и краевым условиям на поверхности S_σ.

Предполагая решение в форме (8), получим систему уравнений для определения неизвестных коэффициентов a_i, b_i и c_i.

Несмотря на несколько более простую структуру уравнений, метод Галеркина обладает существенным недостатком – неизвестные функции имеют более высокий порядок производных.

Метод вариации напряжений. Метод основан на вариации напряженного состояния при условии, что уравнения равновесия и краевые условия для напряжений не нарушаются.

Тогда вариация функционала Кастельяно

$$\delta \Phi_\sigma = \iiint_V \{\delta\sigma\}^T\{\varepsilon\}dV - \iiint_V \{\delta F\}^T\{u\}dV -$$

$$- \iint_{S_\sigma} \{\delta p\}^T\{u\}ds - \iint_{S_u} \{\delta p\}\{u^*\}ds = 0, \qquad \text{(I2)}$$

где векторы вариации напряжений и вектор смещений

$$\{\delta\sigma\}^T = \{\delta\sigma_x, \delta\sigma_y, \delta\sigma_z, \delta\tau_{xy}, \delta\tau_{yz}, \delta\tau_{zx}\} = \{\delta\sigma_{11}, \delta\sigma_{22}, \delta\sigma_{33}, \delta\sigma_{12}, \delta\sigma_{23}, \delta\sigma_{31}\};$$

$$\{u\} = \begin{Bmatrix} u \\ v \\ w \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \end{Bmatrix}.$$

Вариация напряжений удовлетворяет условиям равновесия

$$\delta\sigma_{im,m} + \delta F_i = 0 \qquad (i = 1,2,3)$$

и краевым условиям на поверхности

$$\delta\sigma_{ij}\, \ell_j = \delta p_i \qquad (i = 1,2,3).$$

Из последних соотношений следует, что вариация напряжений вызывает "статически требуемые" вариации объемных $\{\delta F\}$ и поверхностных $\{\delta p\}$ сил, входящие в уравнение (I2).

Величина $\{\delta\sigma\}^T\{\varepsilon\} = \delta Э_{1д}$ представляет вариацию дополнительной потенциальной энергии (потенциальной функции напряжений).

По физическому смыслу вариационное уравнение (I2) эквивалентно уравнениям неразрывности деформаций.

Для упругого тела

$$\delta \Phi_\sigma = \iiint_V \{\delta\sigma\}^T(\{[a]\{\sigma\}+\{\alpha T\}+\{\varepsilon^\circ\})dV - \iiint_V \{\delta F\}^T\{u\}dV -$$

$$- \iint_{S_\sigma} \{\delta p\}^T\{u\}ds - \iint_{S_u} \{\delta p\}^T\{u^*\}ds = 0,$$

где $[a]$ – матрица податливости материала.

Отметим, что применение метода вариации напряжений особенно эффективно при использовании функций напряжений, обеспечивающих заранее выполнение уравнений равновесия и краевых условий.

Расширенные функционалы. При использовании вариационных уравнений метода вариации перемещений требовалось заранее удовлетворить кинематическим краевым условиям на поверхности S_u. Применение метода вариации напряжений связано с необходимостью предварительного удовлетворения условий равновесия и краевых условий на поверхности S_σ. Однако предварительные условия с помощью множителей Лагранжа могут быть включены в функционал /4/.

Рассмотрим сначала функционал метода вариации перемещений

$$\Phi_\varepsilon = Э - \iiint\limits_V \{u\}^T\{F^*\}dV - \iint\limits_{S_\sigma}\{u\}^T\{p^*\}ds,$$

где $Э$ – потенциальная энергия деформации;

$$\delta Э = \iiint\limits_V \delta Э_1\, dV = \iiint\limits_V \{\delta\varepsilon\}^T\{\sigma\}dV = \iiint\limits_V \delta\varepsilon_{ij}\,\sigma_{ij}\,dV.$$

В функционале (3) варьируется смещение $\{u\}$ при условии (2). Присоединим это условие к функционалу (3) и получим

$$\Phi_\varepsilon^T = Э - \iiint\limits_V \{u\}^T\{F^*\}dV - \iint\limits_{S_\sigma}\{u\}^T\{p^*\}ds - \iint\limits_{S_u}\{\lambda\}^T(\{u\}-\{u^*\})ds,$$

где $\{\lambda\} = \begin{Bmatrix}\lambda_1\\ \lambda_2\\ \lambda_3\end{Bmatrix}$ – вектор множителей Лагранжа.

Вариация функционала по $\{u\}$ и $\{\lambda\}$

$$\delta\Phi_\varepsilon^+ = \iiint\limits_V \{\delta\varepsilon\}^T\{\sigma\}dV - \iiint\limits_V \{\delta u\}^T\{F^*\}dV - \iint\limits_{S_\sigma}\{\delta u\}^T\{p^*\}ds -$$

$$- \iint\limits_{S_u}\{\delta\lambda\}^T(\{u\}-\{u^*\})ds - \iint\limits_{S_u}\{\delta u\}^T\{\lambda\}ds = 0. \qquad (13)$$

С помощью интегрирования по частям и преобразования Гаусса-Остроградского находим

$$\iiint\limits_V \{\delta\varepsilon\}^T\{\sigma\}dV = \iint\limits_{S_\sigma}\{\delta u\}^T[L]^T\{\sigma\}ds + \iint\limits_{S_u}\{\delta u\}^T[L]^T\{\sigma\}ds -$$

$$- \iiint\limits_V \{\delta u\}^T[D]^T\{\sigma\}dV,$$

где операторы

$$[D] = \begin{bmatrix} \partial/\partial x & 0 & 0 \\ 0 & \partial/\partial y & 0 \\ 0 & 0 & \partial/\partial z \\ \partial/\partial y & \partial/\partial x & 0 \\ 0 & \partial/\partial z & \partial/\partial y \\ \partial/\partial z & 0 & \partial/\partial x \end{bmatrix}, \qquad [L] = \begin{bmatrix} \ell & 0 & 0 \\ 0 & m & 0 \\ 0 & 0 & n \\ m & \ell & 0 \\ 0 & n & m \\ n & 0 & \ell \end{bmatrix}.$$

Теперь из (I3) следует:

$$\delta\Phi_\varepsilon^+ = -\iiint_V \{\delta u\}^T([D]^T\{\sigma\}+\{F^*\})dV + \iint_{S_\sigma}\{\delta u\}^T([L]^T\{\sigma\} -$$

$$-\{p^*\})dS + \iint_{S_u}\{\delta u\}^T([L]^T\{\sigma\}-\{\lambda\})dS - \iint_{S_u}\{\delta\lambda\}^T(\{u\}-\{u^*\})dS = 0.$$

В силу произвольности вариаций $\{\delta u\}$ и $\{\delta\lambda\}$ из последнего соотношения получаем

$$\{\lambda\} = [L]^T\{\sigma\} = \{p\}. \qquad (I4)$$

По физическому смыслу множители Лагранжа равны распределенным усилиям, действующим на поверхности S_u .

Вариация расширенного функционала Лагранжа

$$\delta\Phi_\varepsilon^+ = \iiint_V \{\delta u\}^T([D]\{\sigma\}+\{F^*\})dV + \iint_{S_\sigma}\{\delta u\}^T[L]^T\{\sigma\}-\{p^*\})ds -$$

$$-\iint_{S_u}\{\delta p\}^T(\{u\}-\{u^*\})ds = 0.$$

В силу соотношения (I4) представим вариационное уравнение Лагранжа в основной форме:

$$\delta\Phi_\varepsilon^+ = \iiint_V\{\delta\varepsilon\}^T\{\sigma\}dV - \iiint_V\{\delta u\}^T\{F^*\}dV - \iint_{S_\sigma}\{\delta u\}^T\{p^*\}dS -$$

$$-\iint_{S_u}\{\delta u\}^T[L]^T\{\sigma\}ds - \iint_{S_u}\{\delta p\}^T(\{u\}-\{u^*\})dS = 0. \qquad (I5)$$

При использовании уравнения (I5) не требуется предварительного удовлетворения краевым условиям на поверхности S_u .

Функционал Вашицу эквивалентен всем статическим, геометрическим и физическим уравнениям теории упругости и пластичности, а также статическим и геометрическим краевым условиям /4/.

Указанные уравнения таковы:

статические $\qquad \sigma_{ij,j} + F_i = 0;$ (I6)

геометрические $\qquad \varepsilon_{ij} = \frac{1}{2}(u_{i,j} + u_{j,i});$ (I7)

физические $\qquad \sigma_{ij} = \frac{\partial Э_1}{\partial\varepsilon_{ij}}.$ (I8)

В равенстве (I8) $Э_1$ - потенциальная энергия деформации; в частном случае равенство (I8) содержит закон Гука, зависимости Генки-Ильюшина и др.

Краевые условия в рассматриваемых задачах:

статические $\quad \sigma_{ij} l_j = P_i^* \in S_\sigma$; (19)

геометрические $\quad u_i = u_i^* \in S_u$. (20).

Функционал Лагранжа эквивалентен статическим условиям равновесия внутренних и внешних элементов тела.

Присоединяя к нему с помощью множителей Лагранжа уравнения (17) и (20), запишем:

$$\Phi_B = \iiint_V \Im_1 dV - \iiint_V u_i F_i^* dV - \iint_{S_\sigma} u_i P_i^* dS - \iiint_V \lambda_{ij} (\varepsilon_{ij} -$$

$$- \frac{1}{2}(u_{i,j} + u_{j,i})) dV - \iint_{S_u} \lambda_i (u_i - u_i^*) dS,$$

где λ_{ij} и λ_i – множители Лагранжа в функционале Вашицу.

Перемещения, напряжения, деформации и множители Лагранжа варьируются как независимые величины.

Опуская промежуточные выкладки, приведем окончательный результат:

$$\delta\Phi_B = \iiint_V \left(\frac{\partial \Im_1}{\partial \varepsilon_{ij}} - \sigma_{ij}\right) \delta\varepsilon_{ij} dV - \iiint_V (\varepsilon_{ij} - \frac{1}{2}(u_{i,j} + u_{j,i})) \delta\sigma_{ij} dV -$$

$$- \iiint_V (\sigma_{ij,j} + F_i^*) \delta u_i dV + \iint_{S_\sigma} (\sigma_{ij} l_j - P_i^*) \delta u_i dS - \iint_{S_u} (u_i -$$

$$- u_i^*) l_j \delta\sigma_{ij} dS = 0.$$

<u>Функционал Рейснера</u> основан на расширении функционала Кастельяно. Вариационное уравнение Рейснера имеет следующий вид:

$$\delta\Phi_P = \iiint_V \left(\varepsilon_{ij} - \frac{\partial \Im_{1\partial}}{\partial \sigma_{ij}}\right) \delta\sigma_{ij} dV - \iiint_V (\sigma_{ij,j} + F_i) \delta u_i dV +$$

$$+ \iint_{S_\sigma} (\sigma_{ij} l_j - P_i^*) \delta u_i dS - \iint_{S_u} l_j \delta\sigma_{ij} (u_i - u_i^*) dS = 0.$$

Независимо варьируются напряжения и перемещения. Функционал Рейснера эквивалентен физическому уравнению

$$\varepsilon_{ij} = \frac{\partial \Im_{1\partial}}{\partial \sigma_{ij}},$$

а также уравнениям (16), (19) и (20).

Выполнение уравнений Коши и уравнений совместности деформаций обеспечивается условием стационарности функционала.

Библиографический список

1. Папкович П.Ф. Теория упругости. - М.:Оборонгиз, 1939. - 169 с.
2. Лейбензон Л.С. Вариационные методы решения задач теории упругости.- М.:Гостехиздат, 1943. - 172 с.
3. Биргер И.А. Вариационные методы в строительной механике турбомашин.- М.:Оборонгиз, 1959. - 234 с.
4. Постнов В.А. Численные методы расчета судовых конструкций.- Л.: Судостроение, 1975. - 320 с.

УДК 539.3:534.1

О.Ф.Борискин, О.В.Репецкий

К РАСЧЕТУ СОБСТВЕННЫХ КОЛЕБАНИЙ ЛОПАТОЧНЫХ ВЕНЦОВ ГТД НА ОСНОВЕ КОНЕЧНОЭЛЕМЕНТНЫХ МОДЕЛЕЙ

В настоящей работе описан алгоритм, объединяющий методы суперэлементов и циклической симметрии, приведены результаты расчета колебаний лопаточного венца как единой упругой системы.

Большое внимание к исследованию колебаний механических систем с поворотной симметрией /1,2/ связано, прежде всего, с двумя факторами. Во-первых, конструкции подобного типа находят широкое распространение как в общем машиностроении, так и в авиационном газотурбостроении. Наиболее характерным примером таких конструкций являются осевые и радиальные рабочие колеса. Во-вторых, благодаря специфическим особенностям конструкций такого типа анализ колебаний всей системы может быть проведен при рассмотрении ее отдельной части. Таким образом удается значительно сократить трудоемкость расчетов и выполнить их на ЭВМ среднего класса.

Известные до настоящего времени конечноэлементные методики исследования колебаний систем с поворотной симметрией /3,4,5/ приводят к решению задачи о собственных значениях для симметричных, полностью заполненных матриц. Это накладывает существенные ограничения на размерность решаемой задачи и не позволяет применить данные алгоритмы при расчете реальных деталей турбомашин. Для устранения этого недостатка предлагается комплексная методика, основанная на совместном использовании процедуры статической конденсации для динамических