при увеличении частоты возмущения изменяется от нулевого значения до величины, характеризующей жесткость пленки газа между пластинами без массообмена со средой.

Для демпфирования низкочастотных вибраций (менее 50 Гц) газостатические демпферы неэффективны и требуется применение более вязких сред, например, масла.

Расчет демпфера с оптимальными характеристиками, обеспечивающего максимальное рассеивание энергии при определенной частоте вибрации, производится по зависимостям (7) и (8) или с помощью графика, представленного на рис. 4. Выбрав рабочую частоту демпфера, его геометрические размеры и рабочую среду, можно однозначно определить величину зазора, обеспечивающего оптимальный режим работы демпфера.

УДК 539.431

В. П. Харьков

СТАТИСТИЧЕСКАЯ ОЦЕНКА ЭКСТРЕМАЛЬНЫХ ЗНАЧЕНИЙ ПРЕДЕЛА ВЫНОСЛИВОСТИ ПО РЕЗУЛЬТАТАМ ИСПЫТАНИЙ НА УСТАЛОСТЬ

Вибропрочность ответственных деталей машиностроения, например, лопаток турбомашин, предложено [1] оценивать с помощью статистического запаса прочности n, определяемого как отношение статистически экстремальных значений разрушающих напряжений σ^*_{-1} к действующим напряжениям $\sigma_v{}^*$:

$$n = \frac{\sigma^*_{-1}}{\sigma^*_v}.$$

Экстремальные значения напряжений $\sigma_v{}^*$ и σ^*_{-1} определяют с нормированными уровнями значимости q и доверительной вероятности $P_д$ по результатам статистической обработки экспериментальных данных с учетом числа измерений. Для нахождения статистических максимальных значений действующих напряжений [2] используют односторонние толерантные коэффициенты для нормального закона распределения:

$$\sigma^*_v = \bar{\sigma}_v + k_t\,(q,\ P_д,\ z)\ S_{\sigma_v},$$

где $\bar{\sigma}_v$, S_{σ_v} — выборочные оценки параметров среднего значения и среднего квадратического отклонения действующих напряжений; z — число изделий, на которых измерялись значения σ_v; k_t — односторонний толерантный коэффициент, определяемый по таблицам [3] для нормального закона распределения.

Оценка же статистически минимального значения предела выносливости σ^*_{-1} с помощью односторонних толерантных коэффициентов по формуле

$$\sigma^*_{-1} = \bar{\sigma}_{-1} - k_t\,(q,\ P_д,\ z)\ S_{\sigma_{-1}}$$

затруднена, так как в настоящее время нет надежных экспериментальных методов прямого определения предела выносливости единичного объекта.

По результатам усталостных испытаний единичного объекта можно определить долговечность образца при заданном уровне переменных напряжений. Обратная же задача нахождения уровня напряжений, при котором деталь (или образец) наработает до разрушения заданное количество циклов, может быть решена путем косвенного определения $\bar{\sigma}_{-1}$ и $S_{\sigma_{-1}}$, по результатам усталостных испытаний партии объектов. Существуют несколько экспериментальных методов усталостных испытаний для оценки параметров распределения (среднего значения и дисперсии) предела выносливости: «вверх—вниз», «пробитов» и других ускоренных методов: «Локатти», «Про», «Эномото», а также метод «ступенчатого увеличения нагрузки» для оценки предела выносливости по результатам испытаний объектов на долговечность по заданному плану.

Таким образом, при экспериментальной оценке предела выносливости его величина в процессе испытаний непосредственно не замеряется. В отличие от действующих напряжений σ_v при оценке предела выносливости σ_{-1} число испытанных объектов z не есть число измерений величины σ_{-1}. Точность оценки выборочных параметров $\bar{\sigma}_{-1}$ и $S_{\sigma_{-1}}$ и, следовательно, статистически минимального значения предела выносливости σ^*_{-1} зависит не только от числа испытанных объектов, но и от метода и плана (выбранных уровней напряжений σ, распределения объектов по уровням σ и др.) испытаний.

В общем виде выражение для оценки статистически минимального значения предела выносливости можно записать так:

$$\sigma^*_{-1} = \bar{\sigma}_{-1} - k_t\,(q,\ P_д,\ z,\ \Pi_{св},\ \Pi_{пл})\,S_{\sigma_{-1}}, \qquad (1)$$

где $\Pi_{св}$ — вектор характеристик сопротивления усталости материала (определяется ориентировочно по результатам испытаний на усталость образцов, либо аналогичных деталей, либо по справочным данным); $\Pi_{пл}$ — вектор плана испытаний на усталость при определении выборочных параметров $\bar{\sigma}_{-1}$, $S_{\sigma_{-1}}$ (характеризует режимы нагружения партии объектов); k_t — толерантный коэффициент, соответствующий данному методу испытаний и зависящий от векторов $\Pi_{св}$ и $\Pi_{ил}$.

Значения толерантного коэффициента в выражении (1) для различных методов усталостных испытаний могут быть получены с помощью статистических испытаний на ЭВМ методом Монте—Карло.

По определению односторонний толерантный предел σ^*_{-1} есть доверительная граница для заданной квантили распределения и определяется из условия

$$P\,[P\,(\sigma_{-1} < \sigma^*_{-1}) < q] \geqslant P_{д},$$

или

$$P\,[F\,(\sigma^*_{-1}) < q] = P_{д}.$$

Если обозначить $\sigma^{г}_{-1q}$ — квантиль распределения предела выносливости в генеральной совокупности, соответствующий уровню значимости q, то доверительная вероятность

$$P_{д} = P\,(\sigma^*_{-1} \leqslant \sigma^{г}_{-1\,q}),$$

или, учитывая выражение (1),

$$P_{д} = P\,[(\sigma_{-1} - k_t\, S_{\sigma_{-1}}) \leqslant \sigma^{г}_{-1q}]. \tag{2}$$

Для нормального распределения σ_{-1} будем иметь

$$\sigma^{г}_{-1\,q} = \overline{\sigma}^{г}_{-1} + u_q\, S^{г}_{\sigma_{-1}}; \tag{3}$$

$$P_{д} = P\,(\overline{\sigma}_{-1} - k_t\, S_{\sigma_{-1}} \leqslant \overline{\sigma}^{г}_{-1} + u_q\, S^{г}_{\sigma_{-1}}). \tag{4}$$

В выражениях (2) и (4) значения $\sigma^{г}_{-1q}$ и u_q определяются из условий

$$\int\limits_0^{\sigma^{г}_{-1q}} f\,(\sigma_{-1})\,d\,\sigma_{-1} = q;$$

$$\int\limits_{-\infty}^{u_q} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \exp\left(-\frac{u^2}{2}\right) du = q. \tag{5}$$

Для произвольного (двухпараметрического) распределения предела выносливости доверительная вероятность, согласно выражению (2), будет

$$P_{д} = P\left(-\frac{\sigma^{г}_{-1q} - \overline{\sigma}_{-1}}{S_{\sigma_{-1}}} \leqslant k_t\right). \tag{6}$$

Алгоритм оценки толерантных коэффициентов методом

Монте—Карло для определения статистически минимальных значений предела выносливости по выражению (1) основан на использовании зависимости (6).

Для выбранных типа материала с вектором свойств ($\Pi_{св}$), метода и плана испытаний на усталость ($\Pi_{пл}$) проводится вероятностное моделирование процесса испытаний партии заданного объема z. По результатам моделирования определяются выборочные оценки параметров распределения предела выносливости $\hat{\sigma}_{-1i}$ и $\hat{S}_{\sigma_{-1i}}$ и для заданного уровня значимости q величина

$$k_i = \frac{(\sigma^{\Gamma}_{-1q} - \hat{\sigma}_{-1i})}{\hat{S}_{\sigma_{-1i}}}. \qquad (7)$$

Такое моделирование проводится многократно ($i = 1, 2 \ldots M$). Затем строится возрастающий вариационный ряд — эмпирическая функция распределения значений k_i — и определяется порядковая статистика, соответствующая доверительной вероятности $P_д$, которая будет являться оценкой толерантного множителя с доверительной вероятностью $P_д$ при выбранных значениях q, z, $\Pi_{св}$ и $\Pi_{пл}$, т. е.

$$k_t\ (q,\ P_д,\ z,\ \Pi_{св},\ \Pi_{пл}) \approx k_l,$$

где $l = P_д M$ — номер порядковой статистики в вариационном ряду k_i ($i = 1, 2 \ldots M$). Для надежной оценки порядковой статистики число повторений M должно быть достаточно велико $\left(M \gg \frac{1}{1 - P_д^{\max}} \right)$. Аналогично строятся эмпирические функции распределения параметров $\hat{\sigma}_{-1}$ и $\hat{S}_{\sigma_{-1}}$.

Опишем схему вероятностного моделирования на ЭВМ испытаний на усталость. Задавшись числом объектов испытания z, для каждого из них получают на ЭВМ с помощью алгоритмического датчика случайных чисел реализацию кривой усталости — зависимость $N\sigma$, характеризующую сопротивление усталости единичного объекта. Как известно, для большинства конструкционных материалов справедлив нормальный закон распределения логарифма усталостной долговечности ($\lg N$) и линейная в координатах $\lg \sigma$, $\lg N$ форма кривой усталости. Зависимость среднего квадратического отклонения (СКО) $S_{\ln N}$ от величины логарифма переменных напряжений в первом приближении также можно принять линейной. При таких предположениях уравнение для случайной реализации кривой усталости будет иметь вид

$$\lg N_j(\sigma) = \overline{\lg N}(\sigma) + u_j S_{\lg N}(\sigma), \tag{8}$$

где

$$\overline{\lg N}(\sigma) = a_1 + a_2(\lg\sigma - a_5); \tag{9}$$

$$S_{\lg N}(\sigma) = a_3 + a_4(\lg\sigma - a_5); \tag{10}$$

$a_1, a_2, \ldots, a_5$ — коэффициенты, характеризующие сопротивление усталости данного материала; u_j — j-я реализация нормально распределенного случайного числа с функцией плотности

$$f(u) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{u^2}{2}},$$

получаемая с помощью специального алгоритма.

По полученным z ($j = 1, 2, \ldots, z$) реализациям кривой усталости и выбранному плану эксперимента определяются по схеме выборочные значения параметров среднего и среднего квадратического отклонения предела выносливости $\hat{\sigma}_{-1}$ и $\hat{S}_{\sigma_{-1}}$. При моделировании считается, что объект испытаний разрушился при уровне напряжений σ_i до заданной базы $N_б$, если $N_j(\sigma_i) < N_б$.

При моделировании испытаний на усталость закон распределения долговечности, форма кривой усталости и метод экспериментальной оценки параметров распределения предела выносливости могут быть любыми. Схему алгоритма моделирования в самом общем виде можно представить так:

$$\boxed{R : \Pi_{св}} \to \boxed{N_j(\sigma);\ j = 1, 2, \ldots, z} \quad \boxed{z : N(\sigma);\ \Pi_{пл}} \to \boxed{\hat{\sigma}_{-1}:\ \hat{S}_{\sigma_{-1}};\ \hat{T}_p},$$

где $N(\sigma)$ — вектор-функция выборочных реализаций кривых усталости единичных объектов $N_j(\sigma)$; R: — оператор получения реализаций кривых усталости $N_j(\sigma)$ с помощью алгоритмического датчика случайных чисел, распределенных по заданному закону с параметрами, заданными вектором свойств $\Pi_{св}$; z: — оператор определения параметров распределения предела выносливости $\hat{\sigma}_{-1}$ и $\hat{S}_{\sigma_{-1}}$ по исследуемому методу испытаний с вектором плана эксперимента $\Pi_{пл}$ и вектор-функцией $N(\sigma)$; $\hat{T}_p$ — выборочное значение длительности испытаний (в циклах).

При моделировании усталостных испытаний по данной схеме могут оцениваться не только параметры распределения предела выносливости, но и другие характеристики сопротивления усталости, например, показатель кривой усталости, коэффициент корреляции. В таких случаях z: — оператор получения соответствующей характеристики.

При нормальном законе распределения значения σ_{-1} величину k_{ti} в выражении (7) можно выразить следующим образом. Обозначим σ_{-1} через x, тогда

$$k_{ti} = \frac{x_q^{\Gamma} - \bar{x}_i}{S_{x_i}} = \frac{\bar{x}^{\Gamma} + S_x^{\Gamma} u_q - \bar{x}_i}{S_{x_i}},$$

или

$$k_{ti} = \frac{\Delta \bar{x}_i}{S_{x_i}} + \frac{S_{x_i} + \Delta S_{x_i}}{S_{x_i}} u_q$$

и окончательно

$$k_{ti} = u_q + \frac{\Delta x_i}{S_{x_i}} + \frac{\Delta S_{x_i}}{S_{x_i}} u_q, \qquad (11)$$

где u_q — квантиль нормального распределения, удовлетворяющий условию (5); $\Delta \bar{x}_i = \bar{x}^{\Gamma} - \bar{x}_i$ — расхождение между генеральным и выборочным средними; $\Delta S_{x_i} = S_x^{\Gamma} - S_{x_i}$ — расхождение между генеральным и выборочными СКО.

В формуле (11) второй и третий член представляют собой поправки на случайные отклонения выборочных параметров от генеральных.

Приведенный алгоритм расчетной оценки толерантных коэффициентов для испытаний на усталость по методам «вверх—вниз» и «ступенчатого увеличения нагрузки» реализован с помощью языка *PL*-1 на ЭВМ ЕС-1033.

Рис. 1. График усталостных испытаний по методу «вверх—вниз»: ○ — объект не разрушился до базы $N_б$ ($N_j(\sigma) > N_б$); ● — объект разрушился до заданной базы ($N_j < N_б$)

На рис. 1 и 2 показаны графики оценки предела выносливости при моделировании усталостных испытаний по методам «вверх—вниз» и «ступенчатого увеличения нагрузки».

При моделировании испытаний по методу «ступенчатого увеличения нагрузки» получали выборку из z значений оценок предела выносливости σ_{-1j} ($j = 1, 2, ..., z$), по которой определяли выборочные параметры $\hat{\bar{\sigma}}_{-1}$ и $\hat{S}_{\sigma_{-1}}$. Для метода «вверх—

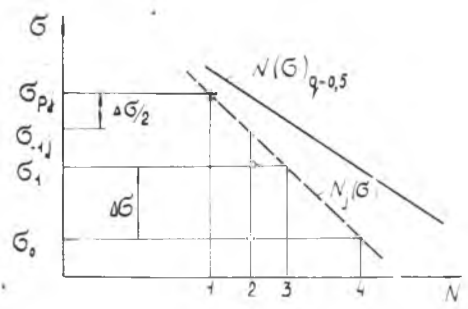

Рис. 2. Оценки предела выносливости по методу «ступенчатого увеличения нагрузки»

вниз» выборочные параметры $\hat{\sigma}_{-1}$ и $\hat{S}_{\sigma_{-1}}$ определяли по соотношению числа «разрушенных» ($N_j < N_б$) и «не разрушенных» объектов ($N_j \geqslant N_б$) по зависимостям, приведенным в [4].

Исходными данными при моделировании являлись коэффициенты a_1, a_2, ..., a_5 уравнений (9) и (10), число объектов испытаний в одной партии z, число повторений испытаний M, начальный уровень напряжений σ_0, ступень по напряжениям $\Delta\sigma$, база испытаний $N_б$. Для примера расчета толерантных коэффициентов значения исходных данных принимали равными $M = 200$; $N_б = 10^7$ циклов; $a_1 = 7$; $a_5 = \lg 500 = 2{,}7$; $a_3 = 0{,}4$; $a_4 = 0$; $-a_2 = 5,\ 10,\ 20$; $z = 10,\ 30,\ 100$; $\Delta\sigma \approx 0{,}5\, S^{г}_{\sigma_{-1}}$;
$\sigma_0 \approx 0{,}8\, \bar{\sigma}^{г}_{-1}$ — для метода «ступенчатого увеличения нагрузки»; $\sigma_0 \approx \bar{\sigma}^{г}_{-1}$ — для метода «вверх—вниз».

При нормальном законе распределения логарифма долговечности (8), линейной форме кривой усталости (9) и постоянстве дисперсии долговечности $S_{\lg N} = \mathrm{const}$ ($a_4 = 0$) генеральное распределение логарифма предела выносливости будет нормальным с параметрами: среднее значение $\overline{\lg \sigma_{-1N_б}}$, определяемое из (9) и условия $\overline{\lg N} = \lg N_б$ (при $\lg N_б = a_1$; $\overline{\lg \sigma_{-1N_б}} = a_5$), и среднее квадратическое отклонение $S^{г}_{\lg \sigma_{-1}} = S_{\lg N} / |a_2|$.

Так как для большинства конструкционных сталей $S_{\lg \sigma_{-1}} < 0{,}1$, то распределение предела выносливости можно с достаточной для практики точностью аппроксимировать в центральной части ($\overline{\lg \sigma_{-1}} \pm 3 S_{\lg \sigma_{-1}}$) нормальным законом. При этом параметры распределения определятся по приближенным формулам [5]:

$$\bar{\sigma}^{г}_{-1} \approx 10^{\overline{\lg \sigma^{г}_{-1}}};$$

$$S^{г}_{\sigma_{-1}} = v^{г}_{\sigma_{-1}} \cdot \bar{\sigma}^{г}_{-1},$$

где

$$v^{г}_{\sigma_{-1}} \approx S^{г}_{\ln \sigma_{-1}} = 2{,}3 \cdot S^{г}_{\lg \sigma_{-1}}.$$

При других формах кривой усталости или несоблюдения условия $S_{\lg N}$ = const в качестве оцениваемых выборочных параметров распределения предела выносливости также целесообразно использовать значения среднего $\hat{\sigma}_{-1}$ и СКО $\hat{S}_{\sigma_{-1}}$. При этом значение σ^{r}_{-1q} в формуле (7) определяется исходя из уравнения кривой усталости и параметров распределения долговечности по кривой усталости для заданной вероятности разрушения — q (рис. 3).

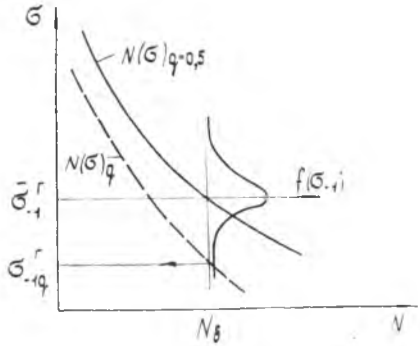

Рис. 3. Определение минимального значения предела выносливости σ^{r}_{-1q}

На рис. 4 показаны на нормальной вероятностной бумаге распределения выборочных значений величины k_i, определяемой при моделировании усталостных испытаний по формуле (7) при $z = 30$. При различных исходных значениях показателя степени кривой усталости — $a = 5$, 10 и 20 эти распределения k_i практически не отличаются.

Примеры зависимости расчетной оценки толерантного коэффициента от числа объектов испытаний показаны на рис. 5 ($a_2 = 10$). Видно, что значения толерантного множителя для метода «ступенчатого увеличения нагрузки» и табличные значения для нормального закона распределения случайных величин близки между собой, а для метода «вверх—вниз» значительно их превосходят.

Рассмотрим пример оценки минимального значения предела выносливости. Пусть по результатам испытаний на усталость партии из 30 объектов методом «вверх—вниз» оценены параметры распределения предела выносливости $\hat{\sigma}_{-1} = 500$ МПа и $\hat{S}_{\sigma_{-1}} = 30$ МПа. Определим минимальное значение предела выносливости с доверительной вероятностью $P_д = 0{,}95$ и уровнем значимости $q = 0{,}05$. Значение толерантного коэффициента для $z = 30$ будет равно пяти (рис. 5). Минимальное значение предела выносливости определится по формуле (1)

$$\sigma^{*}_{-1} = 500 - 5\cdot 30 = 350 \text{ МПа}.$$

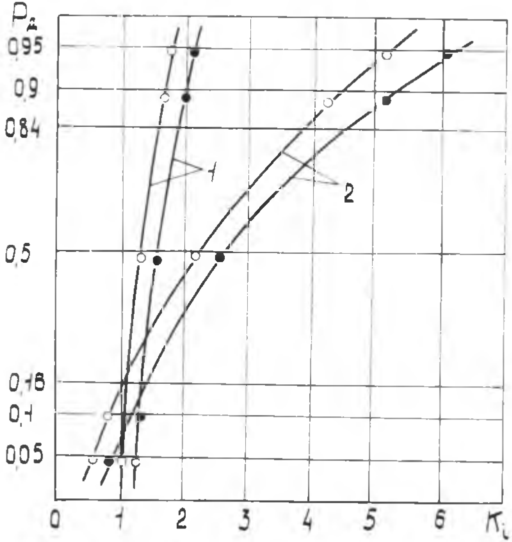

Рис. 4. Распределение выборочных значений k_i по методу «ступенчатого увеличения нагрузки» (*1*), вверх—вниз (*2*): —○— $q = 0{,}05$; —●— $q = 0{,}01$

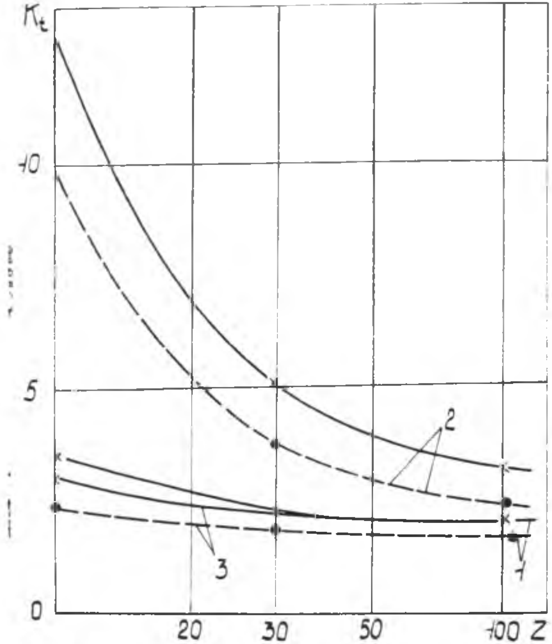

Рис. 5. Зависимость толерантного коэффициента k_i от числа объектов испытания z: *1* — «ступенчатое увеличение нагрузки»; *2*—метод «вверх—вниз»; *3* — нормальный закон распределения; ——— $q = 0{,}1$; $P_д = 0{,}9$; — — — $q = 0{,}05$; $P_д = 0{,}95$

По таблицам односторонних толерантных коэффициентов [3] для нормального закона $k_t = 2{,}2$ и $\sigma^*_{-1} = 500 - 2{,}2 \cdot 30 = 434$ МПа.

Как видно из этого примера, использование таблиц толерантных коэффициентов для нормального закона распределения при оценке статистических минимальных значений предела выносливости может приводить к существенно завышенным результатам (не в запас прочности).

Таким образом, для надежной оценки минимального значения предела выносливости необходимо использовать выражение (1). Таблицы толерантных коэффициентов для каждого метода испытаний на усталость могут быть получены по разработанному автором алгоритму.

Аналогично может быть оценено статистическое минимальное значение логарифма предела выносливости. При этом в формулах (1) и (7) вместо значения σ_{-1} подставляется значение $\lg \sigma_{-1}$, а таблицы толерантных коэффициентов должны быть составлены по результатам вероятностного моделирования усталостных испытаний для оценки логарифма предела выносливости.

Изложенная методика оценки статистически минимальных значений может быть применена при произвольном законе распределения случайной величины.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Биргер И. А.* Вероятность разрушения, запасы прочности и диагностика. — В кн.: Проблемы механики твердого деформируемого тела. — Л.: Судостроение, 1970. — с. 71—82.

2. *Шорр Б. Ф., Локштанов Е. А., Халатов Ю. М.* Об одном возможном подходе к вероятностной оценке вибрационной прочности деталей турбомашин. — Проблемы прочности, 1972, № 12. — с. 11—14.

3. *Оуэн Д. Б.* Сборник статистических таблиц ВЦ АН СССР. — М., 1966.— 586 с.

4. *Школьник Л. М.* Методика усталостных испытаний: Справочник.— М.: Металлургия, 1978. — 304 с.

5. *Худсон Х.* Статистика для физиков. — М.: Мир, 1970. — 232 с.