

И. М. ВОЛК, Г. А. НОВИКОВ

**ПОПЕРЕЧНЫЙ ИЗГИБ ТРЕХСЛОЙНОЙ КОНСОЛИ  
С ГОФРИРОВАННОЙ ПРОКЛАДКОЙ  
ПРИ ЦИКЛИЧЕСКОМ НАГРУЖЕНИИ**

Экспериментальные данные свидетельствуют о том, что с точки зрения конструкционного демпфирования изгибных вибраций составные стержни с гофрированной прокладкой по сравнению с пластинчатыми стержнями имеют ряд важных преимуществ: большую стабильность демпфирующей способности, что объясняется специфической особенностью поведения при вибрациях гофровой прокладки, обладающей большой гибкостью; возможность получить большую демпфирующую способность системы за счет надлежащего варьирования параметрами (высота, шаг, жесткость) гофрированной прокладки. Поэтому создание конструкций, работающих по принципу стержневых систем с гофрированной прокладкой, во многих случаях является весьма целесообразным. Однако методика расчета таких систем до сих пор не разработана.

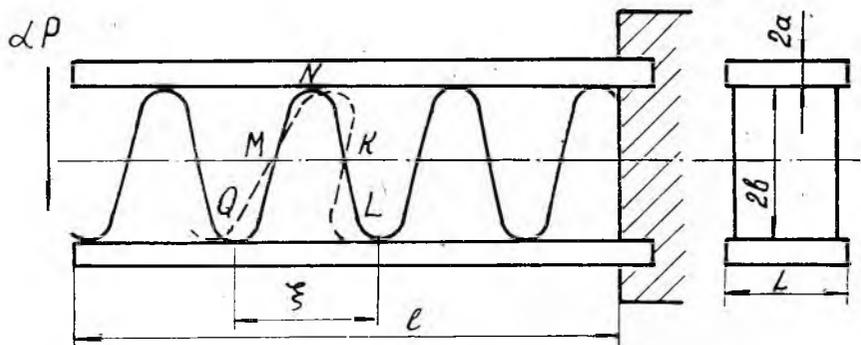
Как известно, вибрационный расчет упругих систем с конструкционным демпфированием сопряжен с необходимостью предварительного определения закона зависимости между деформациями и силами внутреннего сопротивления, возникающими под действием циклически изменяющихся внешних сил. Этот закон сам по себе позволяет в определенной мере оценить демпфирующую способность конструкции, а применительно к задаче о поперечном изгибе трехслойной консоли с гофрированной прокладкой он устанавливается ниже. В опубликованных работах (например, 1—2) аналогичная задача решена лишь применительно к пластинчатым составным стержням.

**Постановка задачи.** Рассматривается трехслойная консольная балка (фиг. 1); состоящая из двух несущих стенок в виде одинаковых пластин с прямоугольным поперечным сечением, между которыми зажат упругодемпфирующий наполнитель, представляющий

собою гофрированную прокладку. На свободный конец консоли действует поперечная сила  $\alpha P$ , где  $P$  задано, а  $\alpha$  — параметр, который может принимать любые значения в интервале  $-1 \leq \alpha \leq +1$ .

Стенки прижаты к прокладке равномерно по всей длине так, что на каждую вершину гофра приходится одна и та же сила прижатия  $p$ , величина которой сохраняется неизменной при изгибе консоли. При этом предполагается, что возможны перемещения стенок относительно прокладки, которым в определенных границах препятствуют только силы трения, проявляющиеся в виде касательных сил взаимодействия между слоями.

Кроме того, предполагается, что при изгибе консоли гофр и стенки в вершинах гофра имеют общую касательную; сопротивление гофрированной прокладки изгибу весьма мало и сила упругости в каждом элементе  $QNL$  гофра (фиг. 1) зависит только от рас-



Фиг. 1.

стояния  $\xi$  между вершинами  $Q$  и  $L$ , будучи прямо пропорциональной изменению  $\Delta \xi$  этого расстояния (коэффициент пропорциональности —  $\kappa$ ); отношения  $2b/l$ ,  $\xi/l$  и  $L/l$  (фиг. 1) малы; силы трения подчиняются закону «сухого» трения (коэффициент трения —  $f$ ), а деформации всех элементов системы находятся в пределах закона Гука. Объемными силами пренебрегаем.

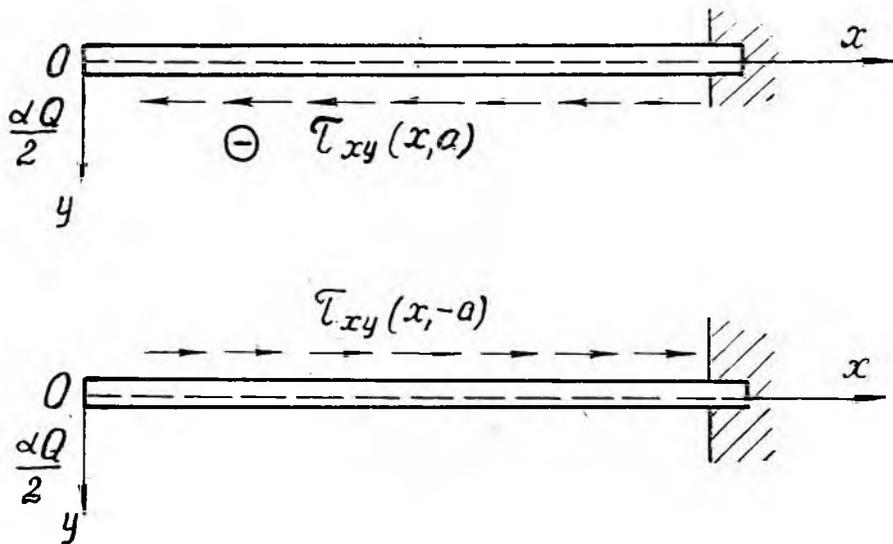
Задача заключается в том, чтобы при принятых выше предположениях получить аналитическое описание петли гистерезиса для любых значений параметров рассматриваемой системы и на этой основе оценить демпфирующую способность последней. Попутно получаем соотношения, позволяющие произвести расчет системы на прочность.

**Загрузка при отсутствии скольжения между стенками и прокладкой.** С увеличением параметра  $\alpha$  от нуля скольжение стенок по гофру начнется лишь с достаточно большого значения  $\alpha = \alpha_0$ . При принятых допущениях на этапе  $0 \leq \alpha \leq \alpha_0$  вершины гофра относительно стенок не перемещаются; на свободном конце консоли каждая из стенок воспринимает одинаковую часть нагрузки  $\alpha P$ , равную  $\alpha Q/2$ , где  $Q$  подлежит определению из условия, что часть на-

грузки  $\alpha(P - Q)$  воспринимается прокладкой; на внутренние грани стенок в точках соприкосновения с гофром действуют силы упругости  $F$  прокладки, проекции которых на ось  $x$  (фиг. 2) определяются равенством;

$$F = k \{ [u(x + \xi, ja) - u(x, ja)] + [u(x - \xi, ja) - u(x, ja)] \}, \quad (2.1)$$

где  $u(x, y)$  — проекция на ось  $x$  перемещения точки стенки с координатами  $x$  и  $y$ , а  $j = +1$  для верхней стенки,  $j = -1$  для нижней стенки. Если эти величины  $F$  отнести к единице площади грани



Фиг. 2.

стенки и равномерно распределить по площади этой грани, то получим величины

$$\tau_{xy}(x, ja) = \frac{1}{\xi} \left( \frac{1}{L\xi} \int_x^{x+\xi} F dx \right), \quad (2.2)$$

которые являются (приближенно) касательными напряжениями в точках упомянутой грани. Рассматриваемый этап будет длиться лишь до тех пор, пока всюду выполняется неравенство:

$$F < fp. \quad (2.3)$$

Следовательно, здесь каждую из стенок гофра можно рассматривать как консоль, на свободный конец которой действует некоторая поперечная сила  $\alpha Q/2$  и на внутреннюю грань действуют касательные напряжения, определяемые равенствами (2.1) и (2.2), где функция  $u(x, ja)$  от переменной  $x$  не определена; неизвестна пока и сила  $Q$ . Для обеспечения постоянства прижатия расстояние между внутренними гранями стенок вдоль оси  $y$  при изгибе

составной консоли должно оставаться неизменным. Таким образом граничными условиями задачи являются:

$$\begin{aligned} \sigma_x(0, y) = 0; \quad \sigma_y(x, \pm a) = 0; \quad \tau_{xy}(x, -ja) = 0; \\ -L \int_{-a}^{+a} \tau_{xy}(0, y) dy = \frac{\alpha Q}{2}; \\ \tau_{xy}(x, ja) = -\frac{1}{\xi} \left( \frac{j}{L\xi} \int_x^{x+\xi} F dx \right); \\ -u(l, 0) = 0; \quad v(l, 0) = 0; \quad \frac{\partial v(l, 0)}{\partial x} = 0, \end{aligned} \quad (2.4)$$

где  $v(x, y)$  — проекция перемещения на ось  $y$ , а  $\sigma_x(x, y)$ ,  $\sigma_y(x, y)$  и  $\tau_{xy}(x, y)$  — общепринятые обозначения нормальных и касательных напряжений. В (2.4) записаны граничные условия как для верхней, так и для нижней стенок. Кроме того, должно быть выполнено условие:

$$v_v(x, a) = v_n(x, -a), \quad (2.4')$$

где  $v_v$  и  $v_n$  — значения  $v$  соответственно для верхней и нижней стенок.

Учитывая, что в (2.4) функция  $u(x, ja)$  и сила  $Q$  пока неизвестны, задачу целесообразно решать не методом сопротивления материалов, а методом теории упругости. Решение плоской задачи теории упругости сводится к интегрированию дифференциального уравнения

$$\frac{\partial^4 \varphi}{\partial x^4} + 2 \frac{\partial^4 \varphi}{\partial x^2 \partial y^2} + \frac{\partial^4 \varphi}{\partial y^4} = 0 \quad (2.5)$$

при заданных граничных условиях. Здесь  $\varphi$  — функция напряжений, через которую напряжения выражаются следующим образом:

$$\sigma_x = \frac{\partial^2 \varphi}{\partial y^2}; \quad \sigma_y = \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2}; \quad \tau_{xy} = -\frac{\partial^2 \varphi}{\partial x \partial y}, \quad (2.6)$$

а перемещения связаны с напряжениями законом Гука:

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial u}{\partial x} &= \frac{1}{E} (\sigma_x - \nu \sigma_y) \\ \frac{\partial v}{\partial y} &= \frac{1}{E} (\sigma_y - \nu \sigma_x) \\ \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} &= \frac{1}{G} \tau_{xy} \end{aligned} \right\}, \quad (2.7)$$

где  $E$  и  $G$  — модули упругости,  $\nu = (E/2G) - 1$ .

Если функцию напряжений, как обычно, искать в виде полинома, то из граничного условия для  $\sigma_y$  следует, что этот полином относительно  $x$  должен быть не выше первого порядка. Отсюда следует, что величина  $u(x, y)$  будет относительно  $x$  полиномом не выше

второго порядка [см. (2.6) и первое из равенств (2.7)]. Таким образом, пусть

$$u(x, y) = U_0(y) + U_1(y)x + U_2(y)x^2;$$

тогда из (2.2) получаем:

$$\tau_{xy}(x, ja) = j \frac{2k\xi}{L} U_2(y). \quad (2.8)$$

Это означает, в частности, что скольжение стенок по гофру начнется одновременно по всей длине стенок.

Кроме того, если учесть вид уравнения (2.5), то приходим к выводу, что функцию напряжений следует искать в форме:

$$\varphi = Axy^3 + Bxy^2 + Cxy, \quad (2.9)$$

где для верхней и нижней пластинок постоянные  $A$ ,  $B$  и  $C$  каждый раз подбираются так, чтобы удовлетворялись граничные условия для напряжений. Граничные условия для перемещений, по мере возможности, удовлетворяются выбором произвольных постоянных, появляющихся при интегрировании уравнений (2.7),

Осуществив все несложные вычисления по указанной выше схеме, приходим к следующим результатам:

$$\begin{aligned} u = & -\frac{\alpha Q}{12EI} \{3\lambda x^2 y - j\lambda(1-\lambda)ax^2 - \lambda(v+2)y^3 + \\ & + j\lambda(1-\lambda)(v+2)ay^2 - [3\lambda l^2 - \frac{E}{G}(2+\lambda)a^2]y + \\ & + j\lambda(1-\lambda)al^2\}; \end{aligned} \quad (2.10)$$

$$\begin{aligned} v = & \frac{\alpha Q}{12EI} [3\lambda vxy^2 - 2j\lambda v(1-\lambda)axy + \lambda x^3 - 3\lambda l^2 x + 2\lambda l^3]; \\ \sigma_x = & \frac{\alpha Q}{6I} [j(1-\lambda)a - \lambda 3y]x; \quad \sigma_y = 0; \\ \tau_{xy} = & \frac{\alpha Q}{12I} [3\lambda y^2 - 2j(1-\lambda)ay - (2+\lambda)a^2], \end{aligned} \quad (2.11)$$

где  $I$  — момент инерции площади поперечного сечения стенки относительно центральной оси, перпендикулярной плоскости изгиба, а  $\lambda$  — безразмерный параметр, определенный равенством:

$$\lambda = \frac{2aLE + k\xi}{2(aLE + 2k\xi)}. \quad (2.12)$$

Найденное решение задачи удовлетворяет не только дифференциальным уравнениям (2.5) и (2.7) и всем граничным условиям (2.4), но так же и условию (2.4'). При этом прогиб  $q = v(0, y)$  свободного конца консоли выражается равенством:

$$q = \frac{\lambda l^3}{6EI} \alpha Q. \quad (2.13)$$

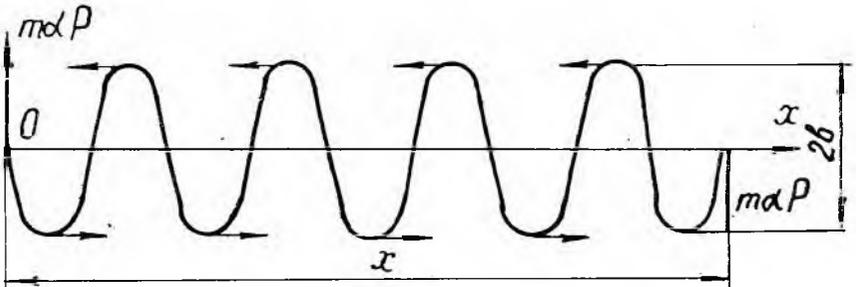
· Нам остается лишь определить силу  $Q$ , содержащуюся в полученных выше выражениях. Она выражается равенством:

$$Q = (1 - m) \alpha P,$$

где  $m \alpha P$  — часть силы  $\alpha P$  (фиг. 3), воспринимаемая гофровой прокладкой и определяемая из необходимого условия равновесия прокладки, согласно которому выполняется равенство:

$$m \alpha P = \frac{2 \alpha Q a^2 b (1 - \lambda) L}{3I},$$

полученное из условия равенства момента относительно любого центра силы  $m \alpha P$  сумме моментов всех сил относительно того же



Фиг. 3.

центра, с которыми стенки воздействуют на гофр. Из последних двух равенств определяется величина  $Q$

$$Q = \frac{a}{a + (1 - \lambda)b} P. \quad (2.14)$$

Подставив (2.14) в (2.10) и (2.11), получим полное решение задачи на рассматриваемом этапе  $0 \leq \alpha \leq \alpha_0$  загрузки. Из (2.13), в частности, имеем

$$q = \frac{\mu I^3}{6EI} \alpha P, \quad (2.15)$$

где

$$\mu = \frac{(2aLE + k\xi)a}{2a^2LE + (4a + 3b)k\xi}. \quad (2.16)$$

Жесткость системы на этапе отсутствия скольжения определяется формулой:

$$c_1 = \frac{6EI}{\mu I^3} (\alpha P = c_1 q). \quad (2.17)$$

Значение параметра  $\alpha = \alpha_0$ , при котором заканчивается названный выше этап, выражается равенством:

$$\alpha_0 P = \frac{2\lambda fpa}{\mu(1 - \lambda)\xi}, \quad (2.18)$$

что следует из (2.3), (2.1), (2.10) и (2.14), а часть нагрузки  $\alpha_0 P$ , воспринимаемая гофром, равна

$$m\alpha_0 P = \frac{2(\lambda - \mu)jpa}{\mu(1 - \lambda)\xi}. \quad (2.19)$$

### Загрузка на этапе скольжения между стенками и прокладкой.

При дальнейшем увеличении нагрузки ( $\alpha_0 \leq \alpha \leq 1$ ) изменение расстояния между вершинами гофра прекращается и внутренние грани стенок консоли скользят по вершинам гофровой прокладки. Касательные напряжения на упомянутых гранях с увеличением нагрузки  $\alpha P$  сохраняются неизменными и определяются равенством:

$$\tau_{xy}(x, ja) = -\frac{jP}{L\xi}; \quad (3.1)$$

неизменной также остается и та часть нагрузки  $\alpha P$ , которая воспринимается гофром, сохраняя значение (2.19).

На рассматриваемом этапе загрузки граничные условия задачи отличаются от граничных условий (2.4) только тем, что условия, наложенные ранее на величину  $\tau_{xy}$  на внутренних гранях стенок, должны быть заменены условием (3.1), а роль силы  $\alpha Q$  выполняет величина  $\alpha Q = \alpha P - m\alpha_0 P$ , где  $m\alpha_0 P$  определено равенством (2.19). Поэтому, функцию напряжений по-прежнему следует искать в виде (2.9), причем величины  $\sigma_x$ ,  $\sigma_y$ ,  $\tau_{xy}$ ,  $u$  и  $v$  определяются равенством (2.6) и (2.7).

После вычислений, аналогичных выполненным в предыдущем разделе, получаем:

$$u = -\frac{1}{12EI} \left[ 3Ax^2y - jBx^2 - A(\nu + 2)y^3 + jB(\nu + 2)y^2 - \left( 3Al^2 - \frac{eE}{G} \right) y + jBl^2 \right]; \quad (3.2)$$

$$v = \frac{1}{12EI} (3A\nu xy^2 - j2B\nu xy + Ax^3 - 3Al^2x + 2Al^3); \quad (3.3)$$

$$\sigma_x = \frac{x}{6I} (jB - 3Ay); \quad \sigma_y = 0; \quad \tau_{xy} = \frac{1}{12I} (3Ay^2 - j2By - C), \quad (3.4)$$

где

$$A = \alpha P - \frac{2jP}{\xi} (a + b); \quad B = \frac{2jPa^2}{\xi}; \\ C = a^2 \left[ 3\alpha P - \frac{2jpa(3\lambda - \mu\lambda - 2\mu)}{\mu(1 - \lambda)\xi} \right]. \quad (3.5)$$

Из (3.3), учитывая (3.5), в частности, получаем величину прогиба на свободном конце верхней и нижней стенок на этапе загрузки  $\alpha_0 \leq \alpha \leq 1$ :

$$q = v(0, y) = -\frac{j^3}{6EI} \left[ \alpha P - \frac{2jP}{\xi} (a + b) \right]. \quad (3.6)$$

Величина  $q$  в конце первого и в начале второго этапа должна

совпадать, в чем можно убедиться, сравнив при  $\alpha = \alpha_0$  (3.6) с (2.15), учитывая при этом (2.18).

Как видно из (3.6), на втором этапе сила сопротивления составляется из силы упругого сопротивления с коэффициентом жесткости

$$c_2 = \frac{6EI}{l^3} \quad (3.7)$$

и неупругого сопротивления  $R$ , обусловленного трением (условно назовем эту силу «обобщенным трением») и определяемого равенством

$$R = \frac{2fp(a+b)}{\xi} \quad (3.8)$$

Согласно (2.13) в конце первого этапа (или в начале второго) имеем

$$\Delta_0 = q_{\alpha=\alpha_0} = \frac{\mu}{1-\mu} \cdot \frac{l^3 R}{6EI}, \quad (3.9)$$

а в конце второго этапа прогиб свободного конца согласно (3.6) выражается равенством

$$\Delta_1 = q_{\alpha=1} = \frac{l^3}{6EI} (P - R). \quad (3.10)$$

Из (3.7) и (2.15) следует, что отношение жесткости  $c_2$  на этапе скольжения к жесткости  $c_1$  при отсутствии скольжения определяется равенством:

$$\frac{c_2}{c_1} = \mu, \quad (3.11)$$

где параметр  $\mu$  (относительная жесткость системы) определен формулой (2.16), из которой видно, что при неограниченном возрастании величины  $\kappa\xi$ , характеризующей упругие свойства гофра, величина  $c_1/c_2$  монотонно возрастает от 1 до  $4+3b/a$ .

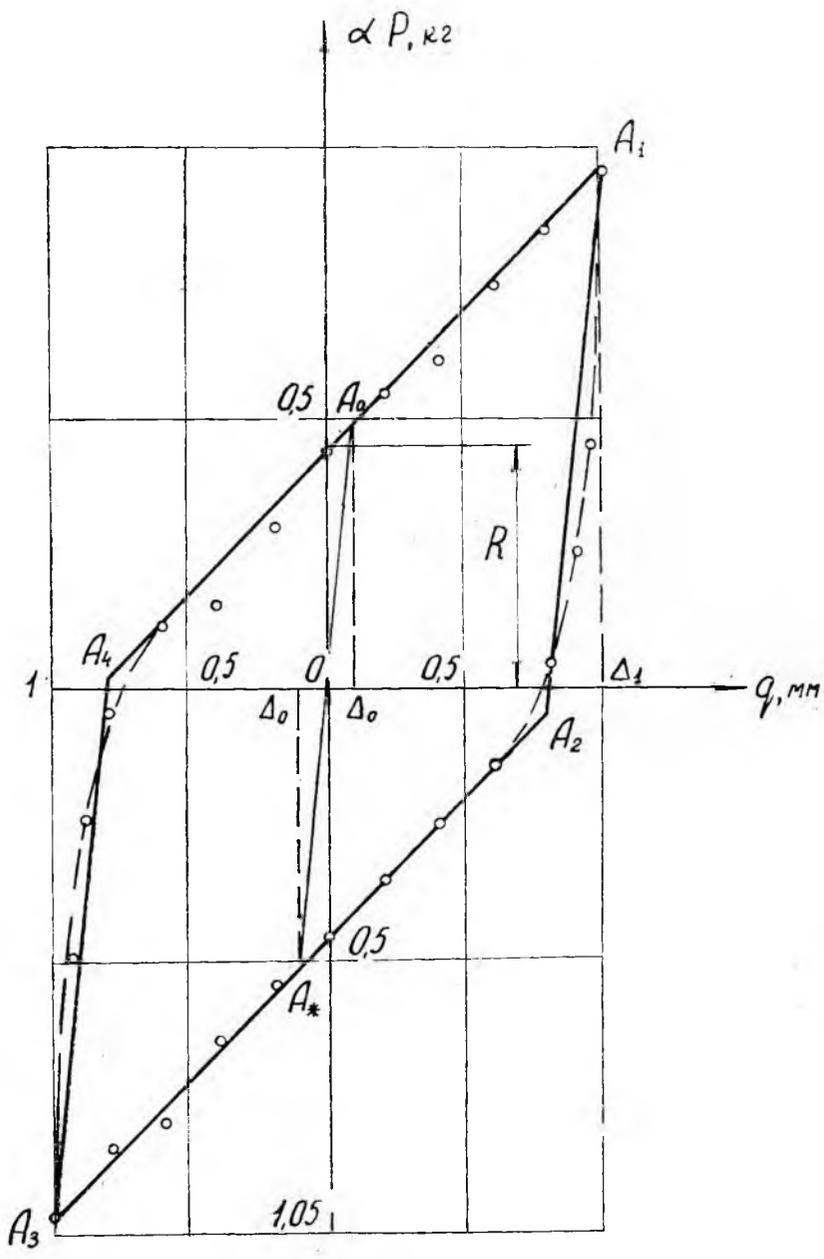
Очевидно должно быть  $\alpha_0 < 1$  или

$$R < (1 - \mu)P, \quad (3.12)$$

ибо в противном случае второго этапа (скольжения) не будет.

**Петля гистерезиса.** С того момента, когда параметр  $\alpha$  принимает значение  $\alpha = \alpha_1 = 1$  начинается процесс разгрузки ( $\alpha$  снова становится меньше единицы и продолжает убывать). Сила трения на контактной поверхности также уменьшается, становясь и оставаясь до некоторого значения  $\alpha = \alpha_2$  меньше величины  $fp$ , что обуславливает невозможность проскальзывания между слоями в процессе разгрузки на этапе изменения  $\alpha$  в интервале  $1 \geq \alpha \geq \alpha_2$ .

Пусть отрезок  $OA_0$  (фиг. 4) есть график зависимости  $\alpha P$  от  $q$  на первом этапе загрузки  $0 \leq \alpha \leq \alpha_0$ , а  $A_0A_1$  — график зависимости тех же величин на втором этапе загрузки  $\alpha_0 \leq \alpha_1 \leq 1$ . Эти графики могут быть построены по формулам (2.3) и (3.6). При разгрузке в интервале  $1 \geq \alpha \geq \alpha_2$  график зависимости  $\alpha P$  от  $q$ , очевидно, будет отрезком прямой, проведенным из точки  $A_1$  параллельно  $OA_0$  до не-



Фиг. 4.

которой точки  $A_2$ . В процессе дальнейшей разгрузки ( $\alpha_2 \geq \alpha \geq -1$ ) опять начнется проскальзывание и, следовательно, графиком зависимости  $\alpha P$  от  $q$  на этом этапе разгрузки будет отрезок прямой, проведенный из точки  $A_2$  параллельно отрезку  $A_0A_1$  до некоторой точки  $A_3$ . Чтобы определить точки  $A_2$  и  $A_3$  целесообразно воспользоваться следующим соображением. Если бы процесс разгрузки рассматриваемой консоли от ненапряженного состояния  $\alpha = 0$  производился под действием силы  $\alpha P$ , направленной в сторону, противоположную ранее принятому направлению, то точки  $A_*$  и  $A_3$ , выполняющие роль точек  $A_0$  и  $A_1$  соответственно оказались бы симметричными последним относительно начала координат. Следовательно, чтобы определить точки  $A_2$  и  $A_3$ , достаточно продолжить вниз отрезок  $OA_0$ , на этом продолжении отложить отрезок  $OA_* = OA_0$  и через точку  $A_*$  провести прямую  $A_2A_3$ , параллельную  $A_0A_1$ . Точкой  $A_2$  будет точка пересечения прямых  $A_1A_2$  и  $A_2A_3$ , а точку  $A_3$  получим, отложив на прямой  $A_2A_3$  отрезок  $A_*A_3 = A_0A_1$ . Что же касается недостающей четвертой вершины  $A_4$ , то она должна быть симметрична точке  $A_2$  относительно начала координат, что также следует из указанного выше соображения. Отрезку  $A_3A_4$  будет соответствовать очередной этап отсутствия скольжения, а отрезку  $A_4A_1$  — следующий за этим этап скольжения.

Таким образом, установлено, что в решаемой задаче петля гистерезиса имеет форму параллелограмма, вершины которого определяются следующими координатами:

$$\left. \begin{aligned} &A_1(\Delta_1, P); A_2[\Delta_1 - 2\Delta_0; (1 - 2\alpha_0)P] \\ &A_3(-\Delta_1, -P); A_4[2\Delta_0 - \Delta_1; (2\alpha_0 - 1)P] \end{aligned} \right\} \quad (4.1)$$

где  $\Delta_0$ ,  $\Delta_1$  и  $\alpha_0$  известны из формул (3.9), (3.10) и (2.16). Зная это, можно определить площадь петли гистерезиса:

$$S = \frac{2R^2 l^3}{3EI} \left( \frac{P}{R} - \frac{1}{1 - \mu} \right). \quad (4.2)$$

Последняя формула вновь подтверждает, что рассеяние энергии возможно лишь при условии (3.12). Максимум рассеянной энергии будет при

$$R = (1 - \mu) \frac{P}{2},$$

чему соответствует

$$S_{\max} = \frac{(1 - \mu) \cdot P^2 \cdot l^3}{6EI}$$

Если под статическим коэффициентом рассеяния энергии, являющимся относительной мерой потери механической энергии за цикл, подразумевать величину:

$$\psi = \frac{2S}{P\Delta_1},$$

то, учитывая (3.9), (3.10) и (4.2), получим

$$\phi = \frac{8}{\frac{P}{R}-1} \left[ 1 - \frac{1}{\frac{P}{R}(1-\mu)} \right] = \frac{8}{\frac{\Delta_1 \mu}{\Delta_0(1-\mu)}} \left[ 1 - \frac{1}{\mu \left( \frac{\Delta_1}{\Delta_0} - 1 \right) + 1} \right] \quad (4.3)$$

Из последнего равенства, в частности, следует, что при

$$\left( \frac{P}{R} \right) = (1 + \sqrt{\mu}) / (1 - \mu) \quad \text{или при } \Delta_1 / \Delta_0 = (1 + \sqrt{\mu}) / \sqrt{\mu}$$

коэффициент рассеяния энергии достигает максимального значения:

$$\phi_{\max} = \frac{8(1 - \sqrt{\mu})}{1 + \sqrt{\mu}}.$$

### Определение жесткости гофра на этапе отсутствия скольжения.

В полученных выше соотношениях в качестве одного из параметров содержится величина  $k$ , которая является жесткостью гофра в том смысле, что это есть сила, необходимая для того, чтобы, действуя в направлении оси  $x$  на вершину  $N$  элемента  $QNL$  (фиг. 1) в условиях работы гофра на этапе отсутствия скольжения, она вызывала увеличение на единицу длины расстояния  $\xi$  до соседней вершины гофра в том же направлении. На упомянутом этапе, как видно из (2.10), выполняется равенство

$$u_n(x, a) = -u_b(x, -a),$$

где  $u_n$  и  $u_b$  — значения  $u(x, y)$  на нижней и верхней внутренних гранях стенок. Отсюда следует, что каждый элемент гофра  $MNK$  (фиг. 1) поворачивается вокруг неподвижных точек  $M$  и  $K$ , лежащих на продольной оси симметрии системы, и увеличение  $\Delta \xi$  расстояния  $\xi$  между вершинами гофра происходит за счет одновременного растяжения и сжатия элементов  $MN$  и  $MK$ .

Таким образом, упомянутую выше жесткость  $k$  можно определить, воспользовавшись известным интегралом Мора для растяжения применительно к кривому стержню, схематически изображенному на фиг. 5, находящемуся под действием некоторой силы  $T$ , приложенной к вершине  $N$  гофра и направленной вдоль оси  $x$  (при условии, что в точках  $M$  и  $K$  стержень шарнирно закреплен). Названный интеграл устанавливает следующую зависимость между  $\Delta \xi$  и  $T$ ;

$$\Delta \xi = \frac{T}{4E_r a_r L} \left[ \int_0^s \cos^2 \alpha_0 ds + r \int_0^{\alpha_0} \cos^2 \alpha d\alpha \right], \quad (5.1)$$

где  $E_r$  — модуль Юнга для материала гофра;  $2a_r$  и  $L$  — размеры поперечного сечения гофра, которое предполагается прямоугольным. Значения  $\alpha$  и  $\alpha_0$  указаны на фиг. 5, а  $s$  и  $r$  определяются формулами:

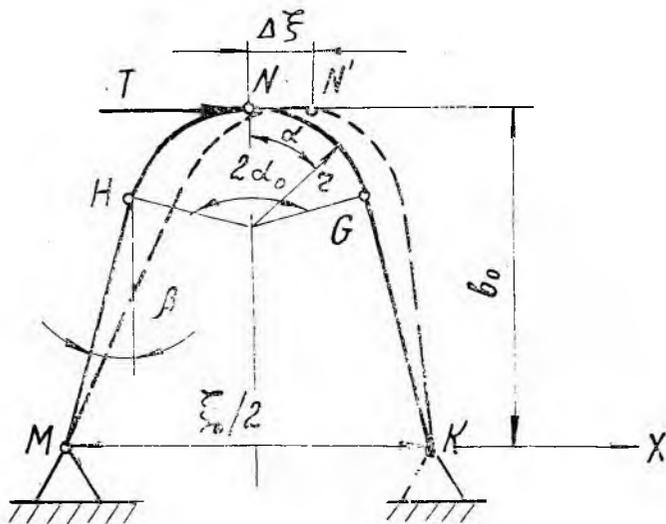
$$s = \frac{b_0 - r(1 - \frac{1}{2} \sin \beta)}{\cos \beta} \quad r = \frac{\frac{b_0}{2} / \cos \beta - 2b_0 \sin \beta}{2(1 - \sin \beta)}$$

Из (5.1) получаем

$$k = \frac{4E_r a_r L}{s \cos^2 \alpha_0 + r \left( \frac{\alpha_0}{2} + \frac{\sin 2\alpha_0}{4} \right)}, \quad (5.2)$$

что определяет искомую жесткость гофра как функцию от геометрических параметров последнего и от модуля упругости материала гофра.

Выражение (5.2) после подстановки в (2.16) позволяет теоретически определить относительную жесткость  $\mu = c_2/c_1$ , являющуюся параметром, от значения которого существенно зависит



Фиг. 5.

демпфирующая способность системы. В частности, если прокладка и стенки изготовлены из одного материала, то получим

$$\mu = \frac{1 + K}{1 + \left( 4 + 3 \frac{b}{a} \right) K}, \quad (5.3)$$

где

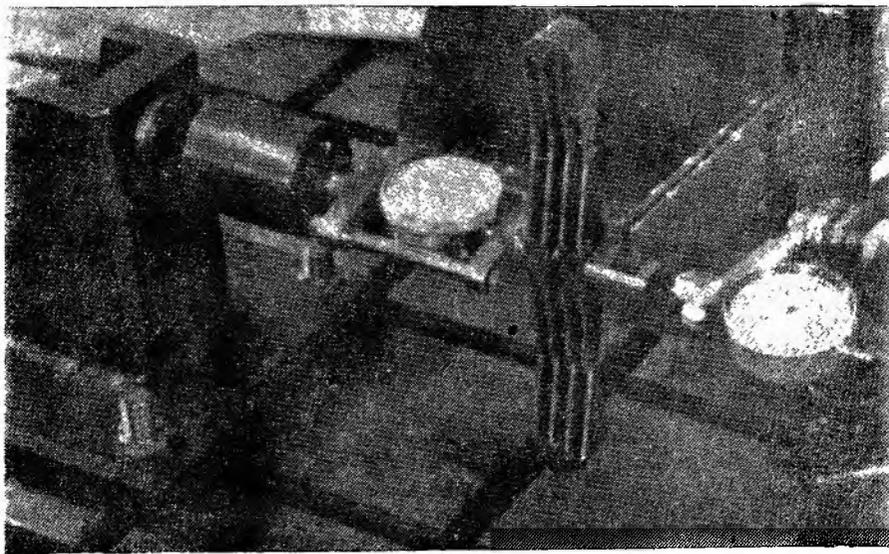
$$K = \frac{2a_r \xi}{a \left[ s \cos^2 \alpha_0 + r \left( \frac{\alpha_0}{2} + \frac{\sin 2\alpha_0}{4} \right) \right]}$$

**Результаты экспериментов.** Правильность рабочих гипотез и соотношений, полученных при теоретическом решении задачи, проверялась сравнением расчетных ( $\Phi_{расч}$ ) и экспериментальных ( $\Phi_{экс}$ ) коэффициентов рассеяния энергии. Любой другой способ сравнения теоретических и экспериментальных результатов требует знания коэффициента трения, точная величина которого обычно неизвестна. Однако формула (4.3) позволяет построить точную теоре-

тическую кривую  $\psi_{расч} = \psi\left(\frac{P}{R}\right)$ , не зная коэффициента трения и не пользуясь при этом данными эксперимента.

Для определения  $\psi_{экс}$  была изготовлена установка (фиг. 6), состоящая из динамометра, индикатора часового типа (с пределами измерений  $0 \div 25$  кг,  $0 \div 10$  мм и ценой деления 0,1084 кг, 0,01 мм) и экспериментальной трехслойной консоли, закрепленной специальным зажимом на стойке. Вся установка собирается на монтажной плите.

Трехслойная консоль состоит из двух несущих слоев, выполненных в виде одинаковых пластин прямоугольного сечения из лис-



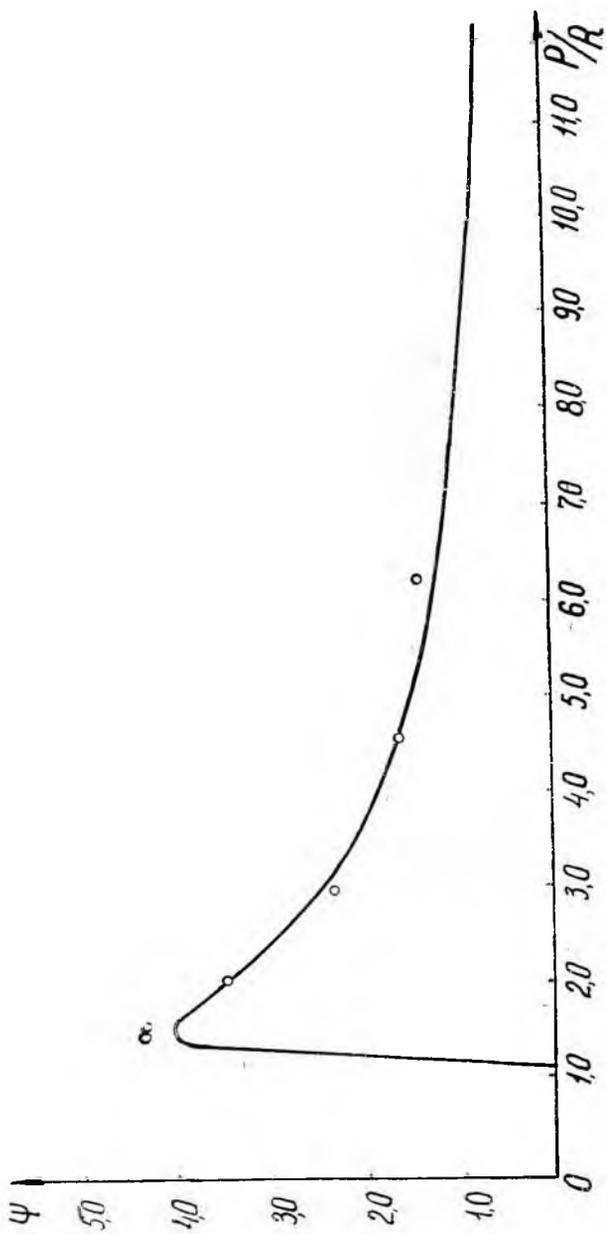
Фиг. 6.

товой стали X18H10T и гофрированной прокладки, изготовленной прокаткой листа из стали 60С2А между двумя шестернями. Предварительный натяг (прижатие) создается сжатием прокладки в поперечном направлении и сохраняется с помощью проволочек, припаянных ПСР-45 к пластинкам в растянутом состоянии.

Экспериментами установлено, что упомянутые проволочки увеличивают жесткость  $c_2$  консоли на этапе скольжения по сравнению с жесткостью, определенной равенством (3.7), что является вполне естественным. Поэтому для исключения влияния проволочек на результаты проверки в качестве расчетной принята экспериментальная жесткость  $c_2$ .

Одна из исследованных консолей имеет следующие размеры (фиг. 1):

$$l = 150 \text{ мм}, \quad 2a = 1,5 \text{ мм}, \quad 2b = 4,75 \text{ мм}, \quad L = 50 \text{ мм},$$



Фиг. 7.

а гофрированная прокладка

$$\xi = 16,5 \text{ мм}, \quad 2a_r = 0,3 \text{ мм}, \quad b_0 = 2,375 \text{ мм}, \quad 2\alpha_0 = 76^\circ$$

На установке (фиг. 6) при поперечном изгибе трехслойной консоли снималась двусторонняя петля гистерезиса для значений  $\Delta_1 = 0,25 \div 4 \text{ мм}$ . Типичная экспериментальная петля изображена на фиг. 4 пунктиром. На этой же фигуре сплошной линией показана расчетная петля, построенная для относительной жесткости  $\mu$ , рассчитанной по формуле (5.3) для указанных выше размеров.

Сравнение показывает, что контуры петель удовлетворительно совпадают, но у вершин тупых углов параллелограмма имеются небольшие закругления, что, видимо, является следствием некоторой неравномерности распределения прижатия по длине консоли. Кроме того, по экспериментальной петле гистерезиса путем планиметрирования определялась экспериментальная величина рассеянной энергии и замерялись обобщенная сила  $R$  и максимальная внешняя нагрузка  $P$  (фиг. 4), что позволяло определить  $\psi_{\text{экс}}$ . Полученные экспериментальные точки, отмеченные на фиг. 7 кружками, наносились на расчетную кривую  $\psi_{\text{расч}} = \psi \left( \frac{P}{R} \right)^*$ , построенную по формуле (4.3) для  $\mu = 0,105$ . Расчетные и опытные результаты совпадают с точностью  $5 \div 10\%$ , что вполне подтверждает правильность рабочих гипотез и соотношений, полученных при аналитическом решении задачи.

## ВЫВОДЫ

Полученные соотношения показывают, что упругую гибкость гофрированной прокладки можно успешно использовать как одно из средств конструкционного демпфирования изгибных вибраций. Настройку на оптимальное демпфирование при заданной жесткости несущих слоев в этом случае можно производить не только изменением величины прижатия, но и изменением относительной жесткости  $\mu$  (2.16); (5.3), величина которой определяется параметрами (высота, шаг, жесткость) гофровой прокладки. А в пластинчатых составных конструкциях, как известно, можно распорядиться (причем в весьма ограниченных пределах) только величиной прижатия.

В качестве расчетной схемы принята модель консоли, но результаты и, главное, метод расчета могут быть использованы также и для ряда других конструкций. Применительно к указанной расчетной схеме полученные соотношения позволяют определить не только демпфирующую способность конструкции при заданных параметрах, но и настроить ее на оптимальное демпфирование.

\* Такой способ сравнения теоретических и экспериментальных результатов применен В. П. Филекиным в работе [2].

Попутно при решении задачи получены соотношения, позволяющие произвести прочностной расчет (2.11), (3.4).

Предложенный способ определения жесткости  $c_1$  (2.17) консоли на этапе отсутствия скольжения позволяет вычислить также и жесткость конструкций с прикрепленной к несущим слоям гофровой прокладкой, применяемых в настоящее время с целью увеличения прочности при меньшем весе. Формулы (2.10) и (2.11) позволяют произвести прочностной расчет таких конструкций.

Полученные соотношения, определяющие обобщенную силу  $R$  (3.8) и максимальный прогиб  $\Delta_1$  (3.10), могут быть использованы для экспериментального определения максимальной силы трения между несущими слоями и прокладкой, а также жесткости гофра в условиях работы консоли. Обычные способы экспериментального определения этих величин приводят к результатам с весьма значительным разбросом.

В работе изложено лишь решение статической задачи о поперечном изгибе при циклическом нагружении, но предварительное решение этой задачи совершенно необходимо для динамического (вибрационного) расчета соответствующих систем.

#### ЛИТЕРАТУРА

1. А. Г. Пановко. Внутреннее трение при колебаниях упругих систем. Физматгиз, 1960, 180—185.
2. В. П. Филекин. Конструкционный гистерезис в составной балке при отсутствии скольжений на концах. ИзВУЗ, «Авиационная техника» № 1, 1960.