

*В. И. АЛЕКСЕЕВ*

## ПАРАМЕТРИЧЕСКИЕ РЕЗОНАНСНЫЕ КОЛЕБАНИЯ ПРЯМОЗУБЫХ КОЛЕС

Ответственные зубчатые приводы сильно нагружены и работают при больших окружных скоростях, достигающих до 100 м/сек. В настоящее время наблюдается тенденция к увеличению окружных скоростей до 150-200 м/сек. Для обеспечения надежности работы высокоскоростных зубчатых приводов необходимо решить ряд проблем, таких, как смазка и охлаждение, долговечность по изгибной и контактной прочности, динамика зацепления и др.

В данной работе рассматриваются вопросы динамики зацепления зубчатых колес от собственных крутильных колебаний — квазигармонических колебаний, обусловленных различной жесткостью однопарного и двухпарного зацепления.

В зубчатом зацеплении с прямыми зубьями коэффициент перекрытия не равен целому числу. В связи с этим жесткость зацепления существенно меняется за цикл зацепления. В большинстве случаев коэффициент перекрытия  $\varepsilon = 1,5-2$ , а жесткость двухпарного зацепления почти в два раза выше жесткости однопарного. Наличие переменной жесткости в колебательной системе приводит, как известно [1], к квазигармоническим колебаниям, а при некоторых обстоятельствах — к параметрическим резонансам с неограниченным теоретически нарастанием амплитуды динамического перемещения (в зубчатой передаче — деформации зубьев).

Увеличение деформации при параметрическом резонансе практически приводит к отрыву рабочих профилей зубьев и удару противоположными нерабочими сторонами, а также к поломке зубьев. То и другое часто наблюдается в практике. Достаточно четкого объяснения указанному явлению в литературе не имеется.

Наиболее близко к решению поставленной задачи подошел Н. А. Ковалев [2], [3], [4].

Условия постановки задачи: наличие переменной жесткости в зубчатых передачах за цикл зацепления и возмущающих сил. В данном случае возмущающими силами являются статическая сила от момента, передаваемого зубчатыми колесами, динамическая сила в зубьях от геометрической неточности зацепления, обусловленной ошибками изготовления и монтажа, крутильные колебания системы (с учетом присоединенных к зубчатым колесам масс), а также дисковые колебания зубчатых колес.

Для решения задачи принимаются некоторые допущения:

суммарная жесткость рессор, муфт, шлицевых соединений между агрегатами и зубчатой парой значительно меньше, чем жесткость зубьев, поэтому в колебательной системе зубчатых колес не учитывается;

закон изменения жесткости по времени ступенчатый;

зубчатые колеса рассматриваются изготовленными идеально точно, т. к. ошибки изготовления не подчиняются какому-либо закону;

демпфирование не учитывается, т. е. при большой частоте возбуждения роль его невелика.

Два сцепляющихся между собой зубчатых колеса составляют колебательную систему, состоящую из двух масс  $M_1$  и  $M_2$ , приведенных к основным окружностям  $r_{01}$  и  $r_{02}$ , (фиг. 1 а) и взаимодействующих между собой через зубья с суммарной жесткостью  $C$ .

$$M_1 = \frac{I_1}{r_{01}^2 b_1} \quad \text{и} \quad M_2 = \frac{I_2}{r_{02}^2 b_2},$$

$M$  — приведенная масса, отнесенная к единице длины зуба;

$I$  — массовый полярный момент инерции колеса;

$r_0$  — радиус основной окружности;

$b$  — ширина зубчатого венца;

индексы 1 и 2 — соответствуют первому и второму колесу (фиг. 1 б).

Для мгновения, когда колебательная система выведена из равновесия, т. е. время  $t > 0$ , перемещения  $X_1$  и  $X_2$  приведенных масс будут различны, а относительное перемещение  $x = X_2 - X_1$ .

Сила упругости в зубьях составит  $C(X_2 - X_1)$ , и уравнение движения каждой массы будет

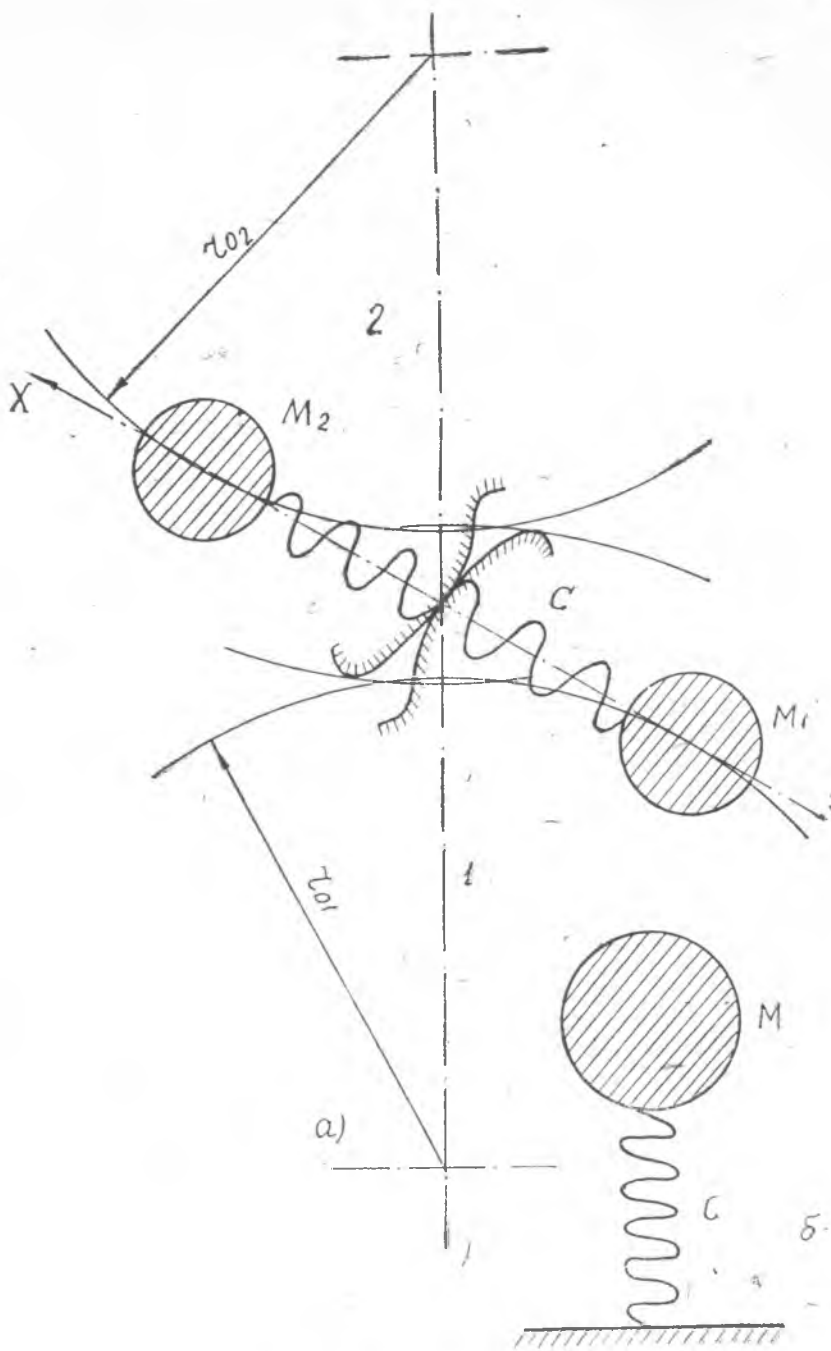
$$C(X_2 - X_1) = M_1 \ddot{X}_1,$$

$$C(X_1 - X_2) = M_2 \ddot{X}_2.$$

Поделив на массы и вычитая первое уравнение из второго, получим

$$\ddot{x} + \frac{C}{M} x = 0, \quad (1)$$

где  $M = \frac{M_1 M_2}{M_1 + M_2}$  — приведенная суммарная масса.



Фиг. 1. Схема колебания зубчатых колес.

Выражение (1) представляет собой уравнение свободных колебаний одномассовой системы (фиг. 1 б) с массой  $M$  и жесткостью  $C$ . Но оно не учитывает изменение суммарной жесткости зубьев за цикл зацепления.

В зоне однопарного зацепления суммарная жесткость сопряженных зубьев будет  $C_1$ , а в зоне двухпарного  $C_1 + C_2$  (фиг. 2 б).  $C_2$  — жесткость одной пары зубьев в начале зацепления. Жесткость в полюсе зацепления  $P$  (фиг. 2 а) несколько больше, чем в начале зоны однопарного зацепления, но этой разностью  $\sim 10\%$  можно пренебречь. При наличии статической силы в зацеплении от передаваемого момента при вращении возникают различные статические деформации (фиг. 2 в):

$y_1 = \frac{q}{C_1}$  — статическая деформация в зоне однопарного зацепления;

$y_2 = \frac{q}{C_1 + C_2}$  — статическая деформация в зоне двухпарного зацепления;  
где  $q$  — удельная рабочая нагрузка.

В результате получается, что по времени при вращении статический прогиб также будет иметь ступенчатый вид фиг. 2 в — линия  $a$ . Линией  $\delta$  показана деформация зубьев в динамике. Тогда выражение (1) свободных колебаний будет представлять собой уравнение Матье-Хилла с переменной жесткостью  $C_t$

$$\ddot{x} + \frac{C(t)}{M} x = 0, \quad (2)$$

решение которого сводится к определению областей неустойчивости, к исследованию параметров зубчатой передачи, влияющих на устойчивость движения.

Данное уравнение решается применительно к зубчатым передачам последовательно, т. е. сначала находится решение в зоне однопарного зацепления, затем в зоне двухпарного, затем опять в зоне однопарного и т. д. с соблюдением граничных условий для каждой зоны. Так, в зоне однопарного зацепления, когда время  $0 < t < \kappa T$ , где  $\kappa = 2 - \varepsilon$  — доля времени работы в зоне однопарного зацепления, жесткость будет  $C_t = C_1$ , а уравнение (2) превратится в выражение:

$$\ddot{x}_1 + p_1^2 x_1 = 0, \quad (3)$$

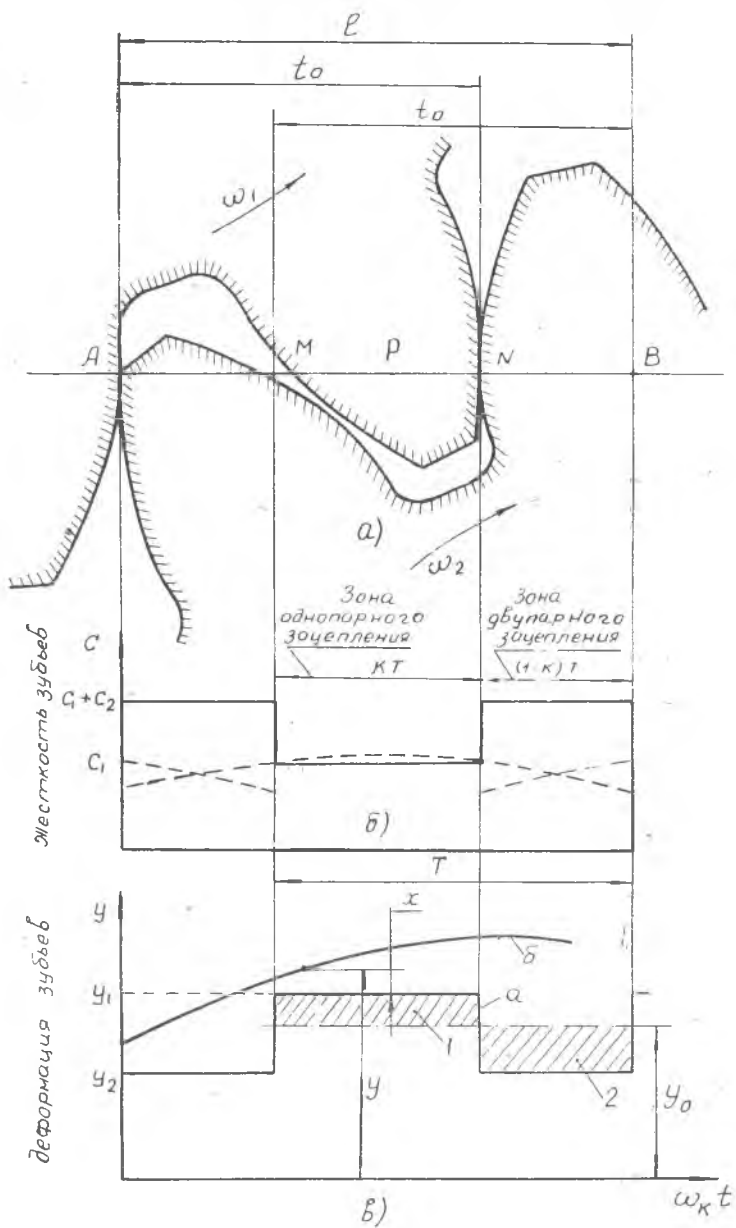
где  $p_1^2 = \frac{C_1}{M}$ ,  $p_1$  — собственная круговая частота крутильных колебаний зубчатых колес в зоне однопарного зацепления;

$\varepsilon = \frac{l}{t_0}$  — коэффициент перекрытия;

$l$  — длина линии зацепления (фиг. 2 а);

$t_0$  — основной шаг;

$T = \frac{2\pi}{\omega_k}$  — период зацепления;



Фиг. 2. Изменение жесткости и деформации за цикл зацепления.

$\omega_k = \frac{2\pi n z}{60}$  — круговая частота зацепления;

$n$  — об/мин.;

$z$  — число зубьев.

Решение уравнения (3) представится в виде

$$\left. \begin{aligned} x_1 &= \frac{x_{01}}{P_1} \sin P_1 t + x_{01} \cos P_1 t \\ \dot{x}_1 &= x_{01} \cos P_1 t - x_{01} P_1 \sin P_1 t \end{aligned} \right\} \quad (4)$$

В зоне дупарного зацепления, когда время  $kT < t < T$ ,  $C_{(t)} = C_1 + C_2$  уравнение колебания

$$x_2 + P_2^2 x_2 = 0, \quad (5)$$

где  $P_2^2 = \frac{C_1 + C_2}{M}$ ,

$P_2$  — собственная круговая частота в зоне дупарного зацепления.

Решение (5) представляется в виде

$$\left. \begin{aligned} x_2 &= \frac{x_{02}}{P_2} \sin P_2 t + x_{02} \cos P_2 t \\ \dot{x}_2 &= x_{02} \cos P_2 t - x_{02} P_2 \sin P_2 t \end{aligned} \right\} \quad (6)$$

где  $\left. \begin{matrix} x_{01}, x_{02} \\ \dot{x}_{01}, \dot{x}_{02} \end{matrix} \right\}$  — начальные перемещения от положения статического равновесия и скорости колебания.

Используя граничные условия напомним:

$$\left. \begin{aligned} 1) t = 0 \quad x_{1(0)} &= x_{01}, \quad \dot{x}_{1(0)} = \dot{x}_{01}; \\ 2) t = KT \quad x_{1(KT)} &= x_{02} - \Delta; \quad \dot{x}_{1(KT)} = \dot{x}_{02}; \\ 3) t = T \quad x_{2(T)} &= Sx_{01} + \Delta; \quad \dot{x}_{2(T)} = S\dot{x}_{01} \end{aligned} \right\} \quad (7)$$

где  $\Delta = Y_1 - Y_2 = Y_1 \frac{\lambda}{1 + \lambda}$  — разность статических деформаций зубьев в зоне однопарного и дупарного зацеплений;

$\lambda = \frac{C_2}{C_1}$  — относительная жесткость.

Первое граничное условие по (7) соответствует начальным условиям движения, величиной  $x_0$  которого можно задаваться.

Второе условие соответствует неразрывности движения от зоны однопарного зацепления к зоне дупарного зацепления.

Третье условие необходимо для исследования устойчивости движения и определения границ областей неустойчивости. Величина  $S$  показывает, насколько перемещение и скорость изменились за один период зацепления.

В неустойчивой области соотношения частот (возбуждения и собственной частоты колебания) должно выполняться усло-

вие  $|S| > 1$ . Используя граничные уравнения (7) в выражениях (4), (6) и решая их совместно, получим:

$$S^2 - 2S \left\{ \cos P_1 K T \cos P_2 (1 - K) T - \frac{P_1^2 + P_2^2}{2P_1 P_2} \sin P_1 K T \sin P_2 (1 - K) T - \right. \\ \left. - \frac{\Delta}{2x_{01}} [1 - \cos P_2 (1 - K) T] \right\} + \frac{\Delta}{x_{01}} [\cos P_1 K T + \frac{P_2}{P_1} \sin P_1 K T \sin P_2 (1 - \\ - K) T - \cos P_1 K T \cos P_2 (1 - K) T] + 1 = 0. \quad (8)$$

Для нахождения областей неустойчивости необходимо выделить параметры зубчатых колес, которые наиболее сильно влияют на возбуждение параметрических резонансов.

К ним относятся параметр внешней нагрузки  $-\frac{\Delta}{x_{01}}$ ; параметр жидкости  $\lambda$ ; параметр перекрытия  $-\varepsilon$ ; параметр соотношения частот  $N = \frac{P}{\omega_k}$ .

Приняв параметры  $\frac{\Delta}{x_{01}}$  и  $\lambda$  постоянными, ставим задачу нахождения областей неустойчивости по параметрам возбуждения  $\varepsilon$  и  $N$ . Для этого необходимо найти среднюю собственную круговую частоту  $P$  однопарного и двухпарного зацепления.

Из рассмотрения характера движения в устойчивой области (кривая 3 и 4 на фиг. 3) видно, что колебания совершаются вокруг средней статической деформации  $y_0$ , определяемой из равенства нулю суммы работ за цикл зацепления по статическому прогибу

$$W_1 + W_2 = 0, \quad (9)$$

где  $W_1$  — работа на заштрихованном участке 1 (фиг. 2 в);

$W_2$  — работа на заштрихованном участке 2, которые соответственно равны:

$$W_1 = (y_1 - y^1) c^1 k l,$$

$$W_2 = (y_2 - y_0) (c_1 + c_2) (1 - k) l.$$

Отсюда получаем среднюю деформацию

$$y_0 = \frac{v_1}{\alpha},$$

где  $\alpha = 1 + \lambda(\varepsilon - 1)$  — коэффициент плавности.

Тогда средняя жесткость будет равна

$$G_0 = G_1 \alpha,$$

а частоты в зонах однопарного и двухпарного зацепления:

$$\left. \begin{aligned} P_1 &= \frac{1}{\alpha} P \\ P_2 &= \frac{\sqrt{1 + \lambda}}{\alpha} P \end{aligned} \right\}. \quad (10)$$

Подставив (10) в (8), получим уравнение, по которому можно определить работу конкретной передачи в устойчивой или неустойчивой области.

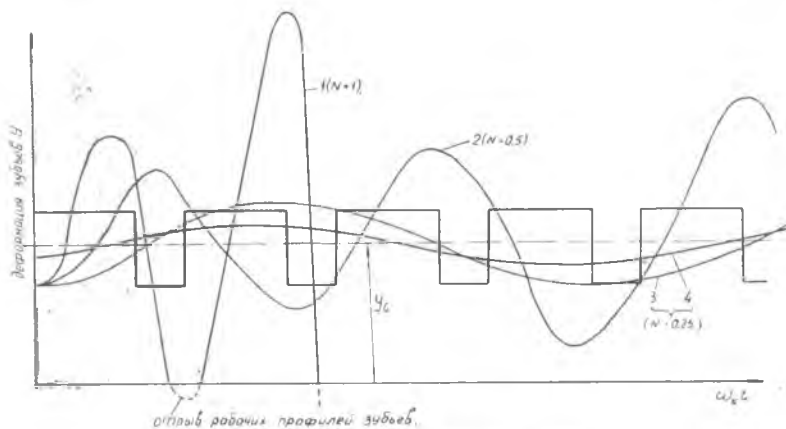
$$\begin{aligned}
 S^2 - 2S \left\{ \cos 2\pi N \sqrt{\frac{(2-\varepsilon)^2}{1+\lambda(\varepsilon-1)}} \cos 2\pi N \sqrt{\frac{(1+\lambda)(\varepsilon-1)^2}{1+\lambda(\varepsilon-1)}} - \right. \\
 \left. - \frac{1+0,5\lambda}{\sqrt{1+\lambda}} \sin 2\pi N \sqrt{\frac{(2-\varepsilon)^2}{1+\lambda(\varepsilon-1)}} \sin 2\pi N \sqrt{\frac{(1+\lambda)(\varepsilon-1)^2}{1+\lambda(\varepsilon-1)}} - \right. \\
 \left. - \frac{\Delta}{2x_{01}} \left[ 1 - \cos 2\pi N \sqrt{\frac{(1+\lambda)(\varepsilon-1)^2}{1+\lambda(\varepsilon-1)}} \right] \right\} + \frac{\Delta}{x_{01}} \left[ \cos 2\pi N \sqrt{\frac{(2-\varepsilon)^2}{1+\lambda(\varepsilon-1)}} + \right. \\
 \left. + \sqrt{1+\lambda} \sin 2\pi N \sqrt{\frac{(2-\varepsilon)^2}{1+\lambda(\varepsilon-1)}} \sin 2\pi N \sqrt{\frac{(1+\lambda)(\varepsilon-1)^2}{1+\lambda(\varepsilon-1)}} - \right. \\
 \left. - \cos 2\pi N \sqrt{\frac{(2-\varepsilon)^2}{1+\lambda(\varepsilon-1)}} \cos 2\pi N \sqrt{\frac{(1+\lambda)(\varepsilon-1)^2}{1+\lambda(\varepsilon-1)}} \right] + 1 = 0. \quad (11)
 \end{aligned}$$

Границы областей неустойчивости определяются, если принять в (11)  $S = \pm 1$ , тогда, приняв  $\varepsilon = 1$  и  $\varepsilon = 2$ , получим области неустойчивости, располагающиеся около значения отношения частот

$$N = 0; 0,5; 1; 1,5; 2; 2,5.$$

$N=0$  соответствует случаю с нулевой жесткостью зубьев.

Сильно возбуждаемые, а, следовательно, самые опасные области колебания при  $N=1; 2; 3...$ , менее опасны слабо возбуждаемые области при  $N=0,5; 1,5; 2,5...$

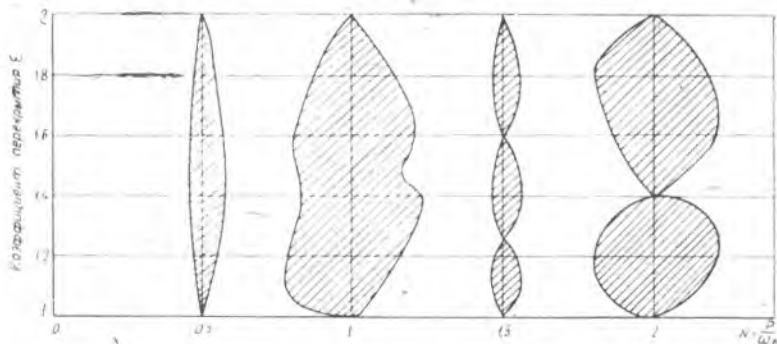


Фиг. 3. Деформация зубьев в динамике.

На фиг. 3 показано, как при параметрическом резонансе амплитуда колебания возрастает настолько, что уже за цикл колебания может произойти отрыв рабочих профилей (кривая I).

На фиг. 4 построены области самых сильных параметрических резонансов при  $N=0,5; 1; 1,5; 2$ , когда демпфирование мало сни-





Фиг. 4. Области параметрических резонансов.

жает динамический прогиб, а граница этих областей соответствует отрыву рабочих профилей.

При этом приняты  $\lambda = 0,76$ ,  $\frac{\Delta}{x_{01}} = -1$ , что соответствует цилиндрическим прямозубым колесам без учета ошибок изготовления.

Решение было выполнено на электронно-счетной машине.

При больших оборотах или, в общем, при большой частоте зацепления, когда  $N < 0,5$ , параметрический резонанс невозможен, и зубчатые передачи работают более плавно. Таким образом, обороты, свыше которых отсутствуют параметрические резонансные колебания, будут:

$$n_n = \frac{10^6}{mz^2} \sqrt{C_1 x \frac{1+i^2}{i^2}} \text{ (об/мин)}. \quad (12)$$

где  $i = \frac{z_2}{z_1} \geq 1$  — передаточное число;

$m$  — модуль зуба.

Когда малое колесо соединено жестко с большой массой, например, с ротором турбомшины, то

$$n_n = \frac{10^6}{mz^2} \sqrt{C_1 x} \text{ (об/мин)}. \quad (13)$$

Формулы (12) и (13) получены при  $N=0,5$ , т. е. с запасом вдвое от наиболее опасного резонанса  $N=1$ .

Для ответа на поставленную задачу следует знать скорость вращения зубчатых колес, свыше которых параметрические резонансы отсутствуют

из (12) следует  $V_n = \frac{3750}{z} \text{ (м/сек)}$ , из (13)  $V_n = \frac{2500}{z} \text{ (м/сек)}$ , что соответствует  $C_1 = 1650 \text{ кг/мм}^2$  и  $C_2 = 1250 \text{ кг/мм}^2$ , а  $z$  — число зубьев малой шестерни.

Из примера  $\lambda=0,76$ ,  $\epsilon=1,31$  (кривые 3 и 4 фиг. 3) при  $N<0,5$ — работа в устойчивой области—становится ясно, что движение будет происходить симметрично относительно средней статической деформации. А поскольку в динамической системе всегда имеются демпфирующие силы, то амплитуда колебаний со временем уменьшится, как в примере (кривая 4, фиг. 3).

В этом случае движение будет совершаться по средней статической линии деформации  $U_0$  или с минимальными отклонениями от нее. Отсюда следует, что при больших оборотах вращения, когда зубчатая пара работает за параметрическими резонансными областями, деформация, а значит и изгибные напряжения у основания зуба меньше в  $x$  раз, чем при статическом нагружении. Контактные напряжения на Герцу в полюсе меньше в  $\sqrt{x}$  раз, а долговечность по контактной выносливости зубчатых колес высокой твердости больше в  $x^3$  раз.

Если принять (для примера прямозубых эвольвентных передач)  $\lambda=0,76$ ,  $\epsilon=1,3$ — $1,6$ , получим  $x=1,226$ — $1,455$ , изгибные напряжения снижаются примерно на 30%, а долговечность теоретически повышается в 2—3 раза.

## ВЫВОДЫ

1. Зубчатые передачи за период зацепления имеют переменную жесткость. В работе под нагрузкой в зубчатых колесах могут возникнуть крутильные — квазигармонические колебания, а при  $N=0,5$ ; 1; 1,5; 2... — параметрические резонансы.

2. Самый сильный параметрический резонанс наступает при  $N=1$ .

3. Параметрические резонансы снижают изгибную и контактную прочность зубчатых колес, являются источником повышенного шума.

4. При работе зубчатых колес на сверхвысоких скоростях за областями параметрических резонансов ( $V>V_{п}$ ) различная жесткость однопарного и дупарного зацепления увеличивает плавность работы передачи, снижает общий уровень напряжений и шум.

Отсюда вытекают предложения увеличить частоту зацепления увеличением чисел зубьев с уменьшением модуля до минимального возможного, обеспечивающего изгибную прочность зубьев; для скоростных зубчатых передач, работающих в областях параметрических резонансов, целесообразно применять косозубые колеса, у которых  $\epsilon=2$ , т. е.  $\lambda$  меньше, чем у прямозубых колес, а следовательно и возбуждение квазигармонических колебаний меньше.

## ЛИТЕРАТУРА

1. Ден-Гартог. Теория колебаний. Гостехиздат, 1942.
  2. Н. А. Ковалев. О динамической нагрузке зубчатого зацепления. Известия АН СССР, ОТН, Механика и машиностроение, № 2, 1960.
  3. Н. А. Ковалев. Колебания зубчатых передач при ступенчатом изменении жесткости и постоянной ошибке шага зацепления. Изв. АН СССР, ОТН, Механика и машиностроение, № 2, 1961.
  4. Н. А. Ковалев. О влиянии кромочного зацепления на динамическую нагрузку прямых зубьев. Проблемы качества и прочности зубчатых передач. Сб. II, ЦБТИ, Москва, 1961.
-