

Л. И. ФРИДМАН

ТЕМПЕРАТУРНЫЕ НАПРЯЖЕНИЯ В КОЖУХЕ КОЛЬЦЕВОЙ КАМЕРЫ СГОРАНИЯ

Кожух кольцевой камеры сгорания газовой турбины выполняется в виде тонкостенной цилиндрической оболочки, подверженной неравномерному нагреву. Температура меняется как по толщине кожуха, так и по его поверхности. Изменение температуры по толщине кожуха весьма незначительно.

В настоящей работе дается метод определения температурных напряжений при произвольном распределении температур по поверхности оболочки и при неизменной температуре по толщине. На оболочке, близкой по размерам к кожуху кольцевой камеры сгорания, исследуется влияние закрепления краев и влияние распределения температуры на величину температурных напряжений.

НЕРАВНОМЕРНО НАГРЕТАЯ ЦИЛИНДРИЧЕСКАЯ СЕЛОЧКА

1. Основные зависимости для неравномерно нагретой цилиндрической оболочки. Основное разрешающее уравнение.

Компоненты полной деформации

$$\begin{aligned} \epsilon_1 &= \frac{1}{R} \frac{\partial u}{\partial \alpha}; & \epsilon_2 &= \frac{1}{R} \left(\frac{\partial v}{\partial \beta} + w \right); & \kappa_1 &= -\frac{1}{R^2} \frac{\partial^2 w}{\partial \alpha^2}; \\ \kappa_2 &= -\frac{1}{R^2} \frac{\partial^2 w}{\partial \beta^2}; & \gamma &= \frac{1}{R} \left(\frac{\partial u}{\partial \beta} + \frac{\partial v}{\partial \alpha} \right); & \kappa_{12} &= -\frac{1}{R^2} \frac{\partial^2 w}{\partial \alpha \partial \beta}. \end{aligned} \quad (1)$$

Здесь u , v , w — компоненты перемещения точек срединной поверхности соответственно вдоль образующей, вдоль касательной к окружности направляющего круга и по нормали к срединной поверхности;

ϵ_1 и ϵ_2 — относительные удлинения соответственно вдоль образующей и вдоль направляющей окружности,

κ_1 и κ_2 — изменение кривизны образующей и направляющей окружности;

γ — относительный сдвиг;

χ_{12} — кручение;
 α и β — безразмерные координаты точек срединной поверхности,
 $\alpha = \frac{x}{R}$, β — угловая координата.

Компоненты напряженного состояния

$$\begin{aligned}
 N_1 &= \frac{Eh}{1-\nu^2} [\varepsilon_1 + \nu\varepsilon_2 - (1+\nu)\alpha_t] = \\
 &= \frac{Eh}{(1-\nu^2)R} \left[\frac{\partial u}{\partial x} + \nu \left(-\frac{\partial v}{\partial \beta} + \omega \right) - (1+\nu)\alpha_t R \right]; \\
 N_2 &= \frac{Eh}{1-\nu^2} [\varepsilon_2 + \nu\varepsilon_1 - (1+\nu)\alpha_t] = \\
 &= \frac{Eh}{(1-\nu^2)R} \left[\frac{\partial u}{\partial \beta} + \omega + \nu \frac{\partial u}{\partial x} - (1+\nu)\alpha_t R \right]; \\
 S &= \frac{Eh}{2(1+\nu)} \gamma = \frac{Eh}{2(1+\nu)R} \left(\frac{\partial u}{\partial \beta} + \frac{\partial v}{\partial x} \right); \\
 M_1 &= -D(\chi_1 + \nu\chi_2) = \left(\frac{D}{R^2} + \nu \frac{\partial^2 w}{\partial \beta^2} \right); \\
 M_2 &= -D(\chi_1 + \nu\chi_2) = \frac{D}{R^2} \left(\frac{\partial^2 w}{\partial \beta^2} + \nu \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \right); \\
 M_{12} &= \frac{Eh^3}{12(1+\nu)} \chi_{12} = -\frac{Eh^3}{12(1+\nu)R^2} \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial \beta}. \tag{2}
 \end{aligned}$$

Здесь

$$D = \frac{Eh^3}{12(1-\nu^2)};$$

t — температура заданная в функции координат α и β точек срединной поверхности;

α_t — температурный коэффициент линейного расширения.

Дифференциальные уравнения равновесия:

$$\begin{aligned}
 \frac{\partial N_1}{\partial x} + \frac{\partial S}{\partial \beta} = 0, \quad \frac{\partial N_2}{\partial \beta} + \frac{\partial S}{\partial x} = 0; \quad -N_2 + \frac{\partial Q_1}{\partial x} + \frac{\partial Q_2}{\partial \beta} = 0; \\
 Q_1 = \frac{1}{R} \left(\frac{\partial M_{12}}{\partial \beta} - \frac{\partial M_1}{\partial x} \right); \quad Q_2 = \frac{1}{R} \left(\frac{\partial M_{12}}{\partial x} - \frac{\partial M_2}{\partial \beta} \right). \tag{3}
 \end{aligned}$$

Исключая из уравнений равновесия Q_1 и Q_2 , подставляя в них выражения (2), получим

$$\begin{aligned}
 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{1-\nu}{2} \frac{\partial^2 v}{\partial \beta^2} + \frac{1+\nu}{2} \frac{\partial^2 v}{\partial x \partial \beta} + \nu \frac{\partial w}{\partial x} = (1+\nu)\alpha_t \frac{\partial t}{\partial x} R; \\
 \frac{1+\nu}{2} \frac{\partial^2 u}{\partial \beta^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{1-\nu}{2} \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 w}{\partial \beta^2} = (1+\nu)\alpha + \frac{\partial t}{\partial \beta} R; \\
 \nu \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial \beta} + c^2 \nabla^2 \nabla^2 w + \omega = (1+\nu)\alpha_t R. \tag{4}
 \end{aligned}$$

Здесь:

$$c^2 = \frac{h^2}{12R^2}.$$

При действии на цилиндрическую оболочку поверхностной нагрузки, имеющей компоненты вдоль образующей X , вдоль окружности направляющего круга Y и по нормали к срединной поверхности Z в правых частях уравнений (4) вместо написанных величин будет соответственно (см. [1]):

$$- \frac{(1-\nu^2)R^2}{Eh} X; \quad - \frac{(1-\nu^2)R^2}{Eh} Y; \quad \frac{(1-\nu^2)R^2}{Eh} Z.$$

Таким образом, точки срединной поверхности неравномерно нагретой оболочки имеют такие же перемещения, как у оболочки под действием поверхностной нагрузки

$$X = - \frac{\alpha_t E h}{(1-\nu)R} \frac{\partial t}{\partial x}; \quad Y = - \frac{\alpha_t E h}{(1-\nu)R} \frac{\partial t}{\partial \beta}; \quad Z = \frac{\alpha_t E h}{(1-\nu)R} t.$$

При действии нагрузок X, Y, Z , путем введения функции $F = \Phi_x + \Phi_y + \Phi_z + \Phi$, уравнения (4) занимают одним уравнением

$$\nabla^4 \nabla^4 F + \frac{1-\nu^2}{c^2} \frac{\partial^4 F}{\partial x^4} = \frac{R^4}{D} (-X - Y + Z). \quad (5)$$

Здесь Φ — решение однородного уравнения;

$$\nabla^4 \nabla^4 \Phi + \frac{1-\nu^2}{c^2} \frac{\partial^4 \Phi}{\partial x^4} = 0. \quad (6)$$

Φ_x, Φ_y, Φ_z — частные решения, удовлетворяющие, соответственно, функциям X, Y, Z , при этом компоненты перемещения, определяемые функцией Φ :

$$u_0 = \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial^2 \Phi}{\partial \beta^2} - \nu \frac{\partial^2 \Phi}{\partial x^2} \right); \quad v_0 = - \frac{\partial}{\partial \beta} \left[\frac{\partial^2 \Phi}{\partial \beta^2} + (2 + \nu) \frac{\partial^2 \Phi}{\partial x^2} \right]; \\ w_0 = \nabla^2 \nabla^2 \Phi. \quad (7)$$

Учитывая для неравномерно нагретой оболочки зависимости

$$X = - \frac{\partial z}{\partial x}; \quad Y = - \frac{\partial z}{\partial \beta},$$

частные решения уравнения (5) можно заменить одной функцией Φ_t

$$\Phi_x = \frac{\partial \Phi_t}{\partial x}; \quad \Phi_y = \frac{\partial \Phi_t}{\partial \beta}; \quad \Phi_z = \Phi_t; \quad (8)$$

являющейся частным решением уравнения

$$\nabla^4 \nabla^4 \Phi_t + \frac{1-\nu^2}{c^2} \frac{\partial^4 \Phi_t}{\partial x^4} = \alpha_t t R \frac{1+\nu}{c^2}. \quad (9)$$

Приведенные в [1] выражения для u_x, u_y, u_z через функции Φ_x, Φ_y, Φ_z при неравномерном нагреве заменяются следующими:

$$u_t = \frac{\partial}{\partial x} \left[(1-\nu) \frac{\partial^2 \Phi_t}{\partial x^2} + c^2 \nabla^2 \nabla^2 \Delta^2 \Phi_t \right];$$

$$v_t = \frac{\partial}{\partial \beta} \left[-(1-\nu) \frac{\partial^2 \Phi_t}{\partial \alpha^2} + c^2 \nabla^2 \nabla^2 \Phi_t \right];$$

$$\omega_t = (1-\nu) \frac{\partial^2}{\partial \alpha^2} \nabla^2 \Phi_t. \quad (10)$$

Компоненты напряженного состояния, определяемые решением однородного уравнения (см. [1]):

$$N_{01} = \frac{Eh}{R} \frac{\partial^4 \Phi}{\partial \alpha^2 \partial \beta^2}; \quad N_{02} = \frac{Eh}{R} \frac{\partial^4 \Phi}{\partial \alpha^4}; \quad S_0 = -\frac{Eh}{R} \frac{\partial^4 \Phi}{\partial \alpha^3 \partial \beta};$$

$$M_{01} = \frac{D}{R^2} \left(\frac{\partial^2}{\partial \alpha^2} + \nu \frac{\partial^2}{\partial \beta^2} \right) \nabla^2 \nabla^2 \Phi; \quad M_{02} = \frac{D}{R^3} \left(\frac{\partial^2}{\partial \beta^2} + \nu \frac{\partial^2}{\partial \alpha^2} \right) \nabla^2 \nabla^2 \Phi;$$

$$M_{012} = -\frac{D}{R^2} (1-\nu) \frac{\partial^2}{\partial \alpha \partial \beta} \nabla^2 \nabla^2 \Phi; \quad Q_{01} = -\frac{D}{R^3} \frac{\partial}{\partial \alpha} \nabla^2 \nabla^2 \nabla^2 \Phi;$$

$$Q_{02} = -\frac{D}{R^3} \frac{\partial}{\partial \beta} \Delta^2 \Delta^2 \Phi. \quad (11)$$

Компоненты напряженного состояния, определяемые частным решением, могут быть получены из частных решений, приведенных в [1], с учетом зависимостей (8)

$$N_{t1} = \frac{Eh}{R} \left(\frac{\alpha_t t R}{1-\nu} - \frac{c^2}{1+\nu} \frac{\partial^2}{\partial \beta^2} \nabla^2 \nabla^2 \nabla^2 \Phi_t \right);$$

$$N_{t2} = \frac{Eh}{R} \left(\frac{\alpha_t t R}{1-\nu} - \frac{c^2}{1+\nu} \frac{\partial^2}{\partial \alpha^2} \nabla^2 \nabla^2 \nabla^2 \Phi_t \right);$$

$$S_t = \frac{Eh}{R} \frac{c^2}{1+\nu} \frac{\partial^2}{\partial \alpha \partial \beta} \nabla^2 \nabla^2 \nabla^2 \Phi_t; \quad M_{t1} = \frac{D}{R^2} (1-\nu) \frac{\partial^2}{\partial \alpha^2} \left(\frac{\partial^2}{\partial \alpha^2} + \nu \frac{\partial^2}{\partial \beta^2} \right) \nabla^2 \Phi_t;$$

$$M_{t2} = \frac{D}{R^2} (1-\nu) \frac{\partial^2}{\partial \alpha^2} \left(\frac{\partial^2}{\partial \beta^2} + \nu \frac{\partial^2}{\partial \alpha^2} \right) \nabla^2 \Phi_t;$$

$$M_{t12} = -\frac{D}{R^2} (1-\nu)^2 \frac{\partial^4}{\partial \alpha^3 \partial \beta} \nabla^2 \Phi_t; \quad Q_{t1} = -\frac{D}{R^3} (1-\nu) \frac{\partial^3}{\partial \alpha^3} \nabla^2 \nabla^2 \Phi_t;$$

$$Q_{t2} = -\frac{D}{R^3} (1-\nu) \frac{\partial^3}{\partial \alpha^2 \partial \beta} \nabla^2 \nabla^2 \Phi_t. \quad (12)$$

Полные перемещения и компоненты напряженного состояния

$$u = u_0 + u_t; \quad v = v_0 + v_t; \quad \omega = \omega_0 + \omega_t; \quad N_1 = N_{01} + N_{t1} - \frac{Eh}{R} \frac{\alpha_t t R}{1-\nu};$$

$$N_2 = N_{02} + N_{t2} - \frac{Eh}{R} \frac{\alpha_t t R}{1-\nu}; \quad M_1 = M_{01} + M_{t1}; \quad M_2 = M_{02} + M_{t2};$$

$$M_{12} = M_{012} + M_{t12}; \quad Q_1 = Q_{01} + Q_{t1}; \quad Q_2 = Q_{02} + Q_{t2}. \quad (13)$$

2. Некоторые частные задачи.

Пусть температура не зависит от координат β , т. е. $t=t(\alpha)$. Тогда вместо (6) и (9) имеем:

$$\frac{d^8 \Phi}{d\alpha^8} + \frac{1-\nu^2}{c^2} \frac{d^4 \Phi}{d\alpha^4} = 0; \quad \frac{d^8 \Phi_t}{d\alpha^8} + \frac{1-\nu^2}{c^2} \frac{d^4 \Phi_t}{d\alpha^4} = \alpha_t t R \frac{1+\nu}{c^3}.$$

Подставляя вместо Φ и Φ_t радиальные перемещения ω_0 и ω_t согласно (7) и (10), получим

$$\frac{d^4 w_0}{d\alpha^4} + \frac{1 - \nu^2}{c^2} w_0 = 0; \quad \frac{d^4 w_t}{d\alpha^4} + \frac{1 - \nu^2}{c^2} w_t = \alpha_t t R \frac{1 - \nu^2}{c^2}. \quad (14)$$

Из уравнений (11), (12) и (13) имеем

$$N_2 = \frac{Eh}{R} (\omega - \alpha_t t R); \quad M_1 = -\frac{D}{R^2} \frac{d^2 w}{d\alpha^2};$$

$$M_2 = -\nu \frac{D}{R^2} \frac{d^2 w}{d\alpha^2}; \quad Q_1 = \frac{D}{R^3} \frac{d^3 w}{d\alpha^3}. \quad (15)$$

Все остальные компоненты напряженного состояния равны нулю.

Пусть температура не зависит от координаты α , т. е. $t = t(\beta)$.

Рассмотрим приближенное решение задачи, без учета краевого эффекта. В этом случае можно принять, что $\Phi = 0$ и $\Phi_t = \Phi_t(\beta)$. Вместо уравнения (9), имеем

$$\frac{d^8 \Phi_t}{d\beta^8} = \frac{1 + \nu}{c^2} \alpha_t t R. \quad (16)$$

Отличными от нуля являются следующие смещения и компоненты напряженного состояния:

$$v_t = c^2 \frac{d^7 \Phi_t}{d\alpha^7} = (1 + \nu) \alpha_t t R \int t d\beta; \quad N_{t1} = \frac{Eh}{R} \alpha_t t R \frac{\nu}{1 - \nu};$$

$$N_{t2} = \frac{Eh}{R} \frac{\alpha_t t R}{1 - \nu}. \quad (17)$$

Подставляя (17) в (13), получим

$$v^* = (1 + \nu) \alpha_t R \int t d\beta; \quad N_1^* = -\frac{Eh}{R} \alpha_t t R. \quad (18)$$

Усилия N_1^* не описывают полностью напряженного состояния, так как они не удовлетворяют условиям равновесия части оболочки, отсеченной плоскостью, нормальной оси. Если полные усилия равны N_1 , то условия равновесия

$$\int_0^{2\pi} N_1 R d\beta = 0; \quad \int_0^{2\pi} N_1 R^2 \cos \beta d\beta = 0; \quad \int_0^{2\pi} N_1 R^2 \sin \beta d\beta = 0. \quad (19)$$

Эти условия будут удовлетворены, если к торцевым сечениям оболочки будут приложены фиктивные осевая сила $P_x = E\alpha_t R h I$ и изгибающие моменты $M_z = -E\alpha_t R^2 h I_s$, $M_y = -E\alpha_t R^2 h I_c$ действующие на оболочку как на балку.

Здесь

$$I = \int_0^{2\pi} t(\beta) d\beta; \quad I_c = \int_0^{2\pi} t(\beta) \cos \beta d\beta; \quad I_s = \int_0^{2\pi} t(\beta) \sin \beta d\beta. \quad (20)$$

Эти фиктивные усилия дают смещения и упругие усилия:

$$u^{**} = \alpha \frac{\alpha_t R}{\pi} \left(\frac{1}{2} I + I_s \sin \beta + I_c \cos \beta \right);$$

$$v^{**} = (\alpha^2 - \nu) \frac{\alpha_t R}{2\pi} (-I_s \cos \beta + I_c \sin \beta);$$

$$\omega^{**} = -\frac{\alpha_t R}{2\pi} [(\alpha^2 + \nu) (I_s \sin \beta + I_c \cos \beta) + \nu l];$$

$$N_1^{**} = \frac{E a_t h}{\pi} \left(I_s \cdot \sin \beta + I_c \cos \beta + \frac{1}{2} \right). \quad (21)$$

Полные перемещения и усилия:

$$u = u^{**}; \quad v = v^* + v^{**}; \quad w = w^{**}; \quad N_1 = N_1^* + N_1^{**}. \quad (22)$$

Температура может быть представлена в виде ряда:

$$t = \sum_{n=0}^{\infty} (t_{nc} \cdot \cos n\beta + t_{ns} \cdot \sin n\beta) \quad (23)$$

здесь t_{nc} и t_{ns} — постоянные величины.

Выражения (20) и (21) отличны от нуля только в случае $n=1$. В этом случае, как видно из выражений (21), ось цилиндрической оболочки изгибается по параболе и на оболочечные деформации и усилия (18) накладываются балочные деформации и усилия (21).

При $n \neq 1$ имеют место только оболочечные деформации и усилия (18).

Напряженное и деформированное состояние неравномерно нагретой оболочки при этом ничем не отличаются от напряженного состояния плоской пластинки, полученной разверткой цилиндрической поверхности на плоскость. Как уже было сказано, во всех этих рассуждениях не учитывается краевой эффект.

3. Расчет кожуха кольцевой камеры сгорания.

Проведенные замеры температур показали, что имеет место неравномерность температуры как по окружности, так и по образующей. Неравномерность по окружности вызвана наличием 12 форсунок, равномерно расположенных по окружности. Температура между форсунками ниже, чем по образующей, проходящей через форсунку. Наибольшая неравномерность имеет место у края кожуха, прилегающего к блоку головок и при переходе к другому краю температура постепенно выравнивается.

На основании этих рассуждений была принята следующая зависимость для температуры от координат точек срединной поверхности:

$$t = t_0 e^{-\kappa x} \cos n\beta, \quad (24)$$

здесь t_0 — половина максимальной разности температур в точках, расположенных на краю, прилегающему к блоку головок, $n = 12$.

κ — коэффициент, определяющий неравномерно нагретую зону, если κ достаточно большое число, то неравномерно нагретая зона ограничена небольшой областью, прилегающей к блоку головок, при уменьшении κ эта область увеличивается, при $\kappa = 0$ вся оболочка нагрета одинаково неравномерно.

Решение однородного уравнения (5) и частное решение уравнения (9) ищем в виде:

$$\Phi = \Phi_n(\alpha) \cdot \cos n\beta \quad (25)$$

$$\Phi_t = \Phi_{tn}(\alpha) \cos n\beta. \quad (26)$$

Подстановка (25) в (5) при $X=Y=Z=0$ дает обыкновенное дифференциальное уравнение относительно $\Phi_n(\alpha)$:

$$\frac{d^8\Phi_n}{d\alpha^8} + 4n^2 \frac{d^6\Phi_n}{d\alpha^6} + 6n^4 \frac{d^4\Phi_n}{d\alpha^4} - 4n^6 \frac{d^2\Phi_n}{d\alpha^2} + n^8\Phi_n + \frac{1-\nu^2}{c^2} \frac{d^4\Phi_n}{d\alpha^4} = 0. \quad (27)$$

Решение этого уравнения:

$$\begin{aligned} \Phi_n = & c_1 ch \gamma_1 \alpha \cdot \cos \gamma_2 \alpha + c_2 ch \gamma_1 \alpha \cdot \sin \gamma_2 \alpha + c_3 sh \gamma_1 \alpha \cdot \cos \gamma_2 \alpha + \\ & + c_4 ch \gamma_1 \alpha \sin \gamma_2 \alpha + c_1' ch \gamma_1' \alpha \cos \gamma_2' \alpha + c_2' ch \gamma_1' \alpha \cdot \sin \gamma_2' \alpha + \\ & + c_3' ch \gamma_1' \alpha \cdot \cos \gamma_2' \alpha + c_4' ch \gamma_1' \alpha \cdot \sin \gamma_2' \alpha. \end{aligned} \quad (28)$$

Здесь

$$\begin{aligned} \gamma_1 = \frac{1}{t} \lambda; \quad \gamma_2 = -i \frac{1}{2} \sqrt{\lambda^2 + 4n^2}; \quad \gamma_1' = i \cdot \frac{1}{2} \lambda; \\ \gamma_2' = -i \cdot \frac{1}{2} \sqrt{-\lambda^2 + 4n^2}; \quad \lambda^4 = -\frac{1-\nu^2}{c^2}. \end{aligned} \quad (29)$$

$c_1, c_2 \dots$ — произвольные постоянные.

Аналогично, подстановка (26) в (9) дает

$$\begin{aligned} \frac{d^8\Phi_{tn}}{d\alpha^8} - 4n^2 \frac{d^6\Phi_{tn}}{d\alpha^6} + 6n^4 \frac{d^4\Phi_{tn}}{d\alpha^4} - 4n^6 \frac{d^2\Phi_{tn}}{d\alpha^2} + n^8\Phi_{tn} + \\ + \frac{1-\nu^2}{c^2} \frac{d^4\Phi_{tn}}{d\alpha^4} = \alpha^4 t R \frac{1+\nu}{c^2}. \end{aligned} \quad (30)$$

Подставляя (24) в (30), получим:

$$\Phi_t = \frac{\alpha t_0 R (1+\nu)}{(k^2 h^2)^4 c^2 + k_t^4 (1-\nu^2)} e^{-\kappa \alpha} \cos n\beta. \quad (31)$$

Подставляя (28) и (31) в (11), (12) и (13), получим компоненты перемещений и напряженного состояния в оболочке. Произвольные постоянные $c_1, c_2 \dots$ определяются из граничных условий; для каждого края могут быть записаны четыре условия: в случае жесткой заделки на краю

$$u = v = w = \frac{\partial w}{\partial \alpha} = 0,$$

в случае свободного края

$$N_1 = Q_1 = M_1 = S = 0.$$

Записывая условия для двух краев, имеем 8 уравнений с 8-ю неизвестными произвольными постоянными.

Проведен расчет для сравнения различных условий закрепления и различных температурных полей.

Расчет производился в двух вариантах для оболочки со следующими размерами:

$$R=400 \text{ мм}, \quad h=1,5 \text{ мм}, \quad l=800 \text{ мм}.$$

а) оба края свободны;

б) один край жестко заделан, другой — свободен.

Из анализа результатов расчета можно сделать следующие выводы: жесткая заделка приводит к весьма существенному возрастанию напряжений, очень значительно влияние на напряженное состояние характера распределения температуры, увеличение неравномерно по окружности нагретой зоны и распространение ее на всю оболочку приводит к снижению напряжений у краев в 5—6 раз.

ЛИТЕРАТУРА

1. В. З. Власов, Общая теория оболочек, ГИТТЛ, Москва, 1949,