А. И. Крюков

РЕШЕНИЕ НЕКОНСЕРВАТИВНОЙ ЗАДАЧИ КОЛЕБАНИЙ ГИБКОГО МЕТАЛЛИЧЕСКОГО РУКАВА (ГМР) С СОСРЕДОТОЧЕННОЙ МАССОЙ

При рассмотрении ГМР в виде одномассовой системы его движение может быть представлено в виде следующего уравнения:

$$\ddot{Y} + \omega^2 [1 - d(Y_0)] Y \pm \frac{\omega^2}{\pi} [Y_0 d(Y_0)] \sqrt{1 - \frac{Y^2}{Y_0^2}} = 0, \qquad (1)$$

где $\omega = \sqrt{\frac{c}{m}}$ — угловая частота собственных колебаний без учета сопротивления;
c — жесткость системы;
m — ее приведенная масса;
$d(Y_0)$ — функциональная зависимость декремента колебаний от амплитуды Y_0.

Результаты наших экспериментальных исследований [1] показали, что гибкие металлические рукава имеют устойчивую нелинейную характеристику затухания (рис. 1), которая практически не зависит от конструктивных и эксплуатационных параметров и может быть представлена в виде следующей эмпирической зависимости:

$$d(Y_0) = d_0 + x_Y Y_0^n. \qquad (2)$$

Для соответствующих типоразмеров ГМР нами были получены следующие значения входящих в выражение (2) величин: $d_0 = 0{,}12 \div 0{,}85$; $x_Y = (11 \div 14)\ \frac{1}{\text{см}}$; $n = 0{,}90 \div 0{,}96$, что свидетельствует о значительном влиянии амплитуды на затухание колебаний.

В связи со значительной интенсивностью затухания асимптотический метод решения уравнения (1) путем разложения искомых функций в ряды по степеням малого параметра оказывается неприемлемым. Поэтому будем отыскивать решение этого уравнения методом последовательных приближений с помощью функций комплексного переменного, которые являются наиболее подходящими для решения аналогичных задач.

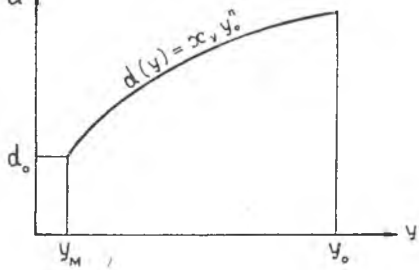

Рис. 1

Подставляя зависимость

декремента колебаний от амплитуды $d(Y_0)$ согласно (2) в уравнение (1), имеем

$$\ddot{Y} + \omega^2 \left[1 - \left(d_0 + x_Y Y_0^n\right)\right] Y \pm \frac{\omega^2}{\pi} \left[Y_0\left(d_0 + x_Y Y_0^n\right)\right] \sqrt{1 - \frac{Y^2}{Y_0^2}} = 0. \quad (3)$$

Полагая, что зависимость декремента от амплитуды значения смещения Y_0 и мгновенной величины смещения Y одна и та же, можем принять

$$d(Y_0) = d(Y).$$

Обозначив действительную частоту колебаний через

$$\omega_{д} = \omega \sqrt{1 - \left(d_0 + x_Y Y_0^n\right)}\,, \quad (4)$$

можем записать, что сомножитель, стоящий при радикале $\sqrt{1 - \frac{Y^2}{Y_0^2}}$ в уравнении (3), будет равен,

$$\frac{\omega^2}{\pi} \left[Y_0\left(d_0 + x_Y Y_0^n\right)\right] = \frac{\omega^2 - \omega_{д}^2}{\pi} Y. \quad (5)$$

Имея в виду, что радикал $\sqrt{1 - \frac{Y^2}{Y_0^2}}$ обеспечивает сдвиг по фазе между восстанавливающей силой и силой сопротивления на угол $\frac{\pi}{2}$, представим уравнение (3) в комплексной форме

$$\ddot{Y} + \left[1 + \frac{i}{\pi}\left(\frac{\omega^2}{\omega_{д}^2} - 1\right)\right] \omega_{д}^2 Y = 0. \quad (6)$$

Обозначив

$$\Delta = \frac{1}{1 - \left(d_0 + x_Y Y_0^n\right)} = \frac{\omega^2}{\omega_{д}^2} - 1, \quad (7)$$

перепишем уравнение (6) в виде

$$\ddot{Y} + \left(1 + \frac{i}{\pi}\Delta\right) \omega_{д}^2 Y = 0. \quad (8)$$

В уравнении (8) величина

$$\frac{1}{\pi}\Delta = \frac{1}{\pi}\left(\frac{\omega^2}{\omega_{д}^2} - 1\right)$$

существенно положительна в любом интервале амплитуд, так как действительная частота $\omega_{д}$ всегда меньше частоты ω, взятой для идеального случая, т. е. без учета трения.

Решение уравнения (8) будем отыскивать в виде

$$Y(t) = Y_{н} e^{i(\alpha t + \nu)}, \quad (9)$$

где $Y_{н}$ — начальная амплитуда;

ν — сдвиг по фазе между восстанавливающей силой и смещением Y.

Через α в (9) обозначено

$$\alpha = \omega_д \sqrt{1 + i\frac{\Delta}{\pi}}\,. \qquad (10)$$

Представим выражение (9) в виде ряда

$$\alpha = \omega_д\left[1 + i\left(\frac{\Delta}{2\pi} - \frac{\Delta}{8\pi^2} + \frac{3\Delta^3}{48\pi^3} - \frac{5\Delta^4}{128\pi^4}\cdots\right)\right]\cdot \qquad (11)$$

Значения входящих сюда членов ряда определяем с учетом значения декремента d для рассматриваемого рукава.

Согласно (2), задаваясь значениями $Y_н=1$ мм; $d_0=0{,}66$; $x_у=10$; $n=0{,}96$, получаем $d_n=0{,}75$.

Тогда, согласно (7), значения членов ряда (11) следующие:

$$\frac{\Delta}{2\pi} = \frac{1}{2\pi}\left(\frac{\omega^2}{\omega_д^2} - 1\right) = \frac{1}{2\pi}\left[\frac{\omega^2}{\omega^2\,(1-0{,}75)} - 1\right] = 0{,}28;$$

$$\frac{\Delta^2}{8\pi^2} = 0{,}115; \quad \frac{3\Delta^3}{48\pi^3} = 0{,}055; \quad \frac{5\Delta^4}{128\pi^4} = 0{,}033.$$

В связи с малыми значениями последних членов практически можно ограничиться лишь тремя первыми членами этого ряда.

С учетом полученного результата решение (9) запишется в виде

$$Y(t) = Y_н e^{-0{,}45\omega_g\,\nu}\cdot e^{i(\omega_д t+\nu)}. \qquad (12)$$

Пользуясь известным тождеством Эйлера, из выражения (12) получаем:

$$Y(t) = Y_н e^{-0{,}45\omega_g\,t}\cdot[\cos(\omega_д\,t + \gamma) + i\sin(\omega_д\,t+\nu)]. \qquad (13)$$

Функция (13) характеризует свободные изгибные колебания ГМР и свидетельствует о затухании амплитуд по сложному экспоненциальному закону.

Частота колебаний с учетом сопротивления определится по формуле (4) и для принятых в расчете исходных данных составит

$$\omega_g = \omega\sqrt{1-0{,}75} = 0{,}5\omega,$$

т. е. при учете сил сопротивления действительная частота колебаний ГМР уменьшится в 2 раза по сравнению с идеальной частотой ω.

Вынужденные колебания рукава, рассматриваемого в виде одномассовой системы, можно представить в виде уравнения

(8), правая часть которого соответствует гармонической возмущающей силе qe^{ipt}

$$\ddot{Y} + \left(1 + \frac{i}{\pi}\Delta\right)\omega_g Y = ge^{ipt}, \tag{14}$$

где q — амплитуда возмущающей нагрузки, отнесенная к приведенной массе ГМР;

p — частота возмущающей силы.

Используя известные в теории колебаний приемы [2] для решения неоднородных уравнений вида (14), представим для крайних положений рассматриваемой системы это выражение в виде двух уравнений (15), содержащих две неизвестные величины — амплитуду $У_0$ и угол сдвига фаз ν,

$$\left.\begin{aligned} &\ddot{Y} + \omega_g^2 Y = q\cos(\omega t - \nu)\cos\nu \\ &\frac{1}{\pi}\left(d_0 Y_0 + x_Y Y_0^{n-1}\right)\sqrt{1 - \frac{Y^2}{Y_0^2}} = q\sin(\omega t - \upsilon)\sin\Theta \end{aligned}\right\} \tag{15}$$

Система уравнений (15) имеет следующее частное решение для установившихся вынужденных келебаний

$$Y(t) = Y\cos(\omega t - \nu). \tag{16}$$

Получаем зависимость амплитуды от частоты и декремента колебаний

$$Y = \frac{\pi q}{\sqrt{\frac{\pi^2}{\omega^2}\left(\omega_g^2 - \omega^2\right)^2 + \left(d_0 + x_y Y^n\right)^2}}, \tag{17}$$

а также формулу (18) для сдвига фаз

$$\upsilon = arc\,tg\,\frac{\left(d_0 + x_y Y_0^n\right)\omega^2}{\pi\left(\omega_g^2 - \omega^2\right)}. \tag{18}$$

В связи с тем, что величина декремента зависит от амплитуды (см. рис. 1), решение уравнений (17) и (18) обычно проводится методом последовательных приближений. По результатам определения $У$ и ν строится резонансная кривая колебаний ГМР, учитывающая силы сопротивления.

В заключение отметим, что вследствие возрастания декремента с амплитудой, действительная частота колебаний $\omega_д$ при резонансе убывает. Это способствует самоустранению резонансного режима, и практически резонанс в ГМР можно рассматривать как условное мгновенное явление, имеющее характер параметрического импульса силы при мгновенном совпадении частот p и $\omega_д$, соответствующее некоторому значению амплитуды $У_{рез}$.

ЛИТЕРАТУРА

1. Крюков А. И., Глинкин И. М., Фионин В. И. Гибкие металлические рукава. М., «Машиностроение», 1970.

2. Писаренко Г. С. Колебания механических систем с учетом несовершенной упругости материала, Киев, 1970.

Б. Н. Ковешников, Н. Д. Степаненко

ВЛИЯНИЕ ТИПА АРМИРОВАНИЯ И ЧАСТОТЫ НАГРУЖЕНИЯ НА УПРУГИЕ СВОЙСТВА СТЕКЛОПЛАСТИКОВ

В настоящее время широко используется ряд методов экспериментального определения динамического модуля упругости стеклопластиков по частоте собственных поперечных колебаний стержней [1, 2, 3].

На рис. 1 представлена одна из возможных схем определения модуля упругости стеклопластиков. Определение модуля упругости в этой схеме производится по частоте поперечных колебаний стержней, свободно подвешиваемых на струнах диаметром 0,1—0,2 мм в узловых линиях первой и более высоких форм изгибных колебаний. Возбуждение резонансных колебаний осуществляется модулированной струей сжатого воздуха, истекающего из сопла. Пульсирующая струя воздуха не вносит искажений в упруго-массовые характеристики колеблющегося образца и обеспечивает его охлаждение. Блок-схема установки (рис. 1) описана в работе [4].

Расчет модуля упругости производится по формуле

$$E = \frac{48\pi^2 \rho}{\kappa^4} \cdot \frac{l^4}{h^2} \cdot f^2, \tag{1}$$

где l и h — длина и толщина стержня; f — собственная частота колебаний; κ — корень характеристического уравнения частот; ρ — плотность материала.

Определение модуля по формуле (1) основано на предположении, что инерция вращения, а также сдвиговые деформации, возникающие при поперечном изгибе, и «побочные» сдвиги, вызываемые нормальными напряжениями при изгибе стержней, ось которых не совпадает с главными направлениями армирования, не оказывают сколь-нибудь существенного влияния на частоту.

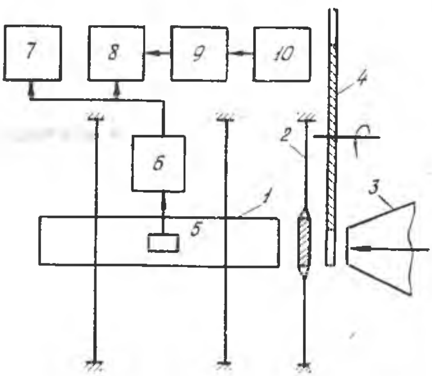

Рис. 1. Блок-схема установки:
1 — образец; 2 — струны; 3 — воздушное сопло; 4 — вращающийся профилированный диск; 5 — тензодатчик; 6 — тензоусилитель; 7 — прибор контроля деформаций; 8 — электронный осциллограф; 9 — звуковой генератор; 10 — частотомер