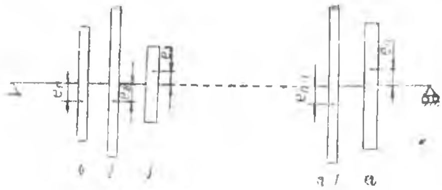
КУЙБЫШЕВСКИЙ АВИАЦИОННЫЙ ИНСТИТУТ
ТРУДЫ. ВЫПУСК XIX. 1965 г.
Вибрационная прочность и надежность авиационных двигателей

В. П. РОЙЗМАН

УРАВНОВЕШИВАНИЕ УПРУГО-ДЕФОРМИРУЕМЫХ РОТОРОВ

Наряду с разработкой систем автоматического уравновешивания на ходу двигателя, а также различных демпфирующих устройств большое значение имеет создание таких промышленных методов уравновешивания, которые, обеспечивая общий низкий уровень вибраций, приводили бы к ликвидации опасных резонансных режимов в том смысле, чтобы двигатель на резонансных оборотах имел амплитуду колебаний не больше, чем на каких-либо других.

Проведенные эксперименты по уравновешиванию высокооборотного турбогенератора (n=39 000 об/мин) и роторов компрессоров мощных ГТД показывают реальность создания такой методики.



Фиг. 1.

Рассмотрим некоторые особенности поведения упруго-деформируемого ротора и возможность ликвидации неуравновешенных сил в местах посадки дисков.

Пусть дан вал, несущий n дисков, посаженных с некоторыми эксцентриситетами e_1, e_2... e_n (фиг. 1), лежащими в одной плоскости. Практически всегда можно этого добиться, искусственно сведя любую неуравновешенность в одну плоскость, приводя общую задачу к этому частному случаю.

Известно, что для упруго-деформируемого ротора прогиб и неуравновешенная сила под каждым из дисков зависят не только от своего эксцентриситета, как в случае жесткого вала, но и от эксцентриситетов и прогибов всех других дисков.

Без учета гигроскопических моментов выражения для прогибов имеют следующий вид:

$$y_i = \sum_{\kappa=1}^{n} m_k \alpha_{i\kappa} \omega^2 (e_\kappa + y_\kappa), \tag{1}$$

а для неуравновешенных сил:

$$p_i = m_i\, e_i\, \omega^2 + m_i\, \omega^2 \sum_{\kappa=2}^{n} m_\kappa\, \alpha_{i\kappa} \omega^2 (e_\kappa + y_\kappa), \tag{2}$$

где $i = 1,\ 2,\ 3 \ldots\ n$;

$\alpha_{i\kappa}$ — прогиб в месте посадки диска i от единичной силы, приложенной в месте K;

y_i — прогиб под диском i;

p_i — центробежная неуравновешенная сила под диском i;

ω — угловая скорость ротора;

e_κ — эксцентриситет диска K;

y_κ — прогиб под диском K.

Поставим задачу: подобрать и направить эксцентриситеты $e_1, e_2, \ldots e_n$ таким образом, чтобы образованные от их влияния неуравновешенные силы на рабочих оборотах были бы равны нулю.

Решая систему уравнений (1), находим:

$$y_1 = \frac{1}{B} \left| \begin{array}{c} -(e_1 m_1 \alpha_{11} \omega^2 + e_2 m_2 \alpha_{12} \omega^2 + \ldots + e_n\, \alpha_{1n} m_n\, \omega^2) \\ \alpha_{12} m_2 \omega^2 \ \ldots\ \alpha_{1n} m_n\, \omega^2 \\ -(e_1 m_1 \alpha_{21} \omega^2 + e_2 m_2 \alpha_{22} \omega^2 + \ldots\ e_n\, \alpha_{2n} m_n\, \omega^2) + \\ \alpha_{22} m_2 \omega^2 - 1 \ \ldots\ \alpha_{2n} m_n\, \omega^2 \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ -(e_1 m_1 \alpha_{n1} \omega^2 + e_2 m_2 \alpha_{n2} \omega^2) + \ldots + e_n\, \alpha_{nn} m_n\, \omega^2) \\ \alpha_{n2} m_2 \omega^2 \ \ldots\ \alpha_{nn} m_n\, \omega^2 - 1 \end{array} \right| .$$

$$y_2 = \frac{1}{B} \left| \begin{array}{c} \alpha_{11} m_1 \omega_2 - 1 \ -(e_1 m_1 \alpha_{11} \omega^2 + e_2 m_2 \alpha_{12} \omega^2 + \ldots \\ \ldots + e_n\, \alpha_{1n} m_n\, \omega^2) \ \ldots\ \alpha_{1n} m_n\, \omega^2 \\ \alpha_{21} m_1 \omega^2 - (e_1 m_1 \alpha_{21} \omega^2 + e_2 m_2 \alpha_{22} \omega^2 + \ldots \\ \ldots + e_n\, \alpha_{2n} m_n\, \omega^2) \ \ldots\ \alpha_{2n} m_n\, \omega^2 \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ m_1 \alpha_{n1} \omega^2 - (e_1 m_1 \alpha_{n1} \omega^2 + e_2 m_2 \alpha_{n2} \omega^2 + \ldots \\ \ldots + e_n\, \alpha_{nn} m_n\, \omega^2 - 1\ \alpha_{nn} m_n\, \omega^2 - 1 \end{array} \right| .$$

. . . .

. . . .

. . . .

$$y_n = \frac{1}{B}\begin{vmatrix} \alpha_{11}m_1\omega^2 - 1 \quad \alpha_{12}m_2\omega^2 \ \ldots \\ \ldots - (e_1m_1\alpha_{11}\omega^2 + e_2m_2\alpha_{12}\omega^2 + \ldots + e_n\,\alpha_{1n}m_n\,\omega^2) \\ \alpha_{21}m_1\omega^2 \quad \alpha_{22}m_2\omega^2 - 1 \ \ldots \\ \ldots - (e_1m_1\alpha_{21}\omega^2 + e_2m_2\alpha_{22}\omega^2 + \ldots + e_n\,\alpha_{2n}m_n\,\omega^2) \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ m_1\alpha_{n1}\omega^2 \quad \alpha_{n2}m_2\omega^2 \ldots - \\ \ldots - (e_1m_1\alpha_{n1}\omega^2 + e_2m_2\alpha_{n2}\omega^2 + \ldots + e_n\,\alpha_{nn}m_n\,\omega^2), \end{vmatrix},$$

где $$B = \begin{vmatrix} \alpha_{11}m_1\omega^2 - 1 & \alpha_{12}m_2\omega^2 & \ldots & \alpha_{1n}m_n\,\omega^2 \\ m_1\alpha_{21}\omega^2 & \alpha_{22}m_2\omega^2 - 1 & \ldots & \alpha_{2n}m_n\,\omega^2 \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ m_1\alpha_{n1}\omega^2 & m_2\alpha_{n2}\omega^2 & \ldots & \alpha_{nn}m_n\,\omega^2 - 1. \end{vmatrix}.$$

Здесь сразу можно поставить условие ужесточения упруго-деформируемого ротора, для чего положим во всех уравнениях прогибы равными нулю и будем искать решения для случаев $e_1, e_2 \ldots e_n$, не равных нулю. Считая знаменатель $B \neq 0$, можно приравнять нулю числители и получить систему n однородных линейных уравнений с n неизвестными e. Ясно, что решением системы будет равенство всех эксцентриситетов нулю. Нетривиальное решение системы можно получить в том случае, если приравнять нулю определитель, составленный из коэффициентов при неизвестных e.

Решив затем получившуюся систему, мы найдем зависимость между $e_1, e_2 \ldots e_n$, которая обеспечит отсутствие прогибов на каких-то определенных оборотах.

Рассмотрим вопрос уравновешивания сил на дисках. Подставив в уравнения (2) значения y, определенные из выражений (1) и сделав несложные преобразования, получим такие выражения сил:

$$P_1 = m_1e_1\omega^2 \begin{vmatrix} -1 & \alpha_{12}m_2\omega^2 & \ldots & \alpha_{1n}m_n\,\omega^2 \\ 0 & \alpha_{22}m_2\omega^2 - 1 & \ldots & \alpha_{2n}m_n\,\omega^2 \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ 0 & m_2\alpha_{n2}\omega^2 & \ldots & \alpha_{nn}m_n\,\omega^2 - 1 \end{vmatrix} -$$

$$- e_2m_1\omega^2 \begin{vmatrix} m_2\alpha_{12}\omega^2 & 0 & \ldots & \alpha_{1n}m_n\,\omega^2 \\ m_2\alpha_{22}\omega^2 - 1 & & \ldots & \alpha_{2n}m_n\,\omega^2 \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ m_2\alpha_{n2}\omega^2 & 0 & \ldots & \alpha_{nn}m_n\,\omega^2 - 1 \end{vmatrix} -$$

$$
- \ldots - e_n m_1 \omega^2 \begin{vmatrix} m_n \alpha_{1n}\omega^2 & \alpha_{12} m_2 \omega^2 & \ldots & 0 \\ m_n \alpha_{2n}\omega^2 & \alpha_{22} m_2 \omega^2 - 1 & \ldots & 0 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ m_n \alpha_{nn}\omega^2 & m_2 \alpha_{n2}\omega^2 & \ldots & -1 \end{vmatrix}.
$$

. . . .

. . . .

. . . .

. . . .

$$
P_n = e_n m_n \omega^2 \begin{vmatrix} \alpha_{11} m_1 \omega^2 - 1 & m_2 \alpha_{12}\omega^2 & \ldots & 0 \\ \alpha_{21} m_1 \omega^2 & m_2 \alpha_{22}\omega^2 - 1 & \ldots & 0 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \alpha_{n1} m_1 \omega^2 & m_2 \alpha_{n2}\omega^2 & \ldots & -1 \end{vmatrix} -
$$

$$
- e_1 m_n \omega^2 \begin{vmatrix} -1 & m_2 \alpha_{12}\omega^2 & \ldots & m_1 \alpha_{11}\omega^2 \\ 0 & m_2 \alpha_{22}\omega^2 - 1 & \ldots & m_1 \alpha_{21}\omega^2 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ 0 & m_2 \alpha_{n2}\omega^2 & \ldots & m_1 \alpha_{n1}\omega^2 \end{vmatrix} -
$$

$$
- e_2 m_n \omega^2 \begin{vmatrix} \alpha_{11} m_1 \omega^2 - 1 & 0 & \ldots & m_2 \alpha_{12}\omega^2 \\ \alpha_{22} m_1 \omega^2 & -1 & \ldots & m_2 \alpha_{22}\omega^2 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \alpha_{n1} m_1 w^2 & 0 & \ldots & m_2 \alpha_{n2} w^2 \end{vmatrix} - \ldots
$$

Если теперь положить все неуравновешенные силы равными нулю, то из получившихся однородных уравнений можно определить зависимость между $e_1, e_2 \ldots e_n$, которая приведет к уничтожению неуравновешенных сил на рабочих оборотах.

Рассмотрим более конкретно возможность такого уравновешивания на примере двухдискового ротора высокооборотного турбогенератора.

Для этого случая выражения неуравновешенных сил в местах посадки дисков имеют следующий вид:

$$P_1 = \frac{m_1 e_1 \omega^2 \begin{vmatrix} \alpha_{11} m_1\omega^2 - 1 & \alpha_{12} m_2 \omega^2 \\ m_1 \alpha_{21} \omega^2 & \alpha_{22} m_2 \omega^2 - 1 \end{vmatrix}}{B} + \frac{+ m_1 \omega^2 \begin{vmatrix} -(e_1 m_1 \alpha_{11}\omega^2 + e_2 m_2 \alpha_{12} \omega^2) & \alpha_{12} m_2 \omega^2 \\ -(e_1 m_1 \alpha_{21} \omega^2 + e_2 m_2 \alpha_{22} \omega^2) & \alpha_{22} m_2 \omega^2 - 2 \end{vmatrix}}{B};$$

$$P_2 = \frac{m_2 e_2 \omega^2 \begin{vmatrix} \alpha_{11} m_1 \omega^2 - 1 & \alpha_{12} m_2 \omega^2 \\ m_1 \alpha_{21} \omega^2 & \alpha_{22} m_2 \omega^2 - 1 \end{vmatrix}}{B} + \frac{+ m_2 \omega^2 \begin{vmatrix} \alpha_{11} m_1 \omega^2 - 1 & -(e_1 m_1 \alpha_{11} \omega^2 + e_2 m_2 \alpha_{12} \omega^2) \\ \alpha_{12} m_1 \omega^2 & -(e_1 m_1 \alpha_{21} \omega^2 + e_2 m_2 \alpha_{22} \omega^2) \end{vmatrix}}{B};$$

Сделав преобразования, получим

$$P_1 = \frac{m_1 \omega^2 \left[e_1 (1 - \alpha_{22} m_2 \omega^2) + e_2 m_2 \alpha_{12} \omega^2 \right]}{B} \tag{3}$$

$$P_2 = \frac{m_2 \omega^2 \left[e_1 m_1 \alpha_{21} \omega^2 + e_2 (1 - m_1 \alpha_{11} \omega^2) \right]}{B}, \tag{4}$$

где

$$B = \begin{vmatrix} \alpha_{11} m_1 \omega^2 - 1 & \alpha_{12} m_2 \omega^2 \\ \alpha_{21} m_1 \omega^2 & \alpha_{22} m_2 \omega^2 - 1 \end{vmatrix}.$$

Равенство нулю неуравновешенных сил дает следующие однородные уравнения:

$$\left. \begin{aligned} e_2 (1 - \alpha_{22} m_2 \omega^2) + e_2 m_2 \alpha_{12} \omega^2 = 0 \\ e_1 \alpha_{21} m_1 \omega^2 + e_2 (1 - \alpha_{11} m_1 \omega^2) = 0 \end{aligned} \right\}. \tag{5}$$

В обоих случаях мы приводили уравнения к общему знаменателю, считая $B \neq 0$;

Этим уравнениям удовлетворяют значения $e_1 = e_2 = 0$. Это — верные решения, однако не представляющие для нас интереса, т. к. мы не можем добиться такой идеальной сбалансированности.

Для отыскания нетривиальных решений составим определитель из коэффициентов при e_1 и e_2 и приравняем его к нулю:

$$\begin{vmatrix} 1 - \alpha_{22} m_2 \omega^2 & \alpha_{12} m_2 \omega^2 \\ \alpha_{22} m_1 \omega^2 & 1 - a_{11} m_1 \omega^2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \alpha_{11} m_1 \omega^2 - 1 & \alpha_{12} m_2 \omega^2 \\ m_1 \alpha_{21} \omega^2 & \alpha_{22} m_2 \omega^2 - 1 \end{vmatrix} = 0;$$

Мы видим, что это не что иное, как B, которое, будучи равным нулю, определяет наличие критического режима, ибо является частотным уравнением для определения критической скорости.

Можно показать, что $P_1 = P_2 = 0$ и в том случае, когда $\omega \to \infty$, что видно и непосредственно из уравнений сил (3) и (4).

Таким образом на режимах, отличных от критических и от $\omega \to \infty$, нельзя полностью избавиться от неуравновешенных сил, полная уравновешенность может быть достигнута лишь на этих режимах.

С физической точки зрения это означает, что вращение дисков на этих режимах должно происходить вокруг истинных центров тяжести с прогибами, равными $-e_1$ для первого диска и $-e_2$ для второго.

Отбрасывая случай $\omega \to \infty$, мы приходим к выводу, что для наилучшего уравновешивания следует выбирать не просто рабочие обороты, а критические и, если позволяет прочность вала, вести уравновешивание для них, либо максимально к ним приближаясь.

Устранив на критических оборотах неуравновешенные силы, совпадающие с частотой собственных колебаний ротора, мы ликвидируем сам критический режим (избавимся от роста амплитуд на этом режиме), т. к. собственной частоте ротора просто не с чем будет совпадать.

Принципиально имеется возможность производить уравновешивание и на низкооборотных станках, задавая на них первоначальную неуравновешенность, рассчитанную на устранение сил при критических оборотах.

Для этого случая из уравнения (5) находим следующее соотношение для дисбалансов:

$$e_1 = -e_2 \frac{m_2 \alpha_{12} \omega_{\text{кр}}^2}{1 - \alpha_{22} m_2 \omega_{\text{кр}}^2} = -e_2 \frac{1 - \alpha_{11} m_1 \omega_{\text{кр}}^2}{m_1 \alpha_{21} \omega_{\text{кр}}^2}, \tag{6}$$

где $\omega_{\text{кр}}$ — критическая угловая скорость ротора.

Процесс балансировки сводится к тому, чтобы, используя эти станки, сводить имеющуюся в роторе неуравновешенность в одну плоскость и располагать дисбалансы согласно выведенным соотношениям (6).

Для сложных конструкций определение дисбалансов расчетным путем может оказаться неточным. В этом случае, используя опыт уравновешивания на резонансных (или околорезонансных) оборотах, можно также определить соотношения между дисбалансами и переходить к уравновешиванию на обычных низкооборотных станках, задавая на них первоначальные дисбалансы, обеспечивающие безвибрационную работу двигателя на резонансной скорости вращения.

Следует заметить, что подшипники ротора все же не будут работать спокойно из-за наличия прогибов — e_1 и e_2, но уровень вибраций значительно снизится.

Из соотношения (6) следует, что ротор, будучи уравновешен на критическом числе оборотов, при переходе на другие обороты утратит состояние равновесия.

Чтобы избавиться от этого, следует использовать условия оргогональности, которые связывают между собой упругие линии при критических оборотах. Это обстоятельство рассмотрено А. Мелдалем [2].

Если обозначить: $y_m(x)$ — упругая линия ротора при критической угловой скорости вращения ω_m; $y_n(x)$ — упругая линия ротора при критической угловой скорости ω_n; $m(x)$ — погонная масса ротора, то условия ортогональности записываются так:

$$(\omega_m^2 - \omega_n^2)\int_0^l y_m y_n m dx = 0; \quad \text{или} \quad \int_0^l y_m y_n m dx = 0;$$

т. е. работа, которую производят инерционные силы $m y_n \omega_m^2$ при прогибе y_m всегда равна нулю.

Для нашего случая это значит, что уравновесив ротор на первой критической скорости, можно произвести уравновешивание на 2-й критической скорости, затем на 3-й и т. д. Дисбалансы, которые установлены на какой-либо одной критической скорости, в силу условий ортогональности не могут повлиять на сбалансированность ротора при других критических скоростях.

Так как прогибы ротора при любых оборотах могут быть представлены как сумма критических прогибов, умноженных на какую-то константу, то ротор, уравновешенный на всех критических оборотах, будет уравновешен для всех оборотов.

Практически же достаточно произвести уравновешивание ротора на тех критических оборотах, которые лежат ниже максимальных рабочих оборотов.

Изложенные теоретические предпосылки качественно согласуются с экспериментальными данными, полученными при исследовании натурных двигателей или их роторов в вакуумкамере.

Маломощный высокооборотный турбогенератор, который при проверке на балансировочном станке (проверка производилась на полностью собранном двигателе) имел дисбаланс 1 *гсм* по компрессору и турбине, не мог пройти сдаточных испытаний из-за больших вибраций.*

Неоднократные переборки и перебалансировки не привели к желаемому результату.

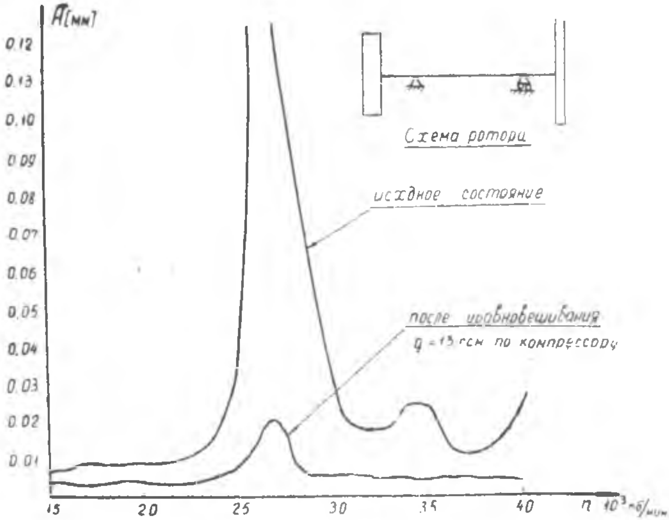
Прокрутив двигатель в вакуумкамере, с помощью емкостных датчиков удалось определить величины прогибов и характер вибрации на всех оборотах, до 40000 *об/мин.* Результаты балансировки приведены на фиг. 2. Уравновешивание на резонансном режиме (n=27 000 *об/мин*) позволило значительно снизить уровень вибраций за счет постановки уравновешивающих грузов q_1=13 *гсм* в компрессор и q_2=0,7 *гсм* — в турбину.

---

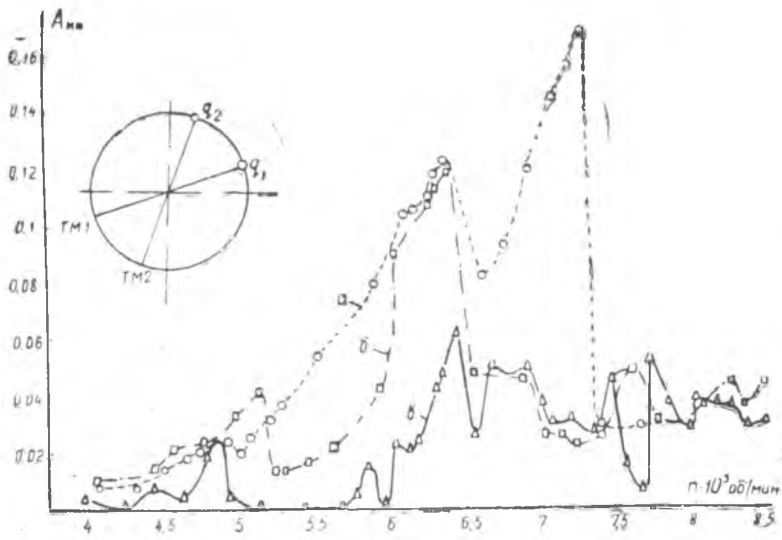
* Описание установки, методика испытаний и результаты экспериментов изложены в докладе к. т. н. Левита М. Е. на конференции и в отчетах МАИ.

Уровень вибраций на 27000 *об/мин* снизился более чем в 5 раз, а на 37000 *об/мин* — более чем в 4 раза.

Величина прогиба по валу снизилась до 0,18 *мм*, против 0,7 *мм* первоначального.



Фиг. 2. Изменение амплитуды колебаний турбогенератора в зависимости от внесенного груза.



Фиг. 3. Зависимость амплитуды вибраций ротора компрессора от уравновешивающего груза.

а — исходное состояние; *б* — внесен груз $q_1 = 250$ *гсм*; *в* — внесен дополнительный груз $q_2 = 125$ *гсм* в новое место, ТМ1 и ТМ2 — тяжелые места 1-е и 2-е.

На фиг. 3 приведены результаты уравновешивания ротора компрессора мощного ТРД, который на низкооборотном станке также не имел дисбалансов, выходящих за пределы допустимых, однако из-за трудностей, связанных с колебаниями, был отснесен к категории роторов с неустранимой вибрацией. При прокрутке в вакуумкамере у него оказалось 2 резонансных пика на оборотах 6400 и 7200 *об/мин* и соответствующие им «тяжелые места».

Уравновешивание производилось по трем плоскостям коррекции — 1-й, 3-й и 9-й ступеням, причем, наиболее эффективной оказалась 3-я ступень. Внеся груз $q_1 = 250$ *гсм* в 3-ю ступень, удалось резко понизить амплитуды колебаний на 7200 *об/мин*, однако остался пик на 6400 *об/мин*. Постановкой груза $q_2 = 125$ *гсм* в эту же ступень, но в другое место удалось в 2 раза снизить уровень вибраций на оборотах 6400 *об/мин*. Уровень вибраций на всех оборотах оказался значительно сниженным, хотя при проверке на низкооборотном станке у отбалансированного таким образом ротора оказался недопустимо большой дисбаланс — порядка 1000 *гсм*.

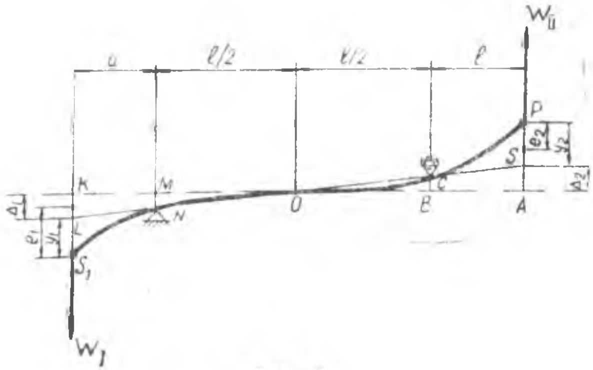
УРАВНОВЕШИВАНИЕ СИЛ С УЧЕТОМ ВЛИЯНИЯ ЗАЗОРОВ В ПОДШИПНИКАХ

Рассмотрим на предыдущем примере уравновешивание с учетом влияния зазоров в подшипниках и сделаем вывод уравнений сил для закритического режима работы.

Упругая линия вала, соответствующая второй форме колебаний, имеет вид, изображенный на фиг. 4.

Здесь линия KA — ось подшипников; LS — ось перекошенного вала; линия S_1OP — ось перекошенного погнутого вала.

Примем положение узла колебаний в точке O, расположенной на равном расстоянии от опор.



Фиг. 4.

Обозначим: Δ_1 — смещение центра тяжести первого диска за счет зазоров в подшипниках;

Δ_2 — смещение центра тяжести второго диска за счет зазоров в подшипниках;

$\Delta_A = 2MN$ — зазор в подшипнике № 1;

$\Delta_B = 2CB$ — зазор в подшипнике № 2.

Определим смещение центров тяжести дисков из-за зазоров в подшипниках. Из подобия треугольников OMN и OLK, а также OCB и OSA имеем:

$$\Delta_1 = \frac{\Delta_A}{2} \frac{2a+l}{l} \text{ и } \Delta_2 = \frac{\Delta_B}{2} \frac{2b+l}{l}.$$

Если мы рассматриваем вал, работающий за первой критической скоростью, то силы в центрах тяжести дисков направлены в противоположные стороны. Эксцентриситеты дисков и смещения центров тяжестей и зазоров при составлении уравнений сил должны иметь противоположные знаки.

Воспользуемся методом наложения, использованным С. Тимошенко. Допустим, что только диск I имеет эксцентриситет, а на втором диске он отсутствует. Рассматривая случай работы за первым критическим режимом, имеем:

$P_1 = (y_1 + \Delta_1 - e_1) m_1\omega^2$ — центробежная сила на первом диске от влияния e_1;

$P_2 = (y_2 + \Delta_2) m_2\omega^2$ — центробежная сила на втором диске от влияния l_2. Подставив в эти уравнения $y_1 = \alpha_{11}P_1 + \alpha_{12}P_2$ и $y_2 = \alpha_{21}P_1 + \alpha_{22}P_2$ и решив относительно P_1 и P_2, получаем:

$$P_1 = \frac{(\Delta_1 - e_1)\, m_1\omega^2 (1 - \alpha_{22}m_2\omega^2) + m_1 m_2 \alpha_2 \Delta_2 \omega^4}{(1 - \alpha_{11}m_1\omega^2)(1 - \alpha_{22}m_2\omega^2) - m_1 m_2 \alpha_{12}\alpha_{21}\omega^4};$$

$$P_2 = \frac{(\Delta_1 - e_1)\, m_1 m_2 \alpha_{21}\omega^4 + (1 - \alpha_{11}m_1\omega^2)\, m_2 \Delta_2 \omega^2}{(1 - \alpha_{11}m_1\omega^2)(1 - \alpha_{22}m_2\omega^2) - m_1 m_2 \alpha_{12}\alpha_{21}\omega^4}.$$

Положив теперь, что только диск II имеет эксцентриситет e_2, а на первом диске он отсутствует, получим еще две силы:

$$P_2' = \frac{(\Delta_2 - e_2)(1 - \alpha_{11}m_1\omega^2)\, m_2\omega^2 + m_1 m_2 \alpha_{21}\Delta_1\omega^4}{(1 - \alpha_{11}m_1\omega^2)(1 - \alpha_{22}m_2\omega^2) - m_1 m_2 \alpha_{12}\alpha_{21}\omega^4};$$

$$P_1' = \frac{(\Delta_2 - e_2)\, m_1 m_2 \alpha_{12}\omega^4 + (1 - \alpha_{22}m_2\omega^2)\, m_1\omega^2\Delta_1}{(1 - \alpha_{11}m_1\omega^2)(1 - \alpha_{22}m_2\omega^2) - m_1 m_2 \alpha_{12}\alpha_{21}\omega^4}.$$

Здесь P_2' — центробежная сила на втором диске от влияния e_2.
P_1' — центробежная сила на первом диске от влияния e_2,

Рассматривая случай расположения дисбалансов на дисках в одной плоскости, проходящей через ось вала, можем произвести суммирование сил в плоскостях 1-го и 2-го дисков и потребовать равенства суммарных сил нулю.

Обозначив $W_1 = P_1 + P_1'$ и $W_2 = P_2 + P_2'$ и сделав несложные преобразования, имеем:

$$\begin{cases} W_1 = \dfrac{(2\Delta_1 - e_1)(1 - m_2\alpha_{22}\omega^2) + (2\Delta_2 - e_2)\, m_2\alpha_{12}\omega^2}{(1 - \alpha_{11}m_1\omega^2)(1 - \alpha_{22}m_2\omega^2) - m_1 m_2 \alpha_{12}\alpha_{21}\omega^4} = 0; \\[2ex] W_2 = \dfrac{(2\Delta_2 - e_2)(1 - \alpha_{11}m_1\omega^2) + (2\Delta_1 - e_1)\, m_1\alpha_{21}\omega^2}{(1 - \alpha_{11}m_1\omega^2)(1 - \alpha_{22}m_2\omega^2) - m_1 m_2 \alpha_{12}\alpha_{21}\omega^4} = 0. \end{cases}$$

Полагая знаменатели неравными нулю, приравняем нулю числители. Тогда получим следующие уравнения с неизвестными e_1 и e_2:

$$(2\Delta_1 - e_1)(1 - \alpha_{22} m_2 \omega^2) + (2\Delta_2 - e_2) m_2 \alpha_{12} \omega^2 = 0;$$

$$(2\Delta_2 - e_2)(1 - \alpha_{11} m_1 \omega^2) + (2\Delta_1 - e_1) m_1 \alpha_{21} \omega^2 = 0.$$

Как видим, система уравнений имеет решение в случае $e_1 = 2\Delta_1$ и $e_2 = 2\Delta_2$, где, как указывалось, Δ_1 и Δ_2 — смещения центров тяжестей дисков I и II за счет влияния зазоров в подшипниках.

Из предыдущего видно, что простое уменьшение эксцентриситетов, как это обычно делается на балансировочных станках, не приведет к уничтожению неуравновешенных сил и такая балансировка может быть применена лишь для устранения грубой неуравновешенности. Диск будет уравновешен при наличии определенных дисбалансов, определяемых выведенными соотношениями.

ЛИТЕРАТУРА

1. *С. П. Тимошенко*. Теория колебаний в инженерном деле.
2. *A. Meldahl*. Auswuchten elastischer Rotoren. «ZAMM», Bd. 34. H 8/9, 1954.