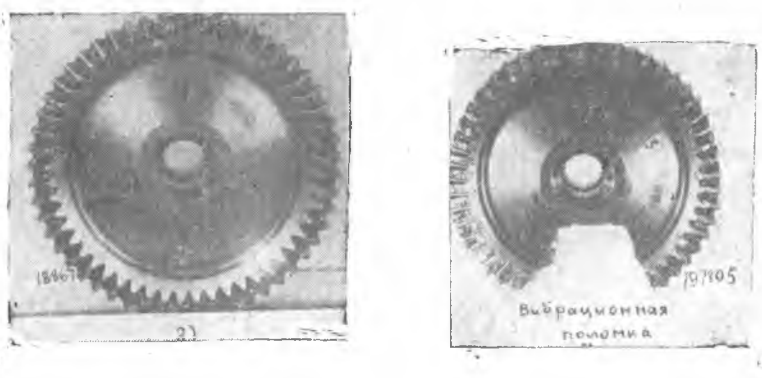
КУЙБЫШЕВСКИЙ АВИАЦИОННЫЙ ИНСТИТУТ
ТРУДЫ, ВЫПУСК XIX. 1965 г.
Вибрационная прочность и надежность авиационных двигателей

В. И. БАБЫКИН

ОСЕВЫЕ ВИБРАЦИИ ДИСКОВЫХ КОНИЧЕСКИХ ШЕСТЕРЕН

При доводке опытного авиационного двигателя образовывались усталостные трещины и происходили поломки обода дисковой конической шестерни центрального привода агрегатов (фиг. 1).

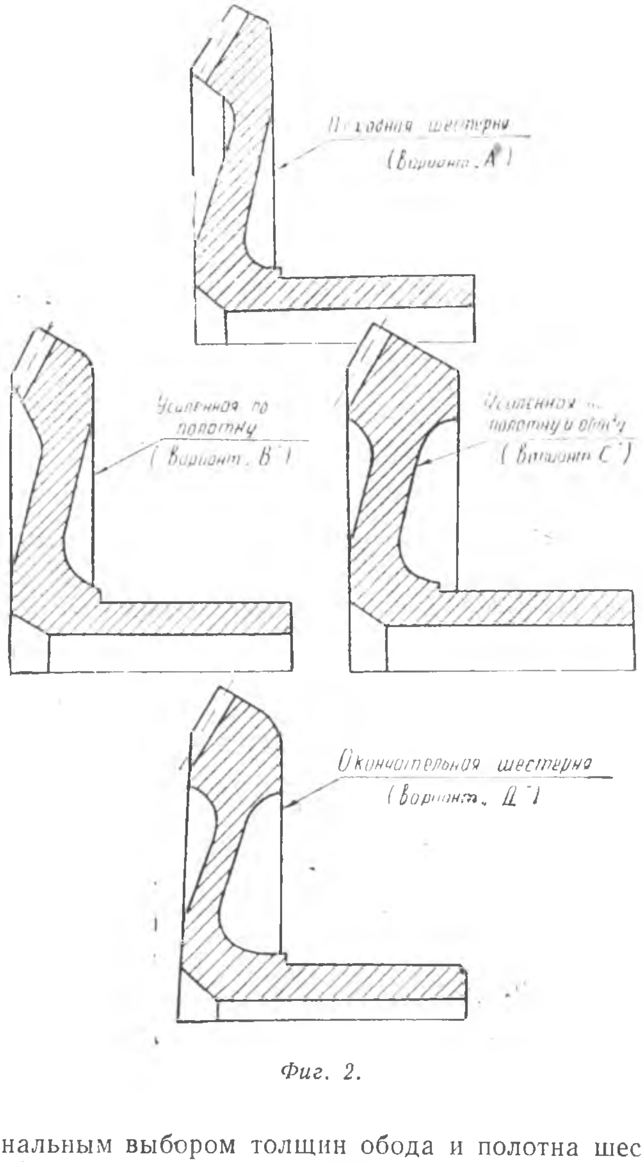
Тензометрирование ободов исходной шестерни (вариант А) и усиленной по полотну (вариант *В* фиг. 2) на работающем двигателе выявило значительный уровень переменных напряжений ($\sigma_V = \pm 13{,}5$ *кг/мм*^{2}) с частотой порядка 2 000—7000 *гц*, являющихся следствием резонансных осевых колебаний шестерни как диска.



Фиг. 1.

Тензометрированием с помощью радиально расположенных тензометров обнаружено, что в колебаниях, в основном, принимает участие обод шестерни, поэтому дальнейшие мероприятия по отстройке от резонансов были направлены на увеличение его жесткости .

Однако усиленная по ободу шестерня варианта C имела резонанс на оборотах малого газа и повышенные модулированные напряжения ($\sigma_v = \pm 11$ *кг/мм*^{2}) на рабочих оборотах.



Фиг. 2.

Рациональным выбором толщин обода и полотна шестерня варианта $Д$ была отстроена от резонансов на малом газу и на рабочих оборотах.

В ходе указанной прочностной доводки высокоскоростной конической шестерни, имеющей окружную скорость ≈ 85 *м/сек.*, было выявлено существенное влияние на уровень переменных напряжений качества сборки узла шестерни и, в частности, разношагицы сцепляющихся шестерен.

Таблица 1

Шестерня варианта А (исходная)			
Режимы работы двигателя	Замеренные напряжения (кг/мм²)		Увеличение напряжения за счет разношагицы
	нормальная сборка	сборка с разношагицей $\Delta t = 0{,}03 \div 0{,}04$	
проходные обороты	10.5	12.5	20%
рабочие обороты	7.0	10.0	30%
малый газ	5.5	9÷10.0	70%
Шестерня варианта Д (окончательная)			
проходные обороты	7.2÷9.0	18.0	2÷2.5 раза
рабочие обороты	3÷3.5	9.0	2.5÷3 раза
малый газ	3.5÷4.0	14.0	3.5÷4 раза

Из таблицы 1 следует, что одна и та же разношагица в ободе более жесткой шестерни варианта *С* вызывает в несколько раз большие напряжения по сравнению с менее жесткой шестерней варианта *А*. Повышенная разношагица ($\Delta t \approx 0{,}03$—$0{,}04$ *мм*) для шестерни варианта *С* оказалась недопустимой, так как создаваемые ею добавочные динамические нагрузки на обод шестерни фактически сводили на нет положительный эффект отстройки от основных резонансов ввиду резкого усиления интенсивности боковых резонансов, обусловленных модулированием за счет ошибок зацепления возбуждением.

Приводимый здесь анализ результатов тензометрирования четырех вариантов шестерен показывает, что в практике доводки и эксплуатации высокоскоростных дисковых конических шестерен не исключено возникновение интенсивных осевых колебаний их ободов. Поэтому в процессе проектирования таких конических передач необходимо предварительно оценивать известными методами [1] собственные частоты тонких дисковых шестерен с целью исключения резонансов в заданном диапазоне оборотов.

В данной статье излагаются результаты анализа вибраций шестерен с точки зрения их соответствия теории вынужденных осевых колебаний вращающихся дисков и дается простая физико-математическая трактовка.

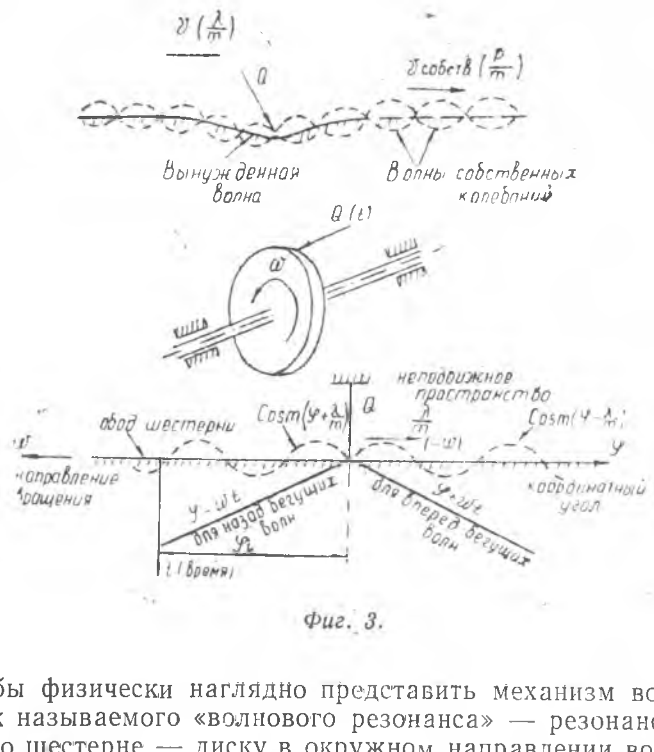
ОБ ОСЕВЫХ КОЛЕБАНИЯХ КОНИЧЕСКОЙ ШЕСТЕРНИ-ДИСКА ПОД ДЕЙСТВИЕМ ВОЗНИКАЮЩИХ В ЗАЦЕПЛЕНИИ УДАРНЫХ НАГРУЗОК

Известно [1], что явление резкого возрастания деформаций упругой среды под действием постоянной силы Q_0, движущейся по ней со скоростью V, связано с достижением так называемой критической скорости $V_{кр}$, при которой бегущая совместно с силой волна вынужденной деформации догоняет бегущую в ту же сторону, но со скоростью $v_{собств}$, упругую волну собственных колебаний, то есть при

$$v = v_{кр} = v_{собств}. \tag{1}$$

Аналогичное явление имеет место при действии в общем случае переменной по величине и неподвижной в пространстве силы $Q(t) = Q_0 \cdot \cos \lambda t$ на вращающийся диск конической шестерни (фиг. 3).

Полагая шестерню мысленно остановленной, нужно считать, что осевая составляющая рабочего усилия, действующая на обод, вращается вокруг оси «неподвижной» уже шестерни с угловой скоростью ω и изменяется во времени благодаря наличию ударов в зубьях.



Фиг. 3.

Чтобы физически наглядно представить механизм возникновения так называемого «волнового резонанса» — резонанса с бегущими по шестерне — диску в окружном направлении волнами упругой деформации, — рассмотрим сначала характер осевых колебаний шестерни под действием неподвижной относительно нее силы $Q_0 \cos \lambda t$, а затем учтем добавочный эффект от движения силы по ободу. В таком случае, как известно, [2], одновременно возникают вынужденные и свободные колебания, при которых поверхность изгиба шестерни — диска представляет собой систему стоячих волн:

$$Y_{\text{вын}}(r, \varphi, t) = \sum A \cdot X(r) \cos m\varphi \cdot \cos \lambda t, \tag{2}$$

$$Y_{\text{своб}}(r, \varphi, t) = \sum B \cdot X(r) \cos m\varphi \cdot \cos pt, \tag{3}$$

где $AX(r)$ и $BX(r)$ — формы изгиба по радиусу (r) соответственно вынужденной и свободной компонент колебаний;

λ, p и $\cos m\varphi$ — соответственно вынужденная, собственная круговая частота и форма изгиба шестерни по окружности с m — узловыми диаметрами.

Или тождественно:

$$Y_{\text{вын}} = \sum \frac{1}{2} AX(r) \cos m\left(\varphi - \frac{\lambda}{m} t\right) + \sum \frac{1}{2} AX(r) \cos m\left(\varphi + \frac{\lambda}{m} t\right), \tag{4}$$

$$Y_{\text{своб}} = \sum \frac{1}{2} BX(r) \cos m\left(\varphi - \frac{p}{m} t\right) + \sum \frac{1}{2} BX(r) \cos m\left(\varphi + \frac{p}{m} t\right), \tag{5}$$

где первые и вторые слагаемые есть соответственно вправо и влево бегущие от точки приложения силы волны вынужденной деформации — со скоростью $\frac{\lambda}{m}$ и волны свободной деформации — со скоростью $\frac{p}{m}$.

Резонансные явления возникают, когда скорости распространения волн вынужденных колебаний $\left(\frac{\lambda}{m}\right)$ совпадут согласно (1) со скоростями $\left(\frac{p}{m}\right)$ распространения в тех же направлениях волн свободных колебаний:

$$\frac{\lambda}{m} = \frac{p}{m} \tag{6}$$

или $\lambda = p$, что, очевидно, является условием обычного резонанса при действии на систему неподвижной относительно нее возмущающей силы.

Эта схема рассуждений позволяет легко получить условия волнового резонанса, возникающего при действии переменной силы на вращающуюся шестерню.

Достаточно в формуле (4) произвести замену φ на $\varphi - \omega t$, обозначающую вращение внешней силы со скоростью — ω относительно оси шестерни, чтобы иметь (фиг. 3):

$$Y_{\text{вын}} = \sum \frac{1}{2} AX(r) \cdot \cos m \left[\varphi - \left(\frac{\lambda}{m} + \omega \right) \right] +$$

$$+ \sum \frac{1}{2} AX(r) \cos m \left[\varphi + \left(\frac{\lambda}{m} - \omega \right) \right]. \tag{7}$$

Таким образом, бегущая по шестерне сила $Q_0 \cdot \cos \lambda t$ вызывает в ней волны вынужденной деформации (волны возбуждения):

а) назад бегущие (за силой) со скоростью

$$\omega_1 = \frac{\lambda}{m} + \omega;$$

б) вперед бегущие (против силы) со скоростью

$$\omega_2 = \frac{\lambda}{m} - \omega.$$

Поскольку скорости распространения волн возбуждения различны, то и резкое возрастание волн осевой вибрации шестерни-диска, то-есть волновой резонанс, согласно уравнению (6), наступит дважды:

$$\left.\begin{array}{l} \omega_1 = \dfrac{\lambda}{m} + \omega = \dfrac{p}{m} \text{ — для назад бегущих волн} \\ \omega_2 = \dfrac{\lambda}{m} - \omega = \dfrac{p}{m} \text{ — для вперед бегущих волн} \end{array}\right\}. \tag{8}$$

Отсюда можно определить:

а) резонансные частоты возбуждения $\lambda_{\text{рез}}$ при заданной скорости вращения ω;

$$\left.\begin{array}{l} \lambda_{\text{нижн}} = p - m\omega \text{ — для назад бегущих волн} \\ \lambda_{\text{верхн}} = p + m\omega \text{ — для вперед бегущих волн} \end{array}\right\} \tag{9}$$

б) резонансные скорости прямого и обратного вращения $\omega_{\text{рез}}$ при заданной частоте λ:

$$\omega_{\text{рез}} = \pm \frac{p - \lambda}{m}. \tag{10}$$

Из формулы (10) следует, что при $\lambda = 0$, то есть при действии на вращающуюся шестерню-диск постоянной силы Q_0 возникают резонансные вибрации на так называемых критических угловых скоростях

$$\omega_{\text{кр}} = \pm \frac{p}{m}.$$

Причем, воздействие переменной силы с частотой λ как бы снижает критическую скорость до резонансной по (10). Условия резонанса (8), приведенные к виду

$$\lambda + m\omega = p \text{ — для назад бегущих волн;}$$

$$\lambda - m\omega = p \text{ — для вперед бегущих волн,}$$

изображены на фиг. 4 диаграммой возбуждения вращающейся шестерни-диска от неподвижного источника возбуждения с постоянной амплитудой Q_0 и частотой λ:

а) при $\lambda = \lambda_1 < p$ — резонируют только назад бегущие волны (фиг. 4б).

б) при $\lambda = \lambda_2 > p$ — резонируют только вперед бегущие волны (фиг. 4а).

В нашем случае, когда причиной колебаний шестерни являются динамические нагрузки (удары) в зубьях, частота возбуждения пропорциональна угловой скорости вращения $\lambda = \nu z \omega$,

где ν — порядок кратности высокочастотной гармоники z, равной числу зубьев шестерни.

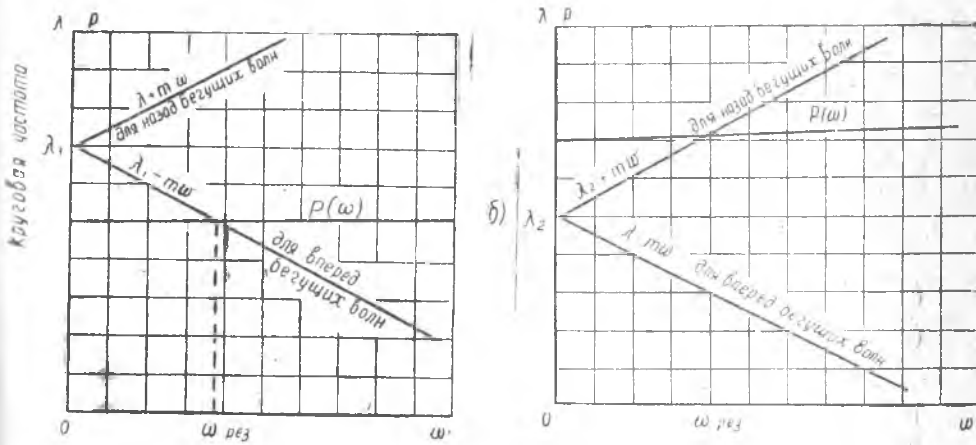
Поэтому, согласно (10), тензодатчик, наклеенный на ободе шестерни, зарегистрирует два резонанса на угловых скоростях:

$$\left.\begin{aligned} \omega_{\text{нижн}} &= \frac{p}{\nu z + m} \text{ — для назад бегущих волн} \\ \omega_{\text{верхн}} &= \frac{p}{\nu z - m} \text{ — для вперед бегущих волн} \end{aligned}\right\}. \qquad (11)$$

Условия резонанса (11), приведенные к виду

$$(\nu z + m)\,\omega = p \text{ — для назад бегущих волн;}$$

$$(\nu z - m)\,\omega = p \text{ — для вперед бегущих волн,}$$



Фиг. 4.

изображены на фиг. 5а диаграммой возбуждения вращающейся шестерни от неподвижной в пространстве силы $Q(t)$, изменяющейся во времени с частотой $\nu z \omega$ и постоянной амплитудой, определяемой величиной силы удара.

Указанные выше расчетные формулы были получены нами из простых физических представлений механизма волнового резонанса при одном условии, что амплитуда возбуждающей силы Q_0 — постоянна и определяется лишь одинаковой для всех зубьев ошибкой шага или профиля.

В действительности, наличие индивидуальных ошибок зацепления приводит к тому, что величина ударных импульсов в различных зубьях будет различной, отчего амплитуда Q_0 возбуждающей силы в общем случае будет произвольной периодической функцией времени $Q_0 = Q_0(t)$ с периодом вращения шестерни $T = \frac{2\pi}{\omega}$. Определим характер возбуждения осевых колебаний шестерни-диска в этом общем случае воздействия модулированной по амплитуде силы

$$Q(t) = Q_0(t)\cos\lambda t = [Q_0 + A(t)]\cos\lambda t, \tag{12}$$

где $A(t)$ — функция, характеризующая низкочастотную пульсацию (модуляцию) динамического усилия, обусловленную индивидуальными ошибками зацепления.

Представив периодическую функцию $A(t)$ в интервале $0 \leqslant t \leqslant T$ рядом Фурье

$$A(t) = \sum_{\kappa} (a_\kappa \cos k\omega t + b_\kappa \sin k\omega t)$$

и учитывая (12), получим

$$Q(t) = Q_0 \cdot \cos\lambda t + \sum_{\kappa} \frac{1}{2} a_\kappa [\cos(\lambda + k\omega) t + \cos(\lambda - k\omega) t] +$$

$$+ \sum_{\kappa} \frac{1}{2} b_\kappa [\sin(\lambda + k\omega) t + \sin(\lambda - k\omega) t]. \tag{13}$$

Следовательно, в общем случае на реальную вращающуюся шестерню-диск будут действовать одновременно, три вида возбуждающих сил с частотами:

$\lambda = \nu z\omega$ — несущая (основная) частота,

$$\left.\begin{matrix}(\nu z + k)\,\omega \\ (\nu z - k)\,\omega\end{matrix}\right\} \text{— боковые частоты.}$$

В таком случае, рассматривая возникновение резонансов согласно предыдущему, от каждого вида возбуждения в отдельности, получим наряду с основными резонансами по (11), обусловленными несущей частотой $\nu z\omega$, еще добавочный спектр «боковых» резонансов с вперед и назад бегущими волнами, обусловленными боковыми частотами спектра возбуждения $(\nu z + k)\,\omega$ и $(\nu z - k)\,\omega$:

$$\left.\begin{aligned}\omega^{(\kappa)}_{\text{нижн}} &= \frac{p}{\nu z \pm \kappa + m} \text{ — для назад бегущих волн;} \\ \omega^{(\kappa)}_{\text{верхн}} &= \frac{p}{\nu z \pm k - m} \text{ — для вперед бегущих волн,}\end{aligned}\right| \tag{14}$$

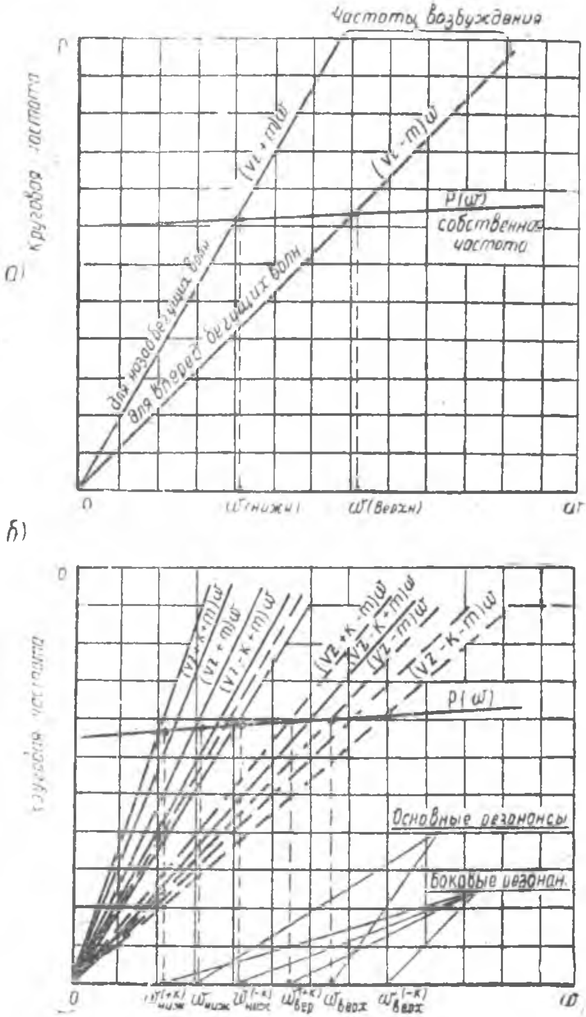
где $\nu = 1, 2, 3\ldots$ кратность, определяемая видом неравномерности динамического усилия по профилю зуба;

$k = 0, 1, 2, 3\ldots$ кратность, определяемая видом неравномерности динамического усилия по окружности обода.

Таким образом, условия волнового резонанса (14) реальной конической шестерни с учетом всегда возможных ошибок зацепления, приведенные к виду:

$$(zz \pm k + m)\,\omega = p \text{ — для назад бегущих волн;}$$

$$(\nu z \pm k - m)\,\omega = p \text{ — для вперед бегущих волн,}$$



Фиг. 5.

могут быть представлены обобщенной диаграммой возбуждения (фиг. 5б) на которой сплошными и штриховыми лучами нанесены частоты возбуждения соответственно для назад и вперед бегущих волн.

Следует указать на возможность возникновения на шестерне-диске резонансов со стоячими волнами, имеющих неподвижные узловые точки (диаметры) относительно самой вращающейся шестерни. Этот важный факт обычно не подчеркивается в литературе по вибрациям дисков, хотя он заслуживает серьезного внимания. Дело в том, что наличие стоячих резонансных волн на вращающейся шестерне-диске во-первых, объясняет закономерный вид и симметричное расположение трещин и поломок ободов в местах, соответствующих положению пучностей колебаний, и во-вторых, всегда требует тщательного тензометрирования обода для определения распределения напряжений и установления фактических максимальных напряжений, по уровню которых только можно судить об эффективности внедренных против вибраций мероприятий.

Резонанс со стоячей волной, очевидно, возникнет, если боковые резонансы, согласно (14), произойдут на одних и тех же угловых скоростях, т. е. при $\omega_{\text{нижн}}^{(\text{к})} = \omega_{\text{верхн}}^{(\text{к})}$.

Образовать стоячую волну физически могут только резонансные волны от следующих пар лучей возбуждения:

$$\left.\begin{aligned}(\nu z - k + m)\,\omega = p\\ (\nu z + k - m)\,\omega = p\end{aligned}\right\}$$ при наличии в спектре возбуждения гармоники $k = m$;

$$\left.\begin{aligned}(\nu z + k + m)\,\omega = p\\ (\nu z + k - m)\,\omega = p\end{aligned}\right\}$$ при наличии в спектре одновременно двух гармоник $k = i$ и $k = i + 2m$;

$$\left.\begin{aligned}(\nu z - k + m)\,\omega = p\\ (\nu z - k - m)\,\omega = p\end{aligned}\right\}$$ при наличии в спектре одновременно двух гармоник $k = i$ и $k = i - 2m$.

Следовательно, при наличии в спектре возбуждения конической шестерни за счет ошибок зацепления низких гармоник с номером $k = m$, i и $i \pm 2m$ становится возможным образование резонансов со стоячими волнами на следующих угловых скоростях вращения:

$\omega_{\text{нижн}}^{(m)} = \omega_{\text{верхн}}^{(m)} = \dfrac{p}{\nu z}$ — при наличии гармоники $k = m$;

$\omega_{\text{нижн}}^{(i,\ i+2m)} = \dfrac{p}{\nu z + i + m}$ — при наличии одновременно двух гармоник $k = i$ и $k = i + 2m$, где $i = 0, 1, 2, 8 \ldots$;

$\omega_{\text{верхн}}^{(i,\ i-2m)} = \dfrac{p}{\nu z - i + m}$ — при наличии одновременно двух гармоник $k = i$ и $k = i - 2m$, где $i \geqslant 2m$.

Физически это значит, что низкочастотные импульсы указанных кратностей воздействуют на обод шестерни как раз в момент прохождения через точку зацепления пучности волны колебаний. Поскольку с точки зрения возможности возбуждения шестерни-диска важно только, чтобы возбуждающий импульс периодически прикладывался лишь к пучностям, смещенным относительно друг друга на целое число волн, то действие импульсов в такт этим пучностям равносильно возбуждению шестерни-диска через одну и ту же точку обода, то есть периодическая сила оказывается в таком случае как бы «остановленной» относительно шестерни-диска, что, естественно, вызывает резонанс со стоячей относительно нее волной колебаний.

Для правильной оценки результатов тензометрирования шестерен и обоснования расчетных формул, полученных выше из простых физических соображений, рассмотрим механизм возникновения переменных усилий в зацеплении и приведем точную формулу вынужденных колебаний шестерни-диска под действием этих сил. Процесс передачи рабочего усилия через зубья двухпарного зацепления и возникновения динамических усилий схематически показан на фиг. 6 а, б.

При вращении шестерни с угловой скоростью ω положение зубьев, характеризуемых начальными углами φ_1, φ_2 и φ_3 относительно неподвижного пространства, будет определяться координатами $\varphi_1 - \omega t$, $\varphi_2 - \omega t$ и $\varphi_3 - \omega t$ и процесс последовательного входа и выхода зубьев из зацепления, а также передачу усилий можно изобразить диаграммой фиг. 6 б. Интервалы AM и NB — соответствуют одновременной работе двух зубьев (двухпарное зацепление); интервал MN — работе одного зуба (однопарное зацепление).

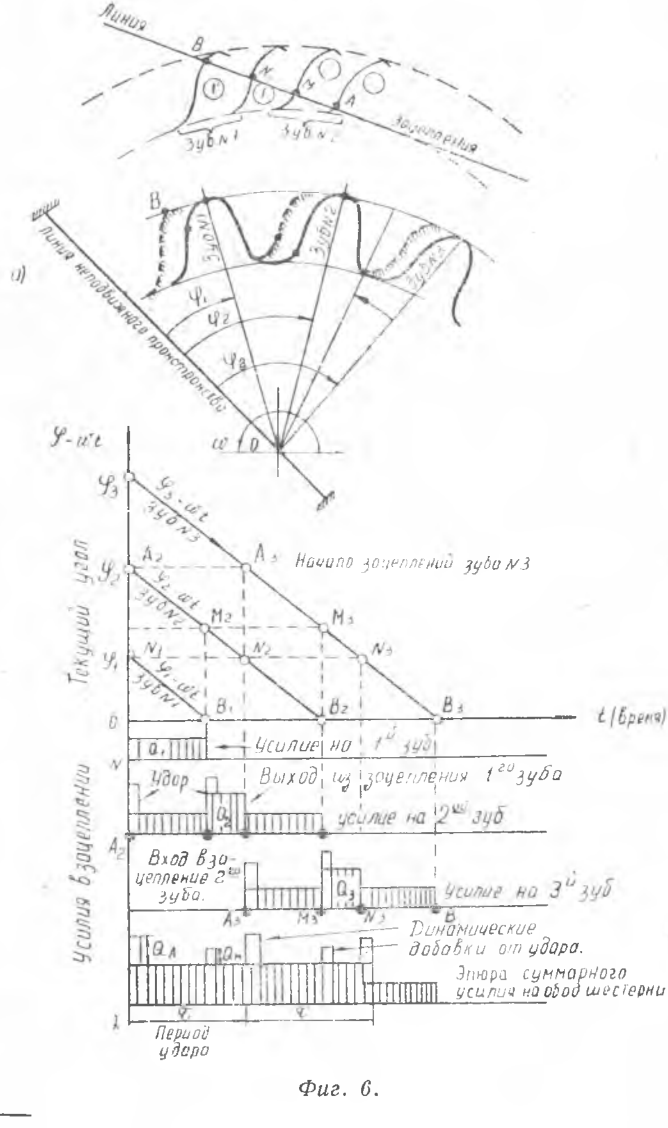
Вход зуба в зацепление (точка A), а также момент перехода от двухпарного зацепления к однопарному (точка «M») может в общем случае сопровождаться ударом зубьев, то-есть возникновением импульсов $Q(t)$.

Периодичность следования ударов, очевидно, определяется числом зубьев z и периодом вращения шестерни: $\tau = \frac{T}{Z} = \frac{2\pi}{z\omega}$. Поскольку в течение времени τ импульсы Q_A и Q_M получает один и тот же зуб в соседних, малосмещенных в окружном направлении точках A и M, то можно считать, что динамическое усилие приложено как бы в одной точке шестерни и меняется лишь во времени (фиг. 7 а).

Укажем два наиболее характерных случая изменения силы $Q(t)$:

а) Регулярное высокочастотное возбуждение. Если через время τ картина ударов повторяется на каждом зубе с той же последовательностью и величиной, то можно рассматривать такой импульс $Q(t)$ движущимся по ободу скачкообразно с зуба на зуб. Однако при большом числе зубьев с достаточным приближением можно принять этот импульс за непрерывно движущийся* относительно шестерни и изменяющийся по величине с частотой $z\omega$ за счет разношагицы сцепляющихся шестерен, зубья каждой из которых выполнены совершенно точно.

б) Модулированное по амплитуде высокочастотное возбуждение. Если через время τ картина



Фиг. 6.

---

* Влияние скачкообразного движения ударных импульсов по ободу шестерни, дополнительно усложняющего картину ее колебаний, является предметом специального исследования и здесь не рассматривается.

ударов повторяется лишь во времени (с той же частотой), а амплитуда импульсов от различных зубьев различна вследствие индивидуальных ошибок их профилей, то будем иметь высокочастотное возбуждение, модулированное по амплитуде низкой частотой (фиг. 7 б).

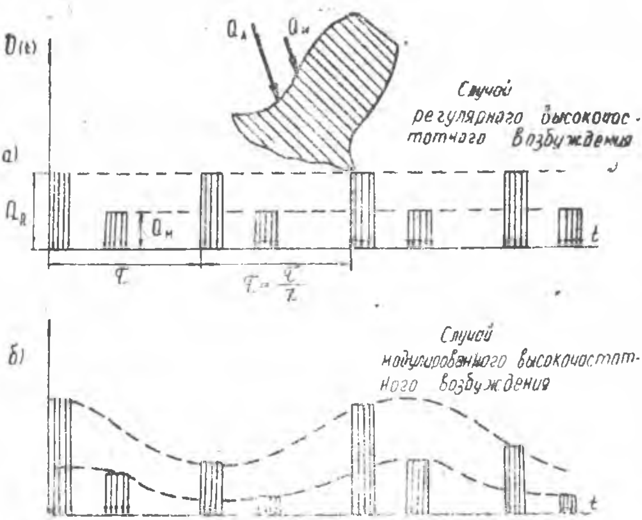
Интенсивность возбуждающих импульсов (сила на единицу площади) для каждого случая естественно записать в обычной форме:

$$q(r, \varphi, t) = \sum_{\nu} [a_{\nu}(r, \varphi) \cos \nu z \omega t + b_{\nu}(r, \varphi) \sin \nu z \omega t] — \tag{15}$$

— для регулярного высокочастотного возбуждения, где

$$a_{\nu}(r, \varphi) = \frac{z\omega}{\pi} \int_0^{\frac{2\pi}{z\omega}} q(r, \varphi, t) \cos \nu z \omega t \, dt;$$

$$b_{\nu}(r, \varphi) = \frac{z\omega}{\pi} \int_0^{\frac{2\pi}{z\omega}} q(r, \varphi, t) \sin \nu z \omega t dt;$$



Фиг. 7.

$\nu = 1, 2, 3...$ — кратность, определяемая характером изменения силы за период τ по профилю зуба.

$$q(r, \varphi, t) = \sum_{\nu} [A_{\nu}(r, \varphi, t) \cos \nu z \omega t + B_{\nu}(r, \varphi, t) \sin \nu z \omega t] — \tag{16}$$

— для модулированного высокочастотного возбуждения, где амплитуды гармоник A_ν и B_ν, являющиеся периодическими функциями времени с периодом $T = \frac{2\pi}{\omega}$, можно представить в виде.

$$A_\nu (r, \varphi, t) = a_\nu (r, \varphi) + \sum [\alpha_{\nu\kappa} (r, \varphi) \cdot \cos k\omega t + \beta_{\nu\kappa} (r, \varphi) \sin k\omega t] \qquad (17)$$

(для B_ν — аналогично...)
причем

$$\alpha_{\nu\kappa} (r, \varphi) = \frac{\omega}{\pi} \int_0^{\frac{2\pi}{\omega}} [A_\nu (r, \varphi, t) - a_\nu (r, \varphi)] \cos k\omega t dt$$

$$\beta_{\nu\kappa} (r, \varphi) = \frac{\omega}{\pi} \int_0^{\frac{2\pi}{\omega}} [A_\nu (r, \varphi, t) - a_\nu (r, \varphi)] \cdot \sin k\omega t \cdot dt.$$

Откуда следует, что при отсутствии низкочастотной модуляции $\alpha_{\nu\kappa} = \beta_{\nu\kappa} = 0$ будем иметь первый (частный) случай возбуждения. При наличии модуляции возбуждение, очевидно, будет с учетом (16) и (17) содержать в себе гармоники вида

$$a_\nu \cdot \cos \nu z\omega t; \quad \alpha_{\nu\kappa} \cdot \cos \nu z\omega t \cdot \cos k\omega t; \quad \beta_{\nu\kappa} \cdot \cos \nu z\omega t \cdot \sin k\omega t,$$

(аналогично для $\sin \nu z\omega t$), то-есть будет иметь в своем спектре гармоники с тремя группами частот: $\nu z\omega$, $(\nu z + k)\,\omega$ и $(\nu z - k)\,\omega$. Для случая воздействия модулированного по амплитуде сосредоточенного высокочастотного импульса, неподвижного в пространстве и интенсивностью, определяемой по (16 и 17), на вращающуюся шестерню-диск выражение для вынужденного прогиба ее, согласно известной теории вибраций дисков, получим в следующем виде:

$$Y_{\text{вын}}^{(r,\varphi,t)} = \sum_m \sum_n \sum_\nu \frac{1}{2} X_{mn}^{(r)} U_{mn}^{(a_\nu)} \cdot$$

$$\cdot \left\{ \frac{\cos [(\nu z + m)\,\omega t - m\varphi + \delta_{mn}^{(1)}]}{\sqrt{[p_{mn}^2 - (\nu z + m)^2\omega^2]^2 + 4\beta^2 (\nu z + m)^2\omega^2}} + \right.$$

$$\left. + \frac{\cos [(z\nu - m)\,\omega t + m\varphi + \delta_{mn}^{(2)}]}{\sqrt{[p_{mn}^2 - (z\nu - m)^2\omega^2]^2 + 4\beta^2 (\nu z - m)^2\omega^2}} \right\} +$$

$$+ \sum_m \sum_n \sum_\nu \sum_\kappa \frac{1}{4} X_{mn}^{(r)} U_{mn}^{(\alpha_{\nu\kappa})} \cdot$$

$$\cdot \left\{ \frac{\cos [(\nu z + k + m)\,\omega t - m\varphi + \delta_{mn}^{(3)}]}{\sqrt{[p_{mn}^2 - (\nu z + k + m)^2\omega^2]^2 + 4\beta^2 (\nu z + k + m)^2\omega^2}} + \right.$$

$$+ \frac{\cos [(\nu z + k - m)\,\omega t + m\varphi + \delta_{mn}^{(4)}]}{\sqrt{[p_{mn}^2 - (\nu z + k - m)^2\omega^2]^2 + 4\beta^2 (\nu z + k - m)^2\omega^2}} +$$

$$+ \frac{\cos [(\nu z - k + m)\,\omega t - m\varphi + \delta_{mn}^{(5)}]}{\sqrt{[p_{mn}^2 - (\nu z - k + m)^2\omega^2]^2 + 4\beta^2 (\nu z - k + m)^2\omega^2}} +$$

$$+\left.\frac{\cos\left[(\nu z-k-m)\,\omega t+m\varphi+\delta_{mn}^{(6)}\right]}{\sqrt{\left[p_{mn}^{2}-(\nu z-k-m)^{2}\omega^{2}\right]^{2}+4\beta^{2}(\nu z-k-m)^{2}\omega^{2}}}\right\}, \qquad (18)$$

где

$$\operatorname{tg}\delta_{mn}^{(s)}=-\frac{2\beta\Omega_s}{p_{mn}^{2}-\Omega_s^{2}};\ s=1,\ 2,\ 3,\ 4,\ 5,\ 6.$$

$$\left.\begin{array}{l}\Omega_1=(\nu z+m)\,\omega;\ \Omega_3=(\nu z+k+m)\,\omega;\ \Omega_5=(\nu z-k+m)\,\omega\\ \Omega_2=(\nu z-m)\,\omega;\ \Omega_4=(\nu z+k-m)\,\omega;\ \Omega_6=(\nu z-k-m)\,\omega\end{array}\right\} \qquad (19)$$

β — коэффициент демпфирования (на единицу массы);

P_{mn} и $X_{mn}^{(r)}$ — собственные круговая частота и форма колебаний шестерни-диска с m — узловыми диаметрами и n — узловыми окружностями.

$$U_{mn}^{(q)}=\frac{\int\limits_{r_{\min}}^{r_{\max}}dr\int\limits_{0}^{2\pi}r\cdot X_{mn}(r)\,q\,(r,\varphi)\cdot\cos m\varphi\cdot d\varphi}{2\pi\rho\int\limits_{r_{\min}}^{r_{\max}}r\cdot h\,(r)\,X_{mn}^{2}(r)\,dr};$$

$2h\,(r)$ — толщина диска;

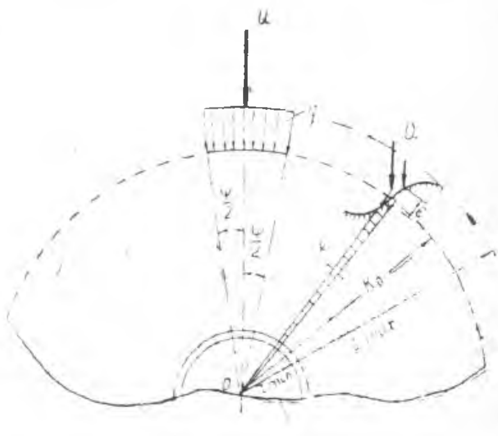
$\rho=\frac{\gamma}{g}$ — массовая плотность.

При вычислении следует иметь в виду, что для сосредоточенного импульса

$$\lim\left(q\cdot\varepsilon R_0\psi\cdot\frac{\sin\frac{m\psi}{2}}{\frac{m\psi}{2}}\right)_{\text{при }\substack{\psi\to 0\\ \varepsilon\to 0}}=Q\ \text{(см. фиг. 8).}$$

В данном случае в качестве q надо брать соответственно интенсивности гармоник a_ν и $\alpha_{\nu\kappa}$. Из общей формулы (18) видно, что при совпадении собственных частот шестерни-диска P_{mn} с частотами волнового возбуждения Ω_s (по 19) резко возрастают прогибы (напряжения), соответствующие резонирующей форме колебаний.

Как было показано выше, это означает совпадение скоростей распространения по диску волн вынужденных и свободных колебаний.



Фиг. 8.

И действительно, в формуле (18) каждое слагаемое, имеющее множитель

$$\cos[\Omega_s t \pm m\varphi + \delta_{mn}^{(s)}] = \cos m\left[\varphi \pm \frac{\Omega_s}{m} t - \frac{\delta_{mn}^{(s)}}{m}\right] -$$

представляет собой цепь из m вынужденных волн, бегущих в обе стороны относительно шестерни-диска со скоростями $\frac{\Omega_s}{m}$ и, естественно, при равенстве этих скоростей скоростям распространения волн свободных колебаний $\frac{P_{mn}}{m}$ возникает волновой резонанс:

$$\frac{P_{mn}}{m} = \frac{\Omega_s}{m} \text{ или } P_{mn} = \Omega_s,$$

где $s = 1, 2, 3 \ldots 6$.

Кроме того, из (18) следует, что вследствие густого спектра возбуждения шестерни возможно возникновение резонансных и вынужденных колебаний типа «биения», являющихся результатом наложения колебаний с близкими частотами:

$$P_{mn};\ \frac{\nu z \pm m}{\nu z \mp m} P_{mn};\ \frac{\nu z \pm k \mp m}{\nu z \pm m} P_{mn};\ (\nu z \pm k \pm m)\,\omega \text{ и т. д.}$$

а также образование резонансных колебаний со стоячими относительно вращающейся шестерни-диска узловыми диаметрами. Таким образом, можно считать все изложенные выше соображения по возникновению волнового резонанса и стоячих волн на вращающейся шестерне-диске достаточно обоснованными.

АНАЛИЗ РЕЗУЛЬТАТОВ ТЕНЗОМЕТРИРОВАНИЯ КОНИЧЕСКИХ ШЕСТЕРЕН

Для анализа результатов тензометрирования всех вариантов исследованных шестерен была построена, согласно формулам (11) и (14), резонансная диаграмма возбуждения от гармоник, кратных числу зубьев z исследуемой шестерни (фиг. 9).

Обороты ротора, соответствующие резонансам шестерни, определялись по формулам:

$$\left.\begin{aligned} n_{\text{нижн}} &= j \cdot \frac{60 \cdot f_m}{\nu z + m} \\ n_{\text{верхн}} &= j \cdot \frac{60 \cdot f_m}{\nu z - m} \end{aligned}\right| \ (\text{об/мин}) \text{ — обороты основных резонансов.}$$

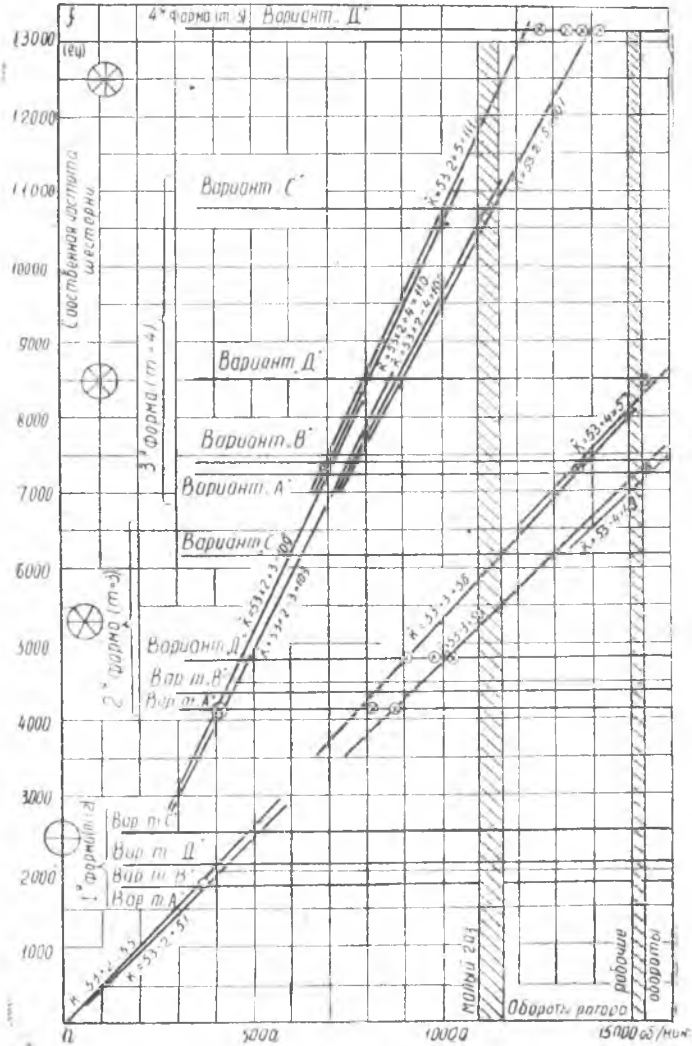
$$\left.\begin{aligned} n_{\text{нижн}}^{(+\kappa)} &= j \cdot \frac{60 \cdot f_m}{\nu z + k + m}; \quad n_{\text{верхн}}^{(+\kappa)} = j \cdot \frac{60 \cdot f_m}{\nu z + k - m} \\ n_{\text{нижн}}^{(-\kappa)} &= j \cdot \frac{60 \cdot f_m}{\nu z - k + m}; \quad n_{\text{верхн}}^{(-\kappa)} = j \cdot \frac{60 \cdot f_m}{\nu z - k - m} \end{aligned}\right| \text{ — обороты боковых резонансов,}$$

где f_m — собственная частота с m — узловыми диаметрами, *гц*.

$j = \frac{53}{30}$ — передаточное отношение к ротору.

Как показало тензометрирование шестерен (варианты A и D (фиг. 10) имеют место сильные основные резонансы с гармониками первого ($\nu = 1$) и второго ($\nu = 2$) порядка от числа зубьев $z = 53$.

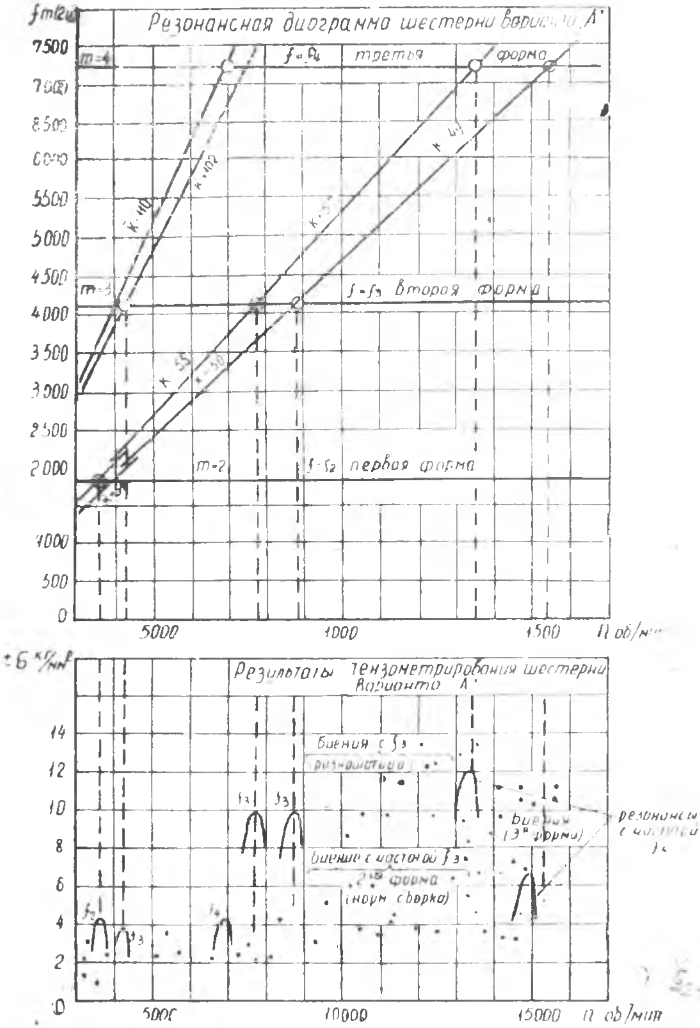
Возбуждение формы с $m = 3$ (вариант A) и формы с $m = 4$



Фиг. 9.

(вариант A) гармониками $2z \pm m$, по-видимому, связано с наличием двух ударов в каждом зубе, как это и отмечалось выше.

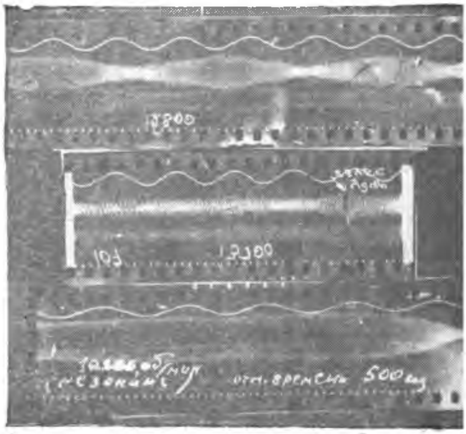
Наряду с ожидаемыми регулярными резонансными колебаниями были зарегистрированы также сложные колебания типа «модулированных биений», что, несомненно, связано с наличием мо-дулированного по амплитуде возбуждения вследствие индивиду-альных ошибок зацепления и с близостью друг к другу боковых резонансов.



Фиг. 10.

Согласно (18), частоты биений, например, могут иметь порядок $\Delta f_m = \frac{2m}{\nu z \pm k \pm m} f_m$ и др., что для шестерни варианта A при воз-буждении формы с $m = 3$ ($f_3 = 4150$ *гц*, $\nu = 1$, $k = 1, 2, 3$) составляет примерно 500 *гц*. Биения с такими частотами наблюдались.

Кроме того, наклейка тензометров на зуб исследуемой шестерни позволила обнаружить наличие ударной нагрузки на обод, так как момент прохождения этого зуба через зацепление сопровождался при каждом обороте всплеском напряжений фиг. 11. Для выявления возможных, согласно изложенному выше, колебаний с неподвижными относительно шестерни узловыми диаметрами было проведено тензометрирование шестерни варианта D, препарированной пятью тензодатчиками по окружности обода через два зуба, позволившее снять распределение напряжений в данный момент времени на части обода, составляющей примерно половину длины волны формы колебаний с $m = 3$.



Фиг. 11.

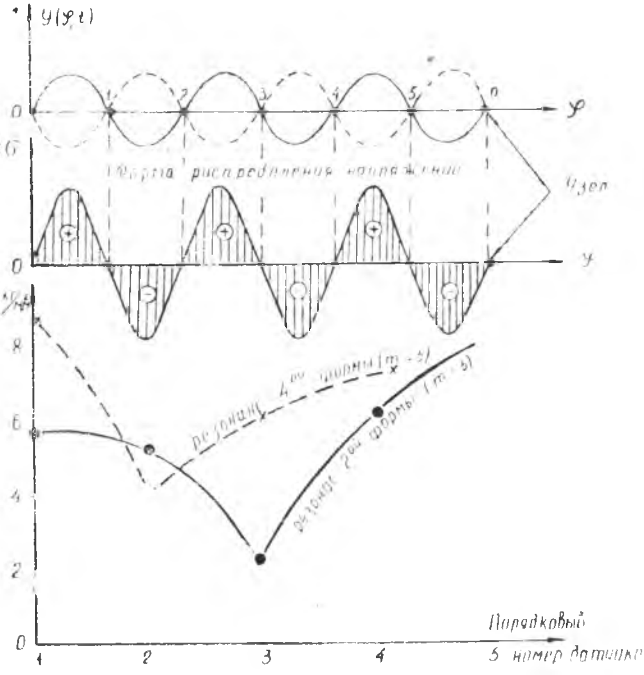
На фиг. 12 дан график распределения мгновенно замеренных по всем датчикам напряжений при резонансах с формами $m = 3$ (сплошная линия) и $m = 5$ (пунктирная линия), показывающий, что уровень замеряемых напряжений зависит от места наклейки датчика по окружности обода и может отличаться в два с лишним раза.

Это, по-видимому, объясняется наряду с имеющимся всегда разбросом напряжений, также наличием стоячих резонансных волн.

Поэтому, для полного обследования напряженного состояния колеблющейся шестерни-диска необходимо впредь клеить ряд тензодатчиков по ободу на длине дуги не менее волны или в крайнем случае полуволны исследуемой формы колебаний.

При тензометрировании ряда шестерен было замечено, что уровень напряжений в интервале между резонансами от основных гармоник ($\nu z \pm m$) такого же порядка, как и при основных резонансах. Это свидетельствовало о наличии в данном диапазоне оборотов резонансов от боковых гармоник возбуждения ($\nu z \pm k \pm m$) интенсивность которых существенно зависела от точности зацепления, и в частности — от разношагицы (фиг. 10 и табл. № 1). Так, введение разношагицы порядка 0,03÷0,04 *мм* путем увеличения межцентренного расстояния сопряженных шестерен вызывало сильно модулированное ошибками зацепления добавочное возбуждение, которое усиливало интенсивность боковых резонансов с $\sigma_\nu = \pm 3{,}5$ до $\sigma_\nu = \pm 18$ *кг/мм²*.

Одним из конструктивных направлений, связанным с уменьшением возбуждающих сил при работе высокооборотных конических шестерен, является применение косозубых конических передач,



Фиг. 12.

обеспечивающих более плавную (безударную) работу на высоких скоростях.

ЛИТЕРАТУРА

1. *С. Д. Пономарев* и др. «Основы современных методов расчета на прочность в машиностроении», Гостехиздат, 1952.

2. *А. В. Левин*, «Рабочие лопатки и диски паровых турбин» Госэнергоиздат, 1953.