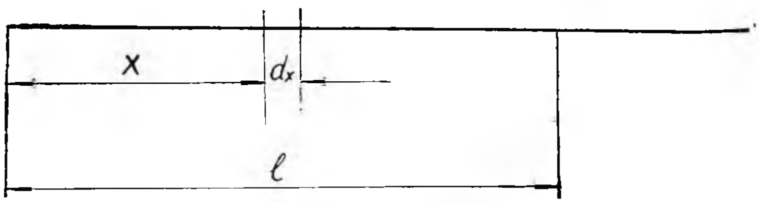
КУЙБЫШЕВСКИЙ АВИАЦИОННЫЙ ИНСТИТУТ им. С. П. КОРОЛЕВА
Труды, выпуск XXXVI, 1969 г.
Вибрационная прочность и надежность двигателей
и систем летательных аппаратов

Л. И. ФРИДМАН

ПРОДОЛЬНЫЕ КОЛЕБАНИЯ СТЕРЖНЯ ПРИ БЫСТРОМ НАГРЕВЕ

В работе [1] рассмотрены напряжения в одномерной задаче об объемно-тепловом ударе упругого полупространства и упругого слоя. Приводятся результаты расчета для мгновенного роста температур. В реальных условиях время роста температур всег-



Фиг. 1. Схема стержня

да конечно, поэтому представляет интерес определение зависимости возникающих напряжений от времени нарастания температур.

По-видимому, наиболее просто решение упомянутой задачи может быть получено на основании аналогии с продольными колебаниями прямого стержня. Пусть стержень длины l, ось которого совпадает с осью ox, (фиг. 1) подвергается нагреву на температуру T (t, x), где t— время. Перемещение u сечения x стержня равно:

$$u = u_y + \alpha \int_0^x T dx. \tag{1}$$

Здесь u_y—упругое смещение, вызванное действием инерционных сил,

$\alpha \int_0^x T\,dx$ — температурное смещение сечения,

α — коэффициент линейного расширения.

Напряжения в сечении x

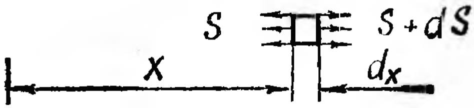
$$\sigma_x = E\,\frac{\partial u_y}{\partial x} = E\left(\frac{\partial u}{\partial x} - \alpha T\right). \tag{2}$$

На элемент стержня длиною dx действуют усилия (фиг. 2)

$$S = AE\left(\frac{\partial u}{\partial x} - \alpha T\right),$$

$$S + dS = AE\left(\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}\,dx - \alpha T - \alpha\,\frac{\partial T}{\partial x}\,dx\right).$$

Здесь A площадь сечения стержня.



Фиг. 2. Равновесие элемента стержня

Условие равновесия этих сил с учетом сил инерции дает:

$$S + dS - S - \frac{A\gamma dx}{g}\,\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = 0 \tag{3}$$

или

$$\frac{1}{a^2}\,\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - \alpha\,\frac{\partial T}{\partial x}. \tag{4}$$

Здесь $a = \sqrt{\frac{Eg}{\gamma}}$ — скорость звука в материале стержня;

g — ускорение силы тяжести;

γ — удельный вес материала стержня.

Уравнение (4) может быть получено из общих уравнений нестационарной термоупругости [2] и с точностью до постоянных совпадает с уравнением перемещений одномерной задачи для упругого полупространства и упругого слоя [1].

Если температура постоянна по длине стержня, то

$$\frac{1}{a^2}\,\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \tag{5}$$

при этом на концах $x = 0$ и $x = l$ $\sigma_x = 0$ или

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \alpha T \tag{6}$$

$$\text{при } t = 0 \quad u = \frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial u}{\partial t} = 0 \tag{7}$$

(предполагается, что $T\,(0, x) = 0$).

Таким образом, точки равномерно нагреваемого стержня перемещаются так же, как точки стержня при продольных колебаниях под действием сил $P(t)=EA\alpha T(t)$, приложенных к концам стержня.

Как известно, решение Даламбера уравнения (5) записывается в виде [3]:

$$u = f(at - x) + \varphi(at + x).$$

Здесь $f(at-x)$ и $\varphi(at+x)$ — произвольные функции, первая из них описывает волну, движущуюся в положительном направлении вдоль оси x со скоростью a, вторая — волну, движущуюся в отрицательном направлении вдоль оси x с той же скоростью.

Если проследить распространение возмущений в стержне, начиная от момента $t=0$ (см. [4]), то получим:

$$\text{при } m\frac{l}{a} \leqslant t \leqslant \left(m + \frac{1}{2}\right)\frac{l}{a} \quad (m = 0, 1, 2, 3 \ldots)$$

$$0 \leqslant x \leqslant at - ml \qquad u = \sum_{i=1}^{m+1} f_i(at - x) + \sum_{i=1}^{m} \varphi_i(at + x),$$

$$at - ml \leqslant x \leqslant (m+1)l - at \quad u = \sum_{i=1}^{m} f_i(at - x) + \sum_{i=1}^{m} \varphi_i(at + x),$$

$$(m + 1)l - at \leqslant x \leqslant l \qquad u = \sum_{i=1}^{m} f_i(at - x) + \sum_{i=1}^{m+1} \varphi_i(at + x),$$

$$\text{при } \left(m + \frac{1}{2}\right)\frac{l}{a} \leqslant t \leqslant (m + 1)\frac{l}{a}\ 0 \leqslant x \leqslant (m + 1)l - at$$

$$u \sum_{i=1}^{m+1} f_i(at - x) + \sum_{i=1}^{m} \varphi_i(at + x),$$

$$(m + 1)l - at \leqslant x \leqslant at - ml$$

$$u = \sum_{i=1}^{m+1} f_i(at - x) + \sum_{i=1}^{m+1} \varphi_i(at + x),$$

$$at - ml \leqslant x \leqslant l \quad u = \sum_{i=1}^{m} f_i(at - x) + \sum_{i=1}^{m+1} \varphi_i(at + x) \tag{8}$$

Подстановка (8) в (6) дает

$$-\sum_{i=1}^{m+1} f'_i(at) + \sum_{i=1}^{m} \varphi'_i(at) = \alpha \Gamma(t),$$

$$-\sum_{i=1}^{m} f'_i(at - l) + \sum_{i=1}^{m+1} \varphi'_i(at + l) = \alpha T(t). \tag{9}$$

Условия (9) удовлетворяются, если

$$f'_i(at - x) = -(-1)^{i-1}\alpha T\left(\frac{at - x\ (i - 1)l}{a}\right),$$

$$\varphi'_i(at + x) = (-1)^{i-1}\alpha T\left(\frac{at - x - il}{a}\right). \tag{10}$$

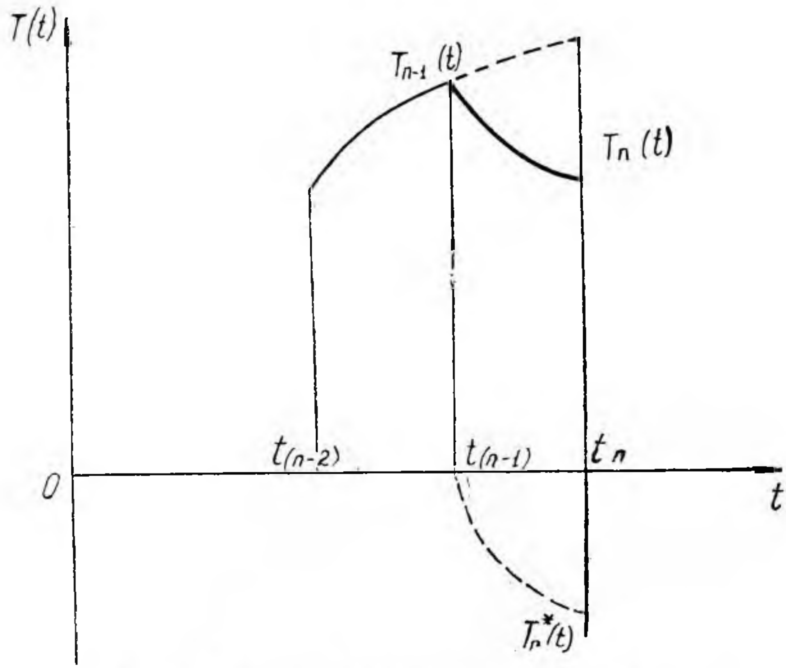
Дифференцируя (8) по x и подставляя (10) в полученные выражения, находим относительные деформации $\frac{\partial u}{\partial x}$ в любой точке стержня в любой момент времени. Если функция $T(t)$ имеет различные аналитические выражения в разные интервалы времени, то температуру $T_n(t)$ для n-го (n-2, 3 ...) интервала (от момента $t = t_{n-1}$ до $t = t_n$ см. фиг. 3) следует представить как сумму температуры $T_{n-1}(t)$ предыдущего (n—1)-го интервала и дополнительной температуры $T_n^*(t) = T_n(t) - T_{n-1}(t)$. Решение для температуры (n—1)-го варианта известно (последовательно, начиная с $n=2$), поэтому остается найти решение для температуры $T_n^*(t)$, которое для n-го интервала дается выражением (8), так как $T_n^*(t_{n-1}) = 0$. Подставляя $\frac{\partial u}{\partial x}$ в (2), получим

$$\text{при } m\frac{l}{a} \leqslant t \leqslant \left(m + \frac{1}{2}\right)\frac{l}{a} \quad (m = 0, 1, 2, \dots)$$

$$0 \leqslant x \leqslant at - ml$$

$$\sigma_x = E_\alpha \left[\sum_{i=1}^{m+1} (-1)^{i-1} T\left(\frac{at - x - (i-1)l}{a}\right) + \sum_{i=1}^{m} (-1)^{i-1} \cdot T\left(\frac{at + x - il}{a}\right) - T(t)\right],$$

$$at - ml \leqslant x \leqslant (m+1)l - at$$



Фиг. 3. Изменение температуры по времени

$$\sigma_x = E^{\alpha}\left[\sum_{i=1}^{m}(-1)^{i-1}T\left(\frac{at-x-(i-1)l}{a}\right)+\right.$$

$$\left.+\sum_{i=1}^{m}(-1)^{i-1}\cdot T\left(\frac{at+x-il}{a}\right)-T(t)\right],$$

$$(m+1)-at\leqslant x\leqslant l$$

$$\sigma_x = E^{\alpha}\left[\sum_{i=1}^{m}(-1)^{i-1}T\left(\frac{at-x-(i-1)l}{a}\right)+\right.$$

$$\left.+\sum_{i=1}^{m+1}(-1)^{i-1}\cdot T\left(\frac{at+x-il}{a}\right)-T(t)\right]$$

$$\text{при } \left(m+\frac{1}{2}\right)\frac{l}{a}\leqslant t\leqslant (m+1)\frac{l}{a}$$

$$0\leqslant x\leqslant (m+1)l-at$$

$$\sigma_x = E^{\alpha}\left[\sum_{i=1}^{m+1}(-1)^{i-1}T\left(\frac{at-x-(i-1)l}{a}\right)+\right.$$

$$\left.+\sum_{i=1}^{m}(-1)^{i-1}\cdot T\left(\frac{at+x-il}{a}\right)-T(t)\right],$$

$$(m+1)l-at\leqslant x\leqslant at-ml$$

$$\sigma_x = E^{\alpha}\left[\sum_{i=1}^{m+1}(-1)^{i-1}T\left(\frac{at-x-(i-1)l}{a}\right)+\right.$$

$$\left.+\sum_{i=1}^{m+1}(-1)^{i-1}T\left(\frac{at+x-il}{a}\right)-T(t)\right],$$

$$at-ml\leqslant x\leqslant l$$

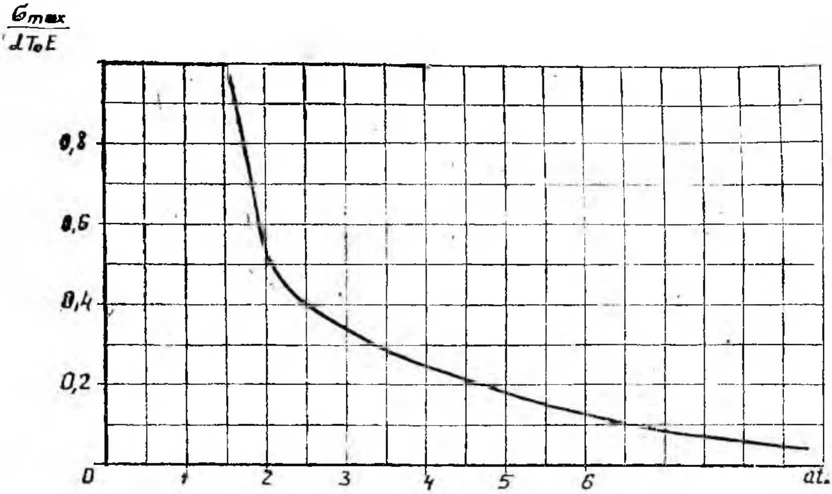
$$\sigma_x = E^{\alpha}\left[\sum_{i=1}^{m}(-1)^{i-1}T\left(\frac{at-x-(i-1)l}{a}\right)+\right.$$

$$\left.+\sum_{i=1}^{m+1}(-1)^{i-1}\cdot T\left(\frac{at+x-il}{a}\right)-T(t)\right] \qquad (11)$$

Из зависимости (10) интегрированием могут быть определены $f_i(at-x)$ и $\varphi_i(at+x)$ и перемещения u точек стержня по формулам (8).

В качестве примера был рассмотрен нагрев стержня длины l до температуры T_0. Изменение температуры по времени дается зависимостью:

$$0\leqslant t\leqslant t_0 \quad T=T_0(kt)^2 \quad (kt_0)^2=1$$
$$t_0\leqslant t \qquad T=T_0$$



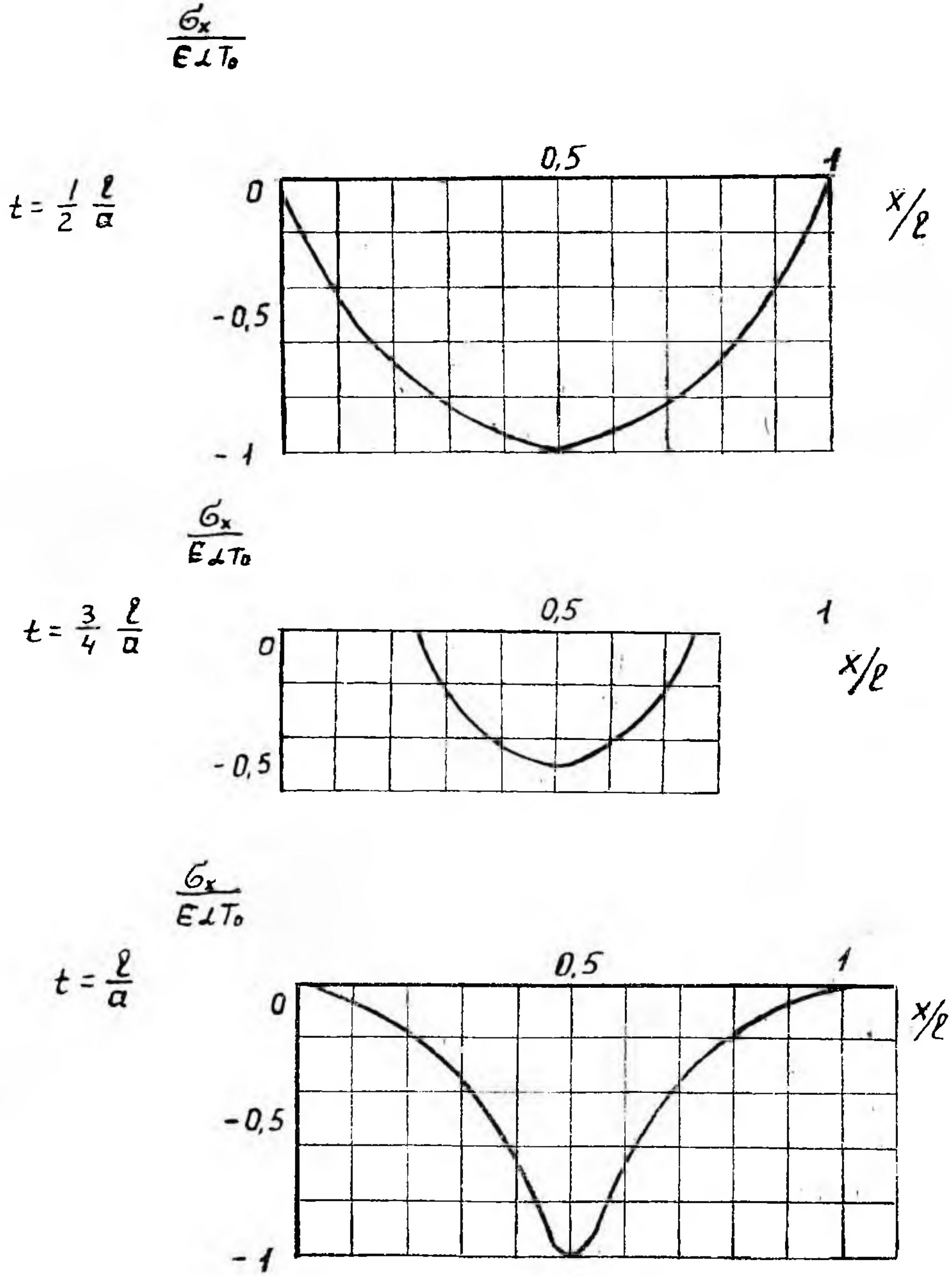
Фиг. 4. Зависимость максимального напряжения от времени нарастания нагрузки

На фиг. 4 приведена зависимость максимального напряжения в стержне от времени нарастания температуры (в безразмерных координатах).

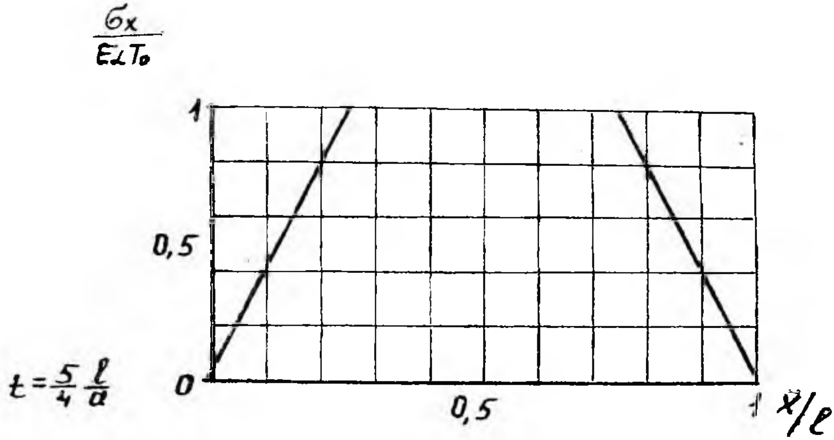
На фиг. 5 *а*, 5 *в* приведено распределение напряжений по длине стержня в разные моменты времени, при $\frac{at_0}{l} = \frac{1}{2}$.

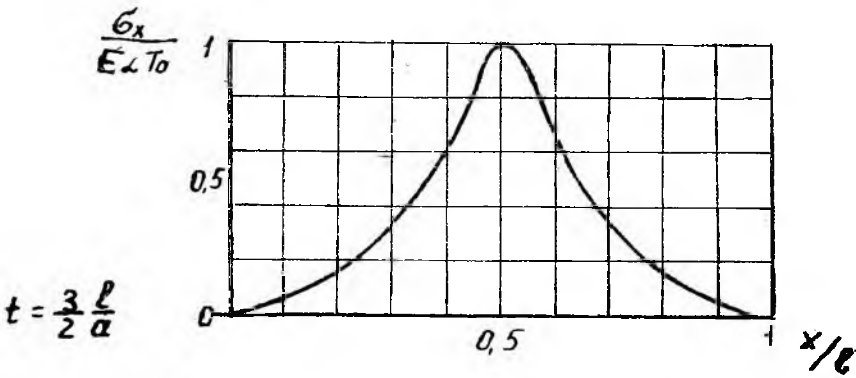
Таким образом, при быстром равномерном нагреве стержня возникают продольные колебания, и вследствие этого, напряжения. Величина напряжений зависит от безразмерного времени нарастания температуры $\bar{t}_0 = \frac{at_0}{l}$ и может достигать величины $\sigma_x = \pm E\alpha T_0$ при $0 \leqslant \frac{at_0}{l} \leqslant \frac{3}{2}$, где T_0 — температура, которую принимает стержень за время t_0.

Эти результаты получены для частного случая роста температуры по времени до постоянного значения по квадратичной зависимости. Формулы (8), (10) и (11) дают напряжения и перемещения для произвольной зависимости температуры от времени.



Фиг. 5 а. Распределение напряжений по длине стержня в различные моменты времени





Фиг. 5 в. Распределение напряжений по длине стержня в различные моменты времени.

ЛИТЕРАТУРА

1. Ю. Д. Денискин, Д. Д. Шенкер. Напряжения при объемно-тепловом ударе в равномерно-нагреваемых телах. «Механика твердого тела» (инженерный журнал), № 4, 1966.

2. Г. Паркус. Неустановившиеся температурные напряжения. Физматгиз, 1959.

3. С. П. Тимошенко. Колебания в инженерном отделе. Физматгиз, 1959.

4. Л. И. Фридман. Напряжения при продольных колебаниях прямого стержня, вызванных силой на конце. Сб. «Прочность и динамика авиационных двигателей». Вып. 4, «Машиностроение», 1966.