

М. Ф. КРИЧЕВЕР,

С. М. МАКАРОВ

ПРИМЕНЕНИЕ МЕТОДА МАЛОГО ПАРАМЕТРА К ЗАДАЧЕ О ВЫНУЖДЕННЫХ КОЛЕБАНИЯХ ФУНДАМЕНТА КРИВОШИПНО-ШАТУННОГО МЕХАНИЗМА

Неуравновешенные силы, воздействуя на фундамент, вызывают вынужденные колебания фундамента вместе с установленной на нем машиной. Для большинства машинных установок такие колебания нежелательны и могут быть допущены лишь в пределах, удовлетворяющих условиям нормальной эксплуатации. Поэтому при проектировании установок нужно так выбирать параметры фундамента, чтобы при заданном возбуждении амплитуды не превышали допустимых норм.

Задача решается при следующих допущениях:

1. Имеется плоскость симметрии, перпендикулярная оси вала кривошипа, так что задача будет плоская.

2. Пренебрегаем весом (массой) кривошипа, что может быть оправдано малыми размерами его или уравновешиванием.

3. Угловая скорость вала кривошипа постоянна.

4. Из внешних сил учитывается вес фундамента и шатуна, силы инерции и упругие силы сопротивления сжатию и сдвигу на подошве фундамента. Не учтены силы сопротивления, т. е. трение грунта о подошву и о боковые стенки фундамента.

При составлении дифференциальных уравнений колебаний фундамента используем теорему о движении центра тяжести фундамента и теорему о кинематическом моменте относительно центра тяжести фундамента, причем реакции движущихся частей на фундамент будут входить в ряд внешних сил и будут происходить от весов и сил инерции в переносном вместе с фундаментом и относительном движении этих частей по отношению к нему. Так как фундамент будет совершать и вращательное колебательное движение относительно оси, проходящей через центр тяжести, необходимо учитывать и кориолисовы силы инерции.

В работах [1,2] не учтены переносные и кориолисовы силы инер-

ции частей, момент сил инерции шатуна и дополнительная пара сил инерции (момент, появляющийся при замене массы шатуна статически двумя точечными массами).

Нам представляется целесообразным поставить задачу возможно полнее с применением общих методов механики.

В данной работе даются точные, в рамках сделанных допущений, дифференциальные уравнения движения фундамента, найдено периодическое решение 1-го приближения, указан путь построения решений любого приближения и получены условия резонанса 1-го, 2-го и 3-го порядков.

При решении системы дифференциальных уравнений применен метод малого параметра Пуанкаре [4].

В настоящей работе метод малого параметра применяется к системе уравнений вида:

$$\frac{d^2 x_i}{dt^2} = \Phi_i \left(\frac{d^2 x_1}{dt^2}, \frac{d^2 x_2}{dt^2}, \dots, \frac{d^2 x_n}{dt^2}, \frac{dx_1}{dt}, \frac{dx_2}{dt}, \dots, \frac{dx_n}{dt}, x_1, x_2, \dots, t, \mu \right),$$

$$(i = 1, 2, \dots, n; n = 3)$$

За параметр μ принимаем отношение массы шатуна к общей массе фундамента и шатуна, который имеет величину не более 0,5.

ГЕОМЕТРИЧЕСКИЕ И КИНЕМАТИЧЕСКИЕ СООТНОШЕНИЯ ДВИЖУЩИХСЯ ЧАСТЕЙ

Будем считать вращение вала кривошипа равномерным с угловой скоростью ω и угол поворота, отсчитываемый по часовой стрелке от вертикали, будет $\varphi = \omega t$.

Обозначим через a расстояние от оси вращения вала кривошипа до центра тяжести фундамента и отношение длины кривошипа к длине шатуна через

$$\lambda = \frac{r}{l}.$$

Абсолютная угловая скорость шатуна $M'M'' = l$ в каждый данный момент времени относительно центра C_1 тяжести будет

$$\omega_{c_1 \text{ шат}} = \omega_{\text{шат}} + \Omega,$$

где $\Omega = \frac{d\theta}{dt}$, а $\omega_{\text{шат}}$, согласно работе [3], определяется из соотношения

$$\sin \psi = \lambda \cdot \sin \varphi. \quad (1,1)$$

Дифференцируя (1,1), получим для угловой скорости шатуна в относительном движении следующее выражение (знаком минус учтено направление вращения шатуна):

$$\omega_{\text{шат}} = \frac{d\psi}{dt} = - \frac{\lambda \omega \cos \varphi}{\sqrt{1 - \lambda^2 \sin^2 \varphi}}, \quad (1,2)$$

или разлагая в ряд, приближенно получим:

$$\omega_{\text{шат}} = -\lambda\omega \left[\left(1 + \frac{\lambda^2}{8}\right) \cos \varphi - \frac{\lambda^2}{8} \cos 3\varphi \right]. \quad (1,3)$$

Абсолютное ускорение шатуна $M'M''$

$$\varepsilon_{c1 \text{ шат}} = \frac{d\omega_{c1 \text{ шат}}}{dt} = \frac{d\omega_{\text{шат}}}{dt} + \frac{d\Omega}{dt} = \varepsilon_{\text{шат}} + \varepsilon, \quad (1,4)$$

где

$$\varepsilon_{\text{шат}} = \frac{d^2\psi}{dt^2} = -\frac{\lambda\omega^3(\lambda^2 - 1) \sin \varphi}{(1 - \lambda^2 \sin^2 \varphi)^{3/2}} \quad (1,5)$$

или разлагая в ряд, приближенно получим:

$$\varepsilon_{\text{шат}} \approx -\lambda\omega^2(1 - \lambda^2) \left[\left(1 + \frac{9}{8}\lambda^2\right) \sin \varphi - \frac{3}{8}\lambda^2 \sin 3\varphi \right]. \quad (1,6)$$

Абсолютные ускорения точек M' и M'' в каждый данный момент времени легко могут быть выражены (фиг. 1) в следующем виде.

Для точки M' абсолютное ускорение \overline{W}' будет:

$$\overline{W}' = \overline{W}'_{\text{пер}} + \overline{W}'_{\text{отн}} + \overline{W}'_{\text{кор}}$$

или в развернутой форме:

$$\begin{aligned} \overline{W}' = & \bar{i} \frac{d^2x_c}{dt^2} + \bar{j} \frac{d^2y_c}{dt^2} + \varepsilon x \overline{CM}' - \Omega^2 \overline{CM}' - \\ & - \omega^2 \overline{AM}' + 2\overline{\Omega x V}'_r, \end{aligned} \quad (1,7)$$

$$\text{где } V'_r = \omega r \text{ и } W'_{\text{отн}} = \omega^2 r.$$

Для точки M'' абсолютное ускорение будет:

$$\begin{aligned} \overline{W}'' = & \bar{i} \frac{d^2x_c}{dt^2} + \bar{j} \frac{d^2y_c}{dt^2} + \varepsilon x \overline{CM}'' - \\ & - \Omega^2 \overline{CM}'' + \overline{W}''_r + 2\overline{\Omega x V}''_r, \end{aligned} \quad (1,8)$$

где CM'' , V''_r , W''_r , согласно работе [3], могут быть выражены следующими формулами:

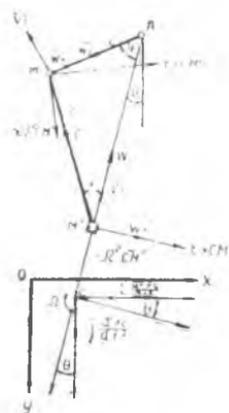
$$\overline{CM}'' = \overline{AC} - \overline{AM}'' = a - \left[\left(r \cos \varphi + \frac{\lambda}{4} \cos 2\varphi \right) + l - \frac{r\lambda}{4} \right]; \quad (1,9)$$

$$V''_r = r\omega \left(\sin \varphi + \frac{\lambda}{2} \sin 2\varphi \right); \quad (1,10)$$

$$W''_r = r\omega^2 (\cos \varphi + \lambda \cos 2\varphi). \quad (1,11)$$

ОПРЕДЕЛЕНИЕ СИЛ ДАВЛЕНИЯ НА ФУНДАМЕНТ

Определим силы давления шатуна на фундамент, передающиеся на подшипник A и на направляющую AC . Эти силы давления происходят от весов частей и сил инерции в абсолютном движении.



Фиг. 1.

Обозначим через P вес шатуна, m — массу его, тогда $P = mg$.

Для определения сил инерции шатуна воспользуемся системой масс, сосредоточенных в центрах шарниров M' и M'' невесомого шатуна, т. е. произведем статическую замену массы шатуна двумя сосредоточенными массами m' и m'' или весами $P' = m'g$ и $P'' = m''g$.

При статической замене массы шатуна двумя точечными массами выполняются следующие уравнения:

$$m'l' = m''l'' \quad (2,2)$$

$$m'' + m' = m, \quad (2,3)$$

где $l' = C_1M'$, $l'' = C_1M''$.

Тогда точечные массы очевидно будут

$$m' = m \frac{l''}{l'}, \quad (2,4)$$

$$m'' = m \frac{l'}{l}. \quad (2,5)$$

Согласно работе [3], момент сил инерции системы двух масс, статически заменяющих массу шатуна, отличается от действительного главного момента сил инерции шатуна на величину

$$L = m(l'l'' - \rho^2) \epsilon_{c_1 \text{ шат}}, \quad (2,6)$$

где ρ — радиус инерции шатуна относительно центра тяжести C_1 , а равнодействующая сила инерции совпадает с действительным главным вектором сил инерции шатуна.

Для того, чтобы система сосредоточенных масс при статической замене была полностью эквивалентна звену, необходимо приложить пару сил инерции ($Q'Q''$) с моментом L согласно формуле (2, 6).

Задав плечо этой пары равным длине шатуна l , получим:

$$Q' = Q'' = Q = \frac{m(l'l'' - \rho^2)}{l} \cdot \epsilon_{c_1 \text{ шат}}. \quad (2,7)$$

Силы Q' и Q'' приложены соответственно в точках M' и M'' , направлены перпендикулярно к шатуну M' и M'' в стороны, соответствующие знаку момента.

Для определения давления на подшипниках A и на направляющую AC применяем принцип Даламбера для точек M' и M'' .

Давления будут равны:

$$\bar{N}' = -\bar{R}' = -m'\bar{W}' + \bar{P}' + \bar{S}' + \bar{Q}';$$

$$\bar{N}'' = -\bar{R}'' = -m''\bar{W}'' + \bar{P}'' + \bar{S}'' + \bar{Q}''$$

где \bar{R}' и \bar{R}'' — реакции давлений со стороны подшипника и направляющей на точки M' и M'' , а остальные силы понятны из фиг. 2.

Подставляя в выражение для давления вместо \bar{w}' , \bar{w}'' их выражения из формул (1,7) и (1,8), получим:

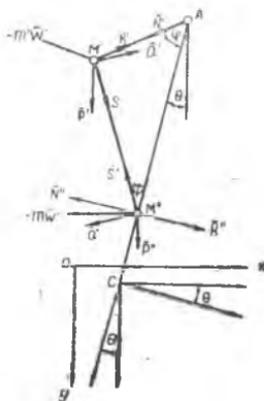
$$\bar{N}' = -m' \left[\bar{i} \frac{d^2 x_c}{dt^2} + \bar{j} \frac{d^2 y_c}{dt^2} + \bar{\varepsilon} x C \bar{M}' - \Omega^2 C \bar{M}' - \omega^2 \bar{A} \bar{M}' + \right. \\ \left. + 2\bar{\Omega} x \bar{V}_2' \right] + \bar{P}' + \bar{S}' + \bar{Q}'. \quad (2,8)$$

$$\bar{N}'' = -m'' \left[\bar{i} \frac{d^2 x_c}{dt^2} + \bar{j} \frac{d^2 y_c}{dt^2} + \bar{\varepsilon} x C \bar{M}'' - \Omega^2 C \bar{M}'' + \right. \\ \left. + \bar{W}_r'' + 2\bar{\Omega} x \bar{V}_r'' \right] + \bar{P}'' + \bar{S}'' + \bar{Q}''. \quad (2,9)$$

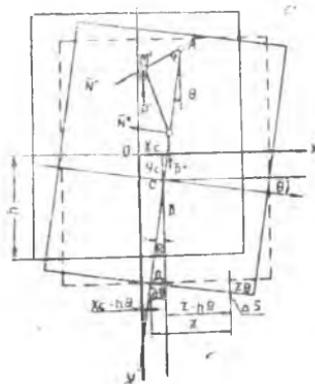
СОСТАВЛЕНИЕ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ КОЛЕБАНИЙ ФУНДАМЕНТА

Составим дифференциальные уравнения вынужденных колебаний фундамента.

Пусть в некоторый момент времени t центр тяжести фундамента сместится из начального положения вертикального упругоравновесного положения O в новое положение C с координатами X_c, Y_c и повернется вокруг горизонтальной оси, проходящей через центр тяжести C на угол Θ (фиг. 3). При этом, как видно из чертежа,



Фиг. 2.



Фиг. 3.

любая элементарная площадка основания (имеющего форму прямоугольника) будет иметь смещения горизонтальные $x-h\Theta$ и вертикальные $y+z\Theta$, где z и h координаты площадки в системе осей, параллельных неподвижным, с началом в точке C и движущихся поступательно вместе с C ;

Θ — малый угол поворота фундамента относительно C .

Дифференциальные уравнения колебания фундамента будут иметь вид:

$$M \frac{d^2 x_c}{dt^2} = N_x' + N_x'' + F_x,$$

$$M \frac{d^2 y_c}{dt^2} = N_y' + N_y'' + F_y + P,$$

$$I_c \frac{d^2 \theta}{dt^2} = \text{mom}_c(\bar{N}') + \text{mom}_c(\bar{N}'') + \sum \text{mom}_c(\bar{F}_1), \quad (3,1)$$

где M — масса фундамента;

I_c — момент инерции фундамента относительно C ;

P — вес фундамента, приложенный в центре тяжести его, в точке C . $\text{mom}_c(\bar{N}') + \text{mom}_c(\bar{N}'')$ — момент давлений относительно C ;

F_x и F_y — главный момент упругих сил грунта относительно C .

Согласно работам [1,2] F_x , F_y и $\sum \text{mom}_c(F_1)$ могут быть выражены формулами:

$$F_x = -c_1(x_c - hb) \cdot S. \quad (3,2)$$

$$F_y = -c(f + y_c) \cdot S. \quad (3,3)$$

$$\sum \text{mom}_c(\bar{F}_1) = hC_1 S x_c - (c_1 h^2 S + cI_1 + P_{\text{общ}} \cdot h) \theta. \quad (3,4)$$

Выше введены следующие обозначения:

C — коэффициент упругого сжатия грунта, коэффициент по кг/см^3 ;

C_1 — коэффициент упругого сдвига грунта, кг/см^3 ;

f — осадка грунта при статическом действии веса всей установки так, что $P_{\text{общ}} = C \cdot f \cdot S$, причем $P_{\text{общ}} = P + P' + P''$.

S — площадь основания, имеющего ось симметрии, перпендикулярную плоскости чертежа:

$I_1 = \int z^3 ds$ — момент инерции площадь основания относительно оси, проходящей через точку D , перпендикулярной плоскости чертежа.

Подставив выражения из формул (1,5), (1,6), (1,9), (2,6), (3,2), (3,3) и (3,4) в (3,1), получим систему дифференциальных уравнений

$$\begin{aligned} M \frac{d^2 x_c}{dt^2} = & -c_1(x_c - hb) \cdot s - m' \left[\frac{d^2 x_c}{dt^2} - \frac{d^2 \theta}{dt^2} (r \cos(\theta + \varphi) - a \cos \theta) + \right. \\ & + \left. \left(\frac{d\theta}{dt} \right)^2 (r \cdot \sin(\theta + \varphi) - a \sin \theta) + r\omega^2 \sin(\theta + \varphi) + 2r\omega \frac{d\theta}{dt} \times \right. \\ & \times \left. \sin(\theta + \varphi) \right] - m'' \left[\frac{d^2 x_c}{dt^2} + \frac{d^2 \theta}{dt^2} (a - (r \cos \varphi + l \cos \psi)) \cos \theta - \right. \\ & - \left. \left(\frac{d\theta}{dt} \right)^2 (a - (r \cos \varphi + l \cos \omega)) \sin \theta + r\omega^2 (\cos \varphi + \right. \\ & \left. + \lambda \cos 2\varphi) \sin \theta + 2r\omega \frac{d\theta}{dt} \left(\sin \varphi + \frac{\lambda}{2} \sin 2\varphi \right) \cos \theta \right]. \quad (3,5) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} M \frac{d^2 y_c}{dt^2} = & -cy_c S - m' \left[\frac{d^2 y_c}{dt^2} - \frac{d^2 \theta}{dt^2} (r \sin(\theta + \varphi) - a \sin \theta) - \right. \\ & - \left. \left(\frac{d\theta}{dt} \right)^2 (r \cos(\theta + \varphi) - a \cos \theta) - r\omega^2 \cos(\theta + \varphi) - \right. \end{aligned}$$

$$-2r\omega \frac{d\theta}{dt} \cos(\theta + \varphi)] - m'' \left[\frac{d^2 y_c}{dt^2} + \frac{d^2 \theta}{dt^2} (a - (r \cos \varphi + l \cos \psi)) \times \right. \\ \left. \times \sin \theta + \left(\frac{d\theta}{dt} \right)^2 (a - r \cos \varphi - l \cos \psi) \cos \theta - r \omega^2 (\cos \varphi + \right. \\ \left. + \lambda \cos 2\varphi) \cos \theta + 2r\omega \frac{d\theta}{dt} \left(\sin \varphi + \frac{\lambda}{2} \sin 2\varphi \right) \cdot \sin \theta \right]. \quad (3,6)$$

$$I_c \frac{d^2 \theta}{dt^2} = hc_1 s x_c - (c_1 h^2 s + cI - P_{\text{осщ}} h) \theta - m' \left[\frac{d^2 y_c}{dt^2} - \right. \\ \left. - \frac{d^2 \theta}{dt^2} (r \sin(\theta + \varphi) - a \sin \theta) - \left(\frac{d\theta}{dt} \right)^2 (r \cos(\theta + \varphi) - a \cos \theta) - \right. \\ \left. - r \omega^2 \cos(\theta + \varphi) - 2r\omega \frac{d\theta}{dt} \cos(\theta + \varphi) \right] \cdot a \sin \theta + P' a \sin \theta - \\ - m' \left[\frac{d^2 x_c}{dt^2} - \frac{d^2 \theta}{dt^2} (r \cos(\theta + \varphi) - a \cos \theta) - \left(\frac{d\theta}{dt} \right)^2 \cdot (-r \sin(\theta + \varphi) + \right. \\ \left. + a \cdot \sin \theta) + r \omega^2 \sin(\theta + \varphi) + 2r\omega \frac{d\theta}{dt} \sin(\theta + \varphi) \right] a \cos \theta - \\ - m'' \left[\frac{d^2 y_c}{dt^2} + \frac{d^2 \theta}{dt^2} (a - r \cos \varphi - l \cos \psi) \sin \theta + \left(\frac{d\theta}{dt} \right)^2 (a - r \cos \varphi - \right. \\ \left. - l \cos \psi) \cos \theta - r \omega^3 (\cos \varphi + \lambda \cos 2\varphi) \cos \theta + 2r\omega \frac{d\theta}{dt} \left(\sin \varphi + \right. \right. \\ \left. \left. + \frac{\lambda}{2} \sin 2\varphi \right) \sin \theta \right] (a - r \cos \varphi - l \cos \psi) \cdot \sin \theta + \\ + P' (a - r \cos \varphi - l \cos \psi) \cdot \sin \theta - m'' \left[\frac{d^2 x_c}{dt^2} + \frac{d^2 \theta}{dt^2} (a - r \cos \varphi - \right. \\ \left. - l \cos \psi) \cos \theta - \left(\frac{d\theta}{dt} \right)^2 (a - r \cos \varphi - l \cos \psi) \cdot \sin \theta + r \omega^2 (\cos \varphi + \right. \\ \left. + \lambda \cos 2\varphi) \cdot \sin \theta + 2r\omega \frac{d\theta}{dt} \left(\sin \varphi + \frac{\lambda}{2} \sin 2\varphi \right) \cos \theta \right] (a - r \cos \varphi - \\ - l \cos \psi) \cos \theta + m(l'l'' - \rho^2) \left\{ \frac{d^2 \theta}{dt^2} - \lambda \omega^2 (1 - \lambda^2) \left[\left(1 + \frac{9}{8} \lambda^2 \right) \times \right. \right. \\ \left. \left. \times \sin \omega t - \frac{3}{8} \lambda^2 \sin 3\omega t \right] \right\}. \quad (3,7)$$

ИНТЕГРИРОВАНИЕ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ КОЛЕБАНИЙ ФУНДАМЕНТА

Для интегрирования системы уравнений (3,5), (3,6), (3,7) применим метод малого параметра, причем за параметр μ примем отношение массы шатуна m к массе всей системы и $M_{\text{общ}} = M + m$, т. е. $\mu = \frac{m}{M+m}$ и учитывая формулы (2,4) и (2,5) получим соотношения:

$$\frac{m}{M_{\text{общ}}} = \mu \frac{l''}{l}; \quad \frac{m''}{M_{\text{общ}}} = \mu \frac{l'}{l}.$$

Введем эти соотношения в систему уравнений (3,5), (3,6), (3,7), предварительно разделив первые два уравнения на $M_{\text{общ}}$, а третье на $I_c = \rho_1^2 \cdot M_{\text{общ}}$, где ρ_1 — приведенный радиус инерции.

Систему уравнений линеаризуем только в отношении $\cos \theta \cong 1$ и $\sin \theta \cong \theta$, т. е. заменяем

$$\sin(\theta + \varphi) \cong \theta \cos \varphi + \sin \varphi, \quad \cos(\theta + \varphi) \cong \cos \varphi - \theta \sin \varphi.$$

Получим систему уравнений:

$$\begin{aligned} \frac{d^2 x_c}{dt^2} = & - \frac{c_1 s}{M_{\text{общ}}} x_c + \frac{c_1 h s}{M_{\text{общ}}} \cdot \theta - \mu \left\{ \frac{l''}{l} \left[\frac{d^2 \theta}{dt^2} (r \cos \varphi - r \theta \sin \varphi - a) + \right. \right. \\ & + \left(\frac{d\theta}{dt} \right)^2 (r \theta \cos \varphi + r \sin \varphi - a \theta) + r \omega^2 \theta \cos \varphi + r \omega^2 \sin \varphi + \\ & + 2r \omega \frac{d\theta}{dt} \theta \cos \varphi + 2r \omega \frac{d\theta}{dt} \sin \varphi \left. \right] + \frac{l'}{l} \left[\frac{d^2 \theta}{dt^2} (a - r \cos \varphi - l \cos \psi) - \right. \\ & - \left(\frac{d\theta}{dt} \right)^2 (a - r \cos \varphi - l \cos \psi) \theta + r \omega^2 (\cos \varphi + \lambda \cos 2\varphi) \theta + \\ & \left. \left. + 2r \omega \frac{d\theta}{dt} \left(\sin \varphi + \frac{\lambda}{2} \sin 2\varphi \right) \right] \right\}. \end{aligned} \quad (4,1)$$

$$\begin{aligned} \frac{d^2 y_c}{dt^2} = & - \frac{cs}{M_{\text{общ}}} \cdot y_c - \mu \left\{ \frac{l''}{l} \left[- \frac{d^2 \theta}{dt^2} (r \theta \cos \varphi - a \theta + r \sin \varphi) - \right. \right. \\ & - \left(\frac{d\theta}{dt} \right)^2 (r \cos \varphi - a - r \theta \sin \varphi) - r \omega^2 \cos \varphi + r \omega^2 \theta \sin \varphi - \\ & - 2r \omega \frac{d\theta}{dt} \cos \varphi + 2r \omega \frac{d\theta}{dt} \theta \sin \varphi \left. \right] + \frac{l'}{l} \left[\frac{d^2 \theta}{dt^2} (a - r \cos \varphi - l \cos \psi) \theta + \right. \\ & + \left(\frac{d\theta}{dt} \right)^2 (a - r \cos \varphi - l \cos \psi) - r \omega^2 (\cos \varphi + \lambda \cos 2\varphi) + \\ & \left. \left. + 2r \omega \frac{d\theta}{dt} \left(\sin \varphi + \frac{\lambda}{2} \sin 2\varphi \right) \theta \right] \right\}. \end{aligned} \quad (4,2)$$

$$\begin{aligned} \frac{d^2 \theta}{dt^2} = & \frac{c_1 h s}{\rho_1^2 M_{\text{общ}}} x_c - \frac{c_1 h^2 s + c I_1 - P_{\text{общ}} h}{\rho_1^2 M_{\text{общ}}} \cdot \theta - \frac{\mu}{\rho_1^2} \left\{ \frac{l''}{l} \left[\frac{d^2 y_c}{dt^2} - \right. \right. \\ & - \frac{d^2 \theta}{dt^2} (r \theta \cos \varphi + r \sin \varphi - a \theta) - \left(\frac{d\theta}{dt} \right)^2 (r \cos \varphi - r \theta \sin \varphi - a) - \\ & - r \omega^2 \cos \varphi + r \omega^2 \theta \sin \varphi - 2r \omega \frac{d\theta}{dt} \cos \varphi + 2r \omega \frac{d\theta}{dt} \theta \sin \varphi - q \left. \right] a \theta + \\ & + \frac{l'' a}{l} \left[\frac{d^2 x_c}{dt^2} - \frac{d^2 \theta}{dt^2} (r \cos \varphi - r \theta \sin \varphi - a) - \left(\frac{d\theta}{dt} \right)^2 (-r \theta \cos \varphi - \right. \\ & - r \sin \varphi + a \theta) + r \omega^2 \theta \cos \varphi + r \omega^2 \sin \varphi + 2r \omega \frac{d\theta}{dt} \theta \cos \varphi + \\ & + 2r \omega \frac{d\theta}{dt} \sin \varphi \left. \right] + \frac{l'}{l} \left[\frac{d^2 y_c}{dt^2} + \frac{d^2 \theta}{dt^2} \theta (a - r \cos \varphi - l \cos \psi) + \right. \\ & \left. + \left(\frac{d\theta}{dt} \right)^2 (a - r \cos \varphi - l \cos \psi) - r \omega^2 (\cos \varphi + \lambda \cos 2\varphi) + \right. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& + 2r\omega \frac{d\theta}{dt} \cdot \theta \left(\sin \varphi + \frac{\lambda}{2} \sin 2\varphi \right) - g \left] (a - r \cos \varphi - l \cos \psi) \theta + \right. \\
& + \frac{l'}{l} \left[\frac{d^2 x_c}{dt^2} + \frac{d^2 \theta}{dt^2} (a - r \cos \varphi - l \cos \psi) - \left(\frac{d\theta}{dt} \right)^2 \cdot \theta \cdot (a - r \cos \varphi - \right. \\
& \quad \left. - l \cos \psi) + r\omega^2 (\cos \varphi + \lambda \cos 2\varphi) \cdot \theta + 2r\omega \frac{d\theta}{dt} \left(\sin \varphi + \right. \right. \\
& \quad \left. \left. + \frac{\lambda}{2} \sin 2\varphi \right) \right] (a - r \cos \varphi - l \cos \psi) - (l'l'' - \rho^2) \left[\frac{d^2 \theta}{dt^2} - \right. \\
& \quad \left. - \lambda\omega^2 (1 - \lambda^2) \left(1 + \frac{9}{8} \lambda^2 \right) \cdot \sin \varphi - \frac{3}{8} \lambda \sin 3\varphi \right] \left. \right\} \quad (4,3)
\end{aligned}$$

Представим решения x_c , y_c , θ в виде рядов:

$$\begin{aligned}
x_c &= x_{c_0} + \mu x_{c_1} + \mu^2 x_{c_2} + \dots \\
y_c &= y_{c_0} + \mu y_{c_1} + \mu^2 y_{c_2} + \dots \\
\theta &= \theta_0 + \mu \theta_1 + \mu^2 \theta_2 + \dots, \quad (4,4)
\end{aligned}$$

причем x_{c_i} , y_{c_i} , θ_i и их производные по времени при $t=0$ равны нулю для всех $i=1, 2, 3, 4, \dots$

Подставляя значения x_c , y_c , θ в уравнения (4,1), (4,2), (4,3) и приравнявая коэффициенты при одинаковых степенях μ , ограничивая только членами с $\mu^0 = 1$, μ и μ^2 , получим систему уравнений при $\mu^0 = 1$

$$\frac{d^2 x_{c_0}}{dt^2} = - \frac{c_1 s}{M_{\text{общ}}} x_{c_0} + \frac{c_1 h s}{M_{\text{общ}}} \theta_0 \quad (4,1')$$

$$\frac{d^2 y_{c_0}}{dt^2} = - \frac{cs}{M_{\text{общ}}} y_{c_0} \quad (4,2')$$

$$\frac{d^2 \theta_0}{dt^2} = \frac{c_1 h s}{\rho_1^2 M_{\text{общ}}} x_{c_0} - \frac{c_1 h^2 s + c I_1 - P_{\text{общ}} h}{\rho_1^2 M_{\text{общ}}} \theta_0 \quad (4,3')$$

при μ :

$$\begin{aligned}
\frac{d^2 x_{c_1}}{dt^2} &= - \frac{c_1 s}{M_{\text{общ}}} x_{c_1} + \frac{c_1 h s}{M_{\text{общ}}} \theta_1 - \left\{ \frac{l''}{l} \left[- \frac{d^2 \theta_0}{dt^2} (r \cos \varphi - r \theta_0 \sin \varphi - a) + \right. \right. \\
& \quad \left. \left. + \left(\frac{d\theta_0}{dt} \right)^2 (r \theta_0 \cos \varphi + r \sin \varphi - a \theta_0) + r\omega^2 \theta_0 \cos \varphi + r\omega^2 \sin \varphi + \right. \right. \\
& \quad \left. \left. + 2r\omega \frac{d\theta_0}{dt} (\theta_0 \cos \varphi + 2r\omega \frac{d\theta_0}{dt} \sin \varphi) \right] + \frac{l'}{l} \left[\frac{d^2 \theta_0}{dt^2} (a - r \cos \varphi - l \cos \psi) - \right. \right. \\
& \quad \left. \left. - \left(\frac{d\theta_0}{dt} \right)^2 (a - r \cos \varphi - l \cos \psi) \theta_0 + r\omega^2 (\cos \varphi + \lambda \cos 2\varphi) \theta_0 + \right. \right. \\
& \quad \left. \left. + 2r\omega \frac{d\theta_0}{dt} \left(\sin \varphi + \frac{\lambda}{2} \sin 2\varphi \right) \right] \right\} \quad (4,1'')
\end{aligned}$$

$$\frac{d^2 y_{c_1}}{dt^2} = - \frac{cs}{M_{\text{общ}}} y_{c_1} - \left\{ \frac{l''}{l} \left[- \theta_0 \frac{d^2 \theta_0}{dt^2} (r \cos \varphi - a) - \right. \right.$$

$$\begin{aligned}
& -\frac{d^2\theta_0}{dt^2} r \sin \varphi - \left(\frac{d\theta_0}{dt}\right)^2 (r \cos \varphi - a) + \left(\frac{d\theta_0}{dt}\right)^2 \theta_0 r \sin \varphi - r\omega^2 \cos \varphi + \\
& \quad + r\omega^2 \theta_0 \sin \varphi - 2r\omega \frac{d\theta_0}{dt} \cos \varphi + 2r\omega \theta_0 \frac{d\theta_0}{dt} \cdot \sin \varphi \Big] + \\
& + \frac{l'}{l} \left[\frac{d^2\theta_0}{dt^2} \theta_0 (a - r \cdot \cos \varphi - l \cos \psi) + \left(\frac{d\theta_0}{dt}\right)^2 (a - r \cos \varphi - l \cos \psi) - \right. \\
& \quad \left. - r\omega^2 (\cos \varphi + \lambda \cos 2\varphi) + 2r\omega \frac{d\theta_0}{dt} \theta_0 \left(\sin \varphi + \frac{\lambda}{2} \sin 2\varphi \right) \right] \Big\}. \quad (4,2'')
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\frac{d^2\theta_1}{dt^2} &= \frac{c_1 h s}{\rho_1^2 M_{\text{общ}}} x_{c_1} - \frac{c_1 h^2 s + c l_1 - P_{\text{общ}} h}{\rho_1^2 M_{\text{общ}}} \theta_1 - \frac{1}{\rho^2} \left\{ \frac{l''}{l} a \theta_0 \left[\frac{d^2 y_{c_0}}{dt^2} - \right. \right. \\
& - \frac{d^2\theta_0}{dt^2} (r_0 r \cos \varphi + r \sin \varphi - a \theta_0) - \left(\frac{d\theta_0}{dt}\right)^2 (r \cos \varphi - r \theta_0 \sin \varphi - a) - \\
& - r\omega^2 \cos \varphi + r\omega^2 \theta_0 \sin \varphi - 2r\omega \frac{d\theta_0}{dt} \cos \varphi + 2r\omega \frac{d\theta_0}{dt} \theta_0 \cdot \sin \varphi - g \Big] + \\
& \quad + \frac{l''}{l} a \left[\frac{d^2 x_{c_0}}{dt^2} - \frac{d^2\theta_0}{dt^2} (r \cos \varphi - r \theta_0 \sin \varphi - a) - \right. \\
& \quad \left. - \left(\frac{d\theta_0}{dt}\right)^2 (-r \theta_0 \cos \varphi - r \cdot \sin \varphi + a \theta_0) + r\omega^2 \theta_0 \cos \varphi + r\omega^2 \sin \varphi + \right. \\
& \quad \left. + 2r\omega \frac{d\theta_0}{dt} \theta_0 \cos \varphi + 2r\omega \frac{d\theta_0}{dt} \sin \varphi \right] + \frac{l' \theta_0}{l} \left[\frac{d^2 y_{c_0}}{dt^2} + \right. \\
& \quad \left. + \frac{d^2\theta_0}{dt^2} (a - r \cos \varphi - l \cos \psi) + \left(\frac{d\theta_0}{dt}\right)^2 (a - r \cos \varphi - l \cos \psi) - \right. \\
& \quad \left. - r\omega^2 (\cos \varphi + \lambda \cos 2\varphi) + 2r\omega \theta_0 \frac{d\theta_0}{dt} \left(\sin \varphi + \frac{\lambda}{2} \sin 2\varphi \right) - g \right] \times \\
& \times (a - r \cos \varphi - l \cos \psi) + \frac{l'}{l} \left[\frac{d^2 x_{c_0}}{dt^2} + \frac{d^2 \theta_0}{dt^2} (a - r \cos \varphi - l \cos \psi) - \right. \\
& - \left(\frac{d\theta_0}{dt}\right)^2 \theta_0 (a - r \cos \varphi - l \cos \psi) + r\omega^2 (\cos \varphi + \lambda \cos 2\varphi) \theta_0 + \\
& \quad \left. + 2r\omega \frac{d\theta_0}{dt} \left(\sin \varphi + \frac{\lambda}{2} \sin 2\varphi \right) \right] (a - r \cos \varphi - l \cos \psi) - \\
& \quad - l' l'' - \rho^2 \left[\frac{d^2 \theta_0}{dt^2} - \lambda \omega^2 (1 - \lambda^2) \left(1 + \frac{9}{8} \lambda^2 \right) \sin \varphi - \right. \\
& \quad \left. - \frac{3}{8} \lambda^2 \sin 3\varphi \right] \Big\}. \quad (4,3'')
\end{aligned}$$

При μ^2 получены выражения для $\frac{d^2 x_{c_2}}{dt^2}$, $\frac{d^2 y_{c_2}}{dt^2}$ и $\frac{d^2 \theta_2}{dt^2}$, но мы их не приводим в данной статье.

Представим уравнения нулевого приближения в виде

$$\frac{d^2 y_{c_0}}{dt^2} + k_0^2 y_{c_0} = 0 \quad (4,2''')$$

$$\frac{d^2 x_{c_0}}{dt^2} + a_0 x_{c_0} - b_0 \theta_0 = 0 \quad (4,1''')$$

$$\frac{d^2\theta_0}{dt^2} - a_1 x_{c_0} + b_1 \theta_0 = 0. \quad (4,3''')$$

Где введены обозначения

$$\begin{aligned} k_0 &= \sqrt{\frac{cS}{M_{\text{общ}}}}; & a_0 &= \frac{c_1 s}{M_{\text{общ}}}; & b_0 &= \frac{c_1 h s}{M_{\text{общ}}}; \\ a_1 &= \frac{c_1 h s}{\rho_1^2 M_{\text{общ}}}; & b_1 &= \frac{c_1 h^2 s + cI - P_{\text{общ}} h}{\rho_1^2 M_{\text{общ}}}. \end{aligned} \quad (4,5)$$

Составляя характеристические уравнения для этих систем уравнений и убеждаясь, что все корни чисто мнимые, получаем общее решение в виде:

$$\begin{aligned} y_{c_0} &= c_{10} \cos k_0 t + c_{20} \sin k_0 t \\ y'_{c_0} &= -k_0 c_{10} \sin k_0 t + k_0 c_{20} \cos k_0 t \\ x_{c_0} &= D_{10} \cos \rho_1 t + D_{20} \sin \rho_1 t + D_{30} \cos \rho_2 t + D_{40} \sin \rho_2 t \\ x'_{c_0} &= -\rho_1 D_{10} \sin \rho_1 t + \rho_1 D_{20} \cos \rho_1 t - \rho_2 D_{30} \sin \rho_2 t + \rho_2 D_{40} \cos \rho_2 t \\ \theta_0 &= \frac{a_0 - \rho_1^2}{b_0} D_{10} \cos \rho_1 t + \frac{a_0 - \rho_1^2}{b_0} D_{20} \sin \rho_1 t + \\ &+ \frac{a_0 - \rho_2^2}{b_0} D_{30} \cos \rho_2 t + \frac{a_0 - \rho_2^2}{b_0} D_{40} \sin \rho_2 t \\ \theta_0' &= -\frac{\rho_1 (a_0 - \rho_1^2)}{b_0} D_{10} \sin \rho_1 t + \frac{\rho_1 (a_0 - \rho_1^2)}{b_0} D_{20} \cos \rho_1 t - \\ &- \frac{\rho_2 (a_0 - \rho_2^2)}{b_0} D_{30} \sin \rho_2 t + \frac{\rho_2 (a_0 - \rho_2^2)}{b_0} D_{40} \cos \rho_2 t, \end{aligned} \quad (4,6)$$

где

$$\begin{aligned} \rho_1^2 &= \frac{a_0 + b_1}{2} - \sqrt{\left(\frac{a_0 + b_1}{2}\right)^2 - (a_0 b_1 - b_0 a_1)} \\ \rho_2^2 &= \frac{a_0 + b_1}{2} + \sqrt{\left(\frac{a_0 + b_1}{2}\right)^2 - (a_0 b_1 - b_0 a_1)}, \end{aligned} \quad (4,7)$$

а постоянные определяются при помощи начальных условий

$$\left. \begin{aligned} x_c &= x_{c_0} = \underline{x_{c_0}^{(0)}}; & x_c' &= x_{c_1}' = \underline{x_{c_0}^{1(0)}}; & x_{c_i}^{(0)} &= x_{c_i}^{1(0)} = \underline{0} \\ y_c &= y_{c_0} = \underline{y_{c_0}^{(0)}}; & y_c' &= y_{c_0}' = \underline{y_{c_0}^{1(0)}}; & y_{c_i}^{(0)} &= y_{c_i}^{1(0)} = \underline{0} \\ \theta &= \theta_0 = \underline{\theta_0^{(0)}}; & \theta' &= \theta_0' = \underline{\theta_0^{1(0)}}; & \theta_i^{(0)} &= \theta_i^{1(0)} = \underline{0} \end{aligned} \right\} \quad (4,8)$$

$$(i = 1, 2, 3, \dots)$$

формулами

$$\begin{aligned} C_{10} &= y_{c_0}^{(0)}; & C_{20} &= \frac{y_{c_0}^{1(0)}}{k_0}; \\ D_{10} &= \frac{x_{c_0}^{(0)} (a_0 - \rho_2^2) - b_0 \theta_0^{(0)}}{\rho_1^2 - \rho_2^2}; & D_{20} &= \frac{x_{c_0}^{1(0)} (a_0 - \rho_2^2) - b_0 \theta_0^{1(0)}}{\rho_1 (\rho_1^2 - \rho_2^2)}; \end{aligned}$$

$$D_{30} = \frac{-[x_{c_0}^{(0)}(a_0 - p_1^2) - b_0 \theta_0^{(0)}]}{p_1^2 - p_2^2}; \quad D_{40} = \frac{-x_{c_0}^{(0)}(a_0 - p_1^2) - b_0 \theta_0^{(0)}}{p_2(p_1 - p_2^2)}. \quad (4,9)$$

Следовательно, система обладает собственными свободными колебаниями с частотами K_0 , P_1 и P_2 .

Подставляя (4, 6) в (4, 1''), (4, 2''), (4, 3''), получим систему неоднородных линейных дифференциальных уравнений с известной правой частью.

Интегрируя ее известными методами, например, методом произвольных постоянных Лагранжа или методом неопределенных коэффициентов, получаем решение в первом приближении с константами, определяемыми при помощи начальных условий. Это подставляем в (4, 1'''), (4, 2''') и (4, 3'''), получаем снова систему неоднородных линейных дифференциальных уравнений, которую снова, как и ранее интегрируем и т. д., до любого нужного нам приближения.

Для конкретности и более простых приближений остановимся на случае, когда

$$x_{c_0}^{(0)} = x_{c_0}^{1(0)} = y_{c_0}^{(0)} = y_{c_0}^{1(0)} = \theta_0^{(0)} = \theta_0^{1(0)} = 0, \quad (4,10)$$

что почти всегда можно осуществить по крайней мере приближенно на практике.

Тогда

$$x_{c_0} = y_{c_0} = \theta_0 = 0$$

и для первого приближения, которым и ограничимся, получим из (4, 1''), (4, 2'') и (4, 3'') систему дифференциальных уравнений:

$$\begin{aligned} \frac{d^2 y_{c_1}}{dt^2} + k_0^2 y_{c_1} &= r\omega^2 \cos \omega t + \frac{l'}{l} r\omega^2 \lambda \cos 2\omega t \\ \frac{d^2 x_{c_1}}{dt^2} + a_0 x_{c_1} - b_0 \theta_1 &= -\frac{l''}{l} r\omega^2 \sin \omega t. \\ \frac{d^2 \theta_1}{dt^2} - a_1 x_{c_1} + b_1 \theta_1 &= A' \sin \omega t + A''' \sin 3\omega t, \end{aligned} \quad (4,11)$$

где введены обозначения:

$$A' = -\frac{l'' ar\omega^2 + (l'l'' - \rho^2) \lambda \omega^2 (1 - \lambda^2) \left(1 + \frac{9}{8} \lambda^2\right)}{\rho_1^2}. \quad (4,12)$$

$$A''' = \frac{(l'l'' - \rho^2) \lambda \omega^2 (1 - \lambda^2) \cdot \frac{3}{8} \lambda^2}{\rho_1^2}. \quad (4,13)$$

Интегрируя дифференциальные уравнения (4, 11) при всех нулевых начальных условиях (4, 8), получаем их решение (первое приближение) в виде:

$$\begin{aligned} x_{c_1} &= \mu (b' \sin \omega t + b''' \sin 3\omega t). \\ y_{c_1} &= \mu \left[\frac{r\omega^2}{k_0^2 - \omega^2} \cos \omega t + \frac{l' r\omega^2 \lambda}{l(k_0^2 - 4\omega^2)} \cos 2\omega t \right]. \end{aligned}$$

$$c_1 = \mu (c' \cdot \sin \omega t + c''' \cdot \sin 3\omega t), \quad (4,14)$$

где обозначено:

$$b' = \frac{A' b_0 - l'' \lambda \omega^2 (b_1 - \omega^2)}{(b_1 - \omega^2) (a_0 - \omega^2) - b_0 a_1};$$

$$c' = \frac{A' (a_0 - \omega^2) - l'' \lambda a_1 \omega^2}{(b_1 - \omega^2) (a_0 - \omega^2) - b_0 a_1};$$

$$b''' = \frac{A''' b_0}{(b_1 - \omega_1^2) (a_0 - \omega_1^2) - b_0 a_1};$$

$$c''' = \frac{A''' (a_0 - \omega_1^2)}{(b_1 - \omega_1^2) (a_0 - \omega_1^2) - b_0 a_1};$$

$$\omega_1 = 3\omega.$$

Уравнения (4, 14) представляют вынужденные колебания фундамента с частотами ω , 2ω и 3ω .

УСЛОВИЯ РЕЗОНАНСА

Исследуя уравнения (4, 14), получаем условия резонанса:

1. Для вертикальных колебаний резонанс 1-го порядка $\omega = K_0$.
2. Для вертикальных колебаний резонанс 2-го порядка $2\omega = K_0$.
3. Для горизонтальных и вращательных колебаний резонанс 1-го порядка $\omega = P_1$ и $\omega = P_2$.
4. Для горизонтальных и вращательных колебаний резонанс 3-го порядка $\omega = \frac{P_1}{3}$ и $\omega = \frac{P_2}{3}$.

В заключение следует заметить, во-первых, что приведенный в работе метод расчета колебаний может быть легко доведен до практических числовых расчетов как амплитуды, так и условий резонанса, а следовательно, размеров и веса фундамента. Во-вторых, если к точке М присоединена еще какая-то масса m_1 (например, лесопильная рама, поршень компрессора или двигатель, ползун прессы и т. д.), то, считая эту точечную массу принадлежащей шатуну, при расчете центра тяжести шатуна, а, следовательно, и длин l' и l'' , будем иметь, что масса шатуна будет $m + m_1$,

$$m' = (m + m_1) \frac{l''}{l}; \quad m'' = (m + m_1) \frac{l'}{l}; \quad \mu = \frac{m + m_1}{M_{\text{общ}}}$$

и все формулы и расчет остаются прежними.

ЛИТЕРАТУРА

1. А. П. Кондин. «Фундаменты под лесопильные рамы», справочник проектировщика промышленных сооружений, т. IV, ОНТИ, 1935.
2. Д. Д. Баркан. «Динамика оснований и фундаментов», Стройвоенмориздат, 1948.
3. С. Н. Кожевников. «Теория механизмов и машин», Киев, 1954.
4. И. Г. Малкин. «Методы Ляпунова и Пуанкаре в теории нелинейных колебаний». Государственное издательство технико-теоретической литературы, 1949.