

торных систем еще на стадии проектирования и, как следствие, задачи повышения вибрационной прочности и надежности машины.

Л и т е р а т у р а

1. Бабаков И.М. Теория колебаний. - М.: Наука, 1968. - 560 с.
2. Растргин Л.А. Статистические методы поиска. - М.: Наука, 1968. - 240 с.

УДК 621.822.5

Л.М.Рудман, Д.Е.Чегодаев

ОПТИМИЗАЦИЯ ВИБРОЗАЩИТНЫХ ХАРАКТЕРИСТИК ДИНАМИЧЕСКОЙ МОДЕЛИ ЗЕНЕРА, ПОДВЕРГАЕМОЙ ПЕРИОДИЧЕСКОМУ КИНЕМАТИЧЕСКОМУ ВОЗБУЖДЕНИЮ

Широкий класс газо- и гидростатических виброзащитных устройств может быть описан моделью Зенера (рис. 1) [1].

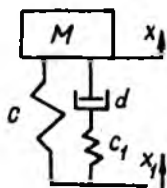
Важной задачей является выбор параметров модели таким образом, чтобы при периодическом кинематическом возбуждении $x_1 = A_1 \sin \omega_{\text{раб}} t$ фиксированной ("рабочей") частоты $\omega_{\text{раб}}$ амплитуда установившихся вынужденных колебаний массы была наименьшей при условии, что амплитуда на резонансной частоте не превысила бы заданной величины.

1. Постановка задачи

Пусть $R(\omega)$ - коэффициент передачи - отношение амплитуды установившихся вынужденных колебаний массы при возбуждении системы перемещением основания $x_1 = A_1 \sin \omega t$ к амплитуде A_1 возбуждающих колебаний.

Собственную частоту модели $\rho_0 = \sqrt{\frac{c}{m}}$ будем считать заданной. Известно [2], что

$$R(\omega) = \sqrt{\frac{1 + ux}{(1-x)^2 + ux(1-kx)^2}},$$



Р и с. 1. Динамическая модель Зенера: m - масса; c, c_1 - коэффициенты жесткости; d - коэффициент вязкого трения; x - перемещение массы; x_1 - перемещение основания

(1)

$$\text{где } x = \bar{\omega}^2 = \frac{\omega^2}{\rho_0^2} = \frac{m}{c} \omega^2; \quad u = \frac{cd^2}{m} \left(\frac{1}{c} + \frac{1}{c_1} \right)^2; \quad \kappa = \frac{c}{c+c_1}.$$

Поэтому описанная выше задача может быть сформулирована так:
при заданных $x_{\text{раб}}$ и R_0 найти u и κ , удовлетворяющие условиям

$$0 < \kappa < 1, \quad u > 0 \quad (2)$$

и

$$\max_{x > 0} \frac{1+ux}{(1-x)^2 + ux(1-\kappa x)^2} \leq R_0^2, \quad (3)$$

при которых $\frac{1+ux_{\text{раб}}}{(1-x_{\text{раб}})^2 + ux_{\text{раб}}(1-\kappa x_{\text{раб}})^2}$ принимает наименьшее значение.

Здесь $x_{\text{раб}}$ - квадрат безразмерной рабочей частоты, R_0 - ограничение на максимум коэффициента передачи.

2. Минимизация выбором коэффициента вязкого трения

$$\text{Обозначим } f(u, \kappa, x) = \frac{1+ux}{(1-x)^2 + ux(1-\kappa x)^2}.$$

Поставленную выше минимизационную задачу с двумя переменными разложим на две минимизационные задачи с одной переменной, а именно:

$$\min_{(u; \kappa)} f(u, \kappa, x_{\text{раб}}) = \min_{\kappa \in \left] 0; \frac{R_0-1}{R_0+1} \right]} \min_{u \in A_\kappa} f(u, \kappa, x_{\text{раб}}), \quad (4)$$

где через A обозначено множество пар значений $(u; \kappa)$, удовлетворяющих условиям (2) и (3), а $A_\kappa = \{u: (u; \kappa) \in A\}$. Минимум в левой части равенства (4) существует, и это равенство верно при условии, что существуют оба минимума в правой части равенства.

Заметим, что отыскание $\min_{u \in A_\kappa} f(u, \kappa, x_{\text{раб}})$ имеет и самостоятельный смысл, так как варьирование u при постоянном κ означает варьирование коэффициента вязкого трения d при фиксированном отношении коэффициентов жесткости $\frac{c_1}{c}$.

Ниже докажем, что $\min_{u \in A_\kappa} f(u, \kappa, x_{\text{раб}})$ существует при $0 < \kappa < \frac{R_0-1}{R_0+1}$ и достигается при

$$u = \frac{x_0^2 - 4x_0 + 3\delta}{2x_0(\kappa x_0 - \delta)}, \quad (5)$$

где

$$\delta = 1 - \frac{1}{R_0^2};$$

$$x_0 = \begin{cases} 1 + \sqrt{\alpha} / 2\kappa - \sqrt{1 + \sqrt{\alpha} / \kappa + \alpha / 4\kappa^2 - \beta / \kappa} & \text{при } x_{\text{раб}} > \frac{2}{1+\kappa}; \\ x_{\text{раб}} & \text{при } x_{\text{раб}} = \frac{2}{1+\kappa}; \\ 1 + \sqrt{\alpha} / 2\kappa + \sqrt{1 + \sqrt{\alpha} / \kappa + \alpha / 4\kappa^2 - \beta / \kappa} & \text{при } x_{\text{раб}} < \frac{2}{1+\kappa}; \end{cases} \quad (6)$$

$$\alpha = (1-\kappa)(\beta(3\kappa+1) - 4\kappa). \quad (7)$$

2.1. Структура множества A_κ

Поскольку очевидно (проверяется подстановкой), что

$$f(u, \kappa, \frac{2}{1+\kappa}) = \left(\frac{1+\kappa}{1-\kappa}\right)^2, \text{ то при } R_0^2 < \left(\frac{1+\kappa}{1-\kappa}\right)^2 \text{ множество } A_\kappa \text{ пусто.}$$

Пусть теперь $R_0^2 \geq \left(\frac{1+\kappa}{1-\kappa}\right)^2$, т.е. $\kappa \leq \frac{R_0 - 1}{R_0 + 1}$.

Пусть, далее, $x_0(u, \kappa)$ таково, что

$$\max_{x > 0} f(u, \kappa, x) = f(u, \kappa, x_0(u, \kappa)).$$

Можно показать, что при любых u и κ , удовлетворяющих условиям (2), $x_0(u, \kappa)$ существует, единственно и что $x = x_0(u, \kappa)$ тогда и только тогда, когда

$$\frac{\partial f}{\partial x}(u, \kappa, x) = 0. \quad (8)$$

Обозначим $g_\kappa(u) = f(u, \kappa, x_0(u, \kappa))$,

тогда $A_\kappa = \{u: g_\kappa(u) < R_0^2, u > 0\}$; с другой стороны,

$$g'_\kappa(u) = \frac{\partial f}{\partial u}(u, \kappa, x_0(u, \kappa)) + \frac{\partial f}{\partial x}(u, \kappa, x_0(u, \kappa)) \frac{\partial x_0}{\partial u}(u, \kappa) =$$

$$= \frac{\partial f}{\partial u}(u, \kappa, x_0(u, \kappa)) = ((1-x_0)^2 + ux_0(1-\kappa x_0)^2 - 2x_0^2(1-\kappa^2)(x_0 - \frac{2}{1+\kappa})).$$

(Отсюда видно, что знак $g'_\kappa(u)$ совпадает со знаком разности $x_0 - \frac{2}{1+\kappa}$.)

Легко видеть, что $x_0(u, \kappa)$ непрерывно по u на $]0; +\infty[$ (это следует из соотношения (8), непрерывности $\frac{\partial f}{\partial x}$, неравенств

$$0 < x_0(u, \kappa) < \frac{1}{\kappa}).$$

Поскольку $x_0(u, \kappa) = \frac{2}{1+\kappa}$ тогда и только тогда, когда $u = -\frac{1+\kappa}{2\kappa}$ [2], то при $u \in]\sigma; \frac{1+\kappa}{2\kappa}[$ и $u \in]\frac{1+\kappa}{2\kappa}; +\infty[$ (разность сохраняет знак.

Перепишем равенство $\frac{\partial f}{\partial x}(\mu, \kappa, x) = 0$ в виде уравнения

$$2\mu\kappa^2 x_0^3 - (2\mu\kappa^2 - \mu - 3\mu\kappa^2)x_0^2 - 2(2\mu\kappa - 1)x_0 - 2 = 0. \quad (9)$$

найдем, что $\lim_{\mu \rightarrow 0^+} x_0(\mu, \kappa) = 1$, откуда следует (ибо $1 < \frac{1+\kappa}{2\kappa}$), что при $\mu \in]0; \frac{1+\kappa}{2\kappa}$ [функция $g_\kappa(\mu)$ убывает. Аналогично, переписав уравнение (9) в виде

$$\kappa^2 x_0^3 - \mu x_0^2 + \frac{6\kappa^2 + 1}{2\mu} x_0 - \left(\frac{2\kappa}{\mu} - \frac{1}{\mu^2}\right)x_0 - \frac{2}{\mu^2} = 0, \quad \text{определим}$$

что $\lim_{\mu \rightarrow +\infty} x_0(\mu, \kappa) = \frac{1}{\kappa} > \frac{1+\kappa}{2\kappa}$, откуда следует, что при $\mu \in]\frac{1+\kappa}{2\kappa}; +\infty$ [функция $g_\kappa(\mu)$ возрастает.

Наконец, $\lim_{\mu \rightarrow 0^+} g_\kappa(\mu) = \lim_{\mu \rightarrow +\infty} g_\kappa(\mu) = +\infty$,

$$g_\kappa\left(\frac{1+\kappa}{2\kappa}\right) = \left(\frac{1+\kappa}{1-\kappa}\right)^2.$$

Проведенные рассуждения показывают, что, во-первых, уравнение $g_\kappa(\mu) = R_0^2$ имеет по одному решению $\mu_1(\kappa, R_0)$ и $\mu_2(\kappa, R_0)$ на промежутках $]0; \frac{1+\kappa}{2\kappa}]$ и $[\frac{1+\kappa}{2\kappa}; +\infty$ [соответственно ($\mu_1 < \mu_2$; $\mu_1 = \mu_2 \iff \kappa = \frac{2\kappa R_0 - 1}{R_0 + 1}$), а во-вторых, $A_\kappa = [\mu_1(\kappa, R_0); \mu_2(\kappa, R_0)]$.

2.2. Вычисление $\mu_1(\kappa, R_0)$ и $\mu_2(\kappa, R_0)$

Уравнение $g_\kappa(\mu) = R_0^2$ равносильно системе уравнений

$$\begin{cases} \frac{1 + \mu x_0}{(1 - x_0)^2 + \mu x_0 (1 - \kappa x_0)^2} = R_0^2; \\ \left(\frac{1 + \mu x_0}{(1 - x_0)^2 + \mu x_0 (1 - \kappa x_0)^2} \right)' = 0. \end{cases}$$

С помощью тождественных преобразований эту систему можно переписать в виде

$$\begin{cases} \mu = \frac{x_0^3 - 4x_0 + 3\beta}{2x_0(\kappa x_0 - \beta)}; \\ x_0^4 - 4x_0^3 + \left(\beta\left(3 - \frac{1}{\kappa^2}\right) + \frac{4}{\kappa}\right)x_0^2 - 4\frac{\beta}{\kappa}x_0 + \left(\frac{\beta}{\kappa}\right)^2 = 0. \end{cases} \quad (10)$$

Применяя метод Феррари, сведем уравнение (10) к уравнению $x_0^2 - 2x_0 + \frac{\beta}{\kappa} = \pm x_0 \sqrt{\frac{6(3\kappa^2 - 1) + 4\kappa}{\kappa^2} + 4 + \frac{2\beta}{\kappa}}$, которое распадается на два

квадратных:

$$x_0^2 - (2 + \sqrt{\alpha}/k)x_0 + \beta/k = 0 \quad (11)$$

или

$$x_0^2 - (2\sqrt{\alpha}/k)x_0 + \beta/k = 0. \quad (12)$$

Как легко проверить, дискриминант уравнения (12) отрицателен, а дискриминант уравнения (11) положителен при $0 < k < \frac{R_0 - 1}{R_0 + 1}$. Отсюда имеем

$$u_{1,2}(k, R_0) = \frac{x_{01,2}^2 - 4x_{01,2} + 3\beta}{2x_{01,2}(kx_{01,2} - \beta)},$$

где

$$x_{01,2} = 1 + \sqrt{\alpha}/2k \pm \sqrt{1 + \sqrt{\alpha}/k + \alpha/4k^2 - \beta/k}.$$

2.3. Определение наилучшего коэффициента вязкого трения

Теперь заметим, что

$$\frac{\partial f}{\partial u}(u, k, x_{раб}) = ((1 - x_{раб})^2 + u x_{раб}^2 (1 - k x_{раб})^2)^{-2} x_{раб} (1 - k^2)(x_{раб} - \frac{2}{1+k}).$$

Отсюда видно, что при $x_{раб} > \frac{2}{1+k}$ наилучшим значением u является $u_1(k, R_0)$, при $x_{раб} < \frac{2}{1+k}$ — $u_2(k, R_0)$, а при $x_{раб} = \frac{2}{1+k}$ можно взять значение u любым; возьмем $u = \frac{1+k}{2k}$.

Соответствующее значение параметра d определяется по формуле $d = \sqrt{u(1-k)}\sqrt{mc}$.

3. Исследование поведения $\min_{u \in A_k} f(u, k, x_{раб})$ при изменении k для $x_{раб} > 2$

Прежде всего, при $x_{раб} > 2$ имеем $x_{раб} > \frac{2}{1+k}$, и поэтому, в соответствии с формулами (5), (6) и (7),

$$h(k, R_0, x_{раб}) = \min_{u \in A_k} f(u, k, x_{раб}) = f(u_1(k, R_0), k, x_{раб}).$$

Из формул (5), (6) и (7) можно вывести, что

$$\lim_{k \rightarrow 0+} x_{01}(k, R_0) = \sqrt{\beta} = \sqrt{1 - \frac{1}{R_0^2}};$$

$$\lim_{\kappa \rightarrow 0^+} u_1(\kappa, R_0) = \frac{2(1-\sqrt{b})}{b};$$

$$\lim_{\kappa \rightarrow \frac{R_0-1}{R_0+1} - 0} x_{01}(\kappa, R_0) = \frac{R_0+1}{R_0};$$

$$\lim_{\kappa \rightarrow \frac{R_0-1}{R_0+1} - 0} u_1(\kappa, R_0) = \frac{R_0}{R_0-1};$$

$$\lim_{\kappa \rightarrow 0^+} \frac{\partial h}{\partial \kappa}(\kappa, R_0, x_{\text{раб}}) > 0; \quad (13)$$

$$\lim_{\kappa \rightarrow \frac{R_0-1}{R_0+1} - 0} \frac{\partial h}{\partial \kappa}(\kappa, R_0, x_{\text{раб}}) = +\infty. \quad (14)$$

Табулирование на ЭВМ функции $R_{\text{раб}} = \sqrt{h(\kappa, R_0, \bar{\omega}_{\text{раб}})}$ для различных наборов значений параметров R_0 и $\bar{\omega}_{\text{раб}}$, соотношения (13) и (14), а также соотношения

$$\lim_{R_0 \rightarrow 1+0} [\lim_{\kappa \rightarrow 0+0} h(\kappa, R_0, x_{\text{раб}})] = 1$$

$$\text{и } \lim_{R_0 \rightarrow 1+0} [\lim_{\kappa \rightarrow \frac{R_0-1}{R_0+1}} h(\kappa, R_0, x_{\text{раб}})] = 1$$

позволяют сделать вывод:

для каждого значения $R_0 > 1$ существует такое значение $\bar{\omega}_{\text{раб}}^* = \bar{\omega}^*(R_0)$, что при $\sqrt{2} < \bar{\omega}_{\text{раб}} < \bar{\omega}^*(R_0)$

$$\inf_{0 < \kappa < \frac{R_0-1}{R_0+1}} R_{\text{раб}}(\kappa, R_0, \bar{\omega}_{\text{раб}}) = \lim_{\kappa \rightarrow 0^+} R_{\text{раб}}(\kappa, R_0, \bar{\omega}_{\text{раб}}) = \sqrt{\frac{b+2(1-\sqrt{b})\bar{\omega}_{\text{раб}}^2}{b(1-\bar{\omega}_{\text{раб}}^2)+2(1-\sqrt{b})\bar{\omega}_{\text{раб}}^2}}$$

а при $\bar{\omega}_{\text{раб}} > \bar{\omega}^*(R_0)$

$$\min_{0 < \kappa < \frac{R_0-1}{R_0+1}} R_{\text{раб}}(\kappa, R_0, \bar{\omega}_{\text{раб}}) = R_{\text{раб}}(\kappa_{\text{min}}, R_0, \bar{\omega}_{\text{раб}}),$$

причем κ_{min} с ростом $\bar{\omega}_{\text{раб}}$ быстро стремится к $\frac{R_0-1}{R_0+1}$.

Зависимость $R_{раб}$ от K представлена на рис. 2. Заметим, что существует такое значение $\bar{\omega}^{**} \in]\sqrt{2}; \bar{\omega}^*[$, что при $\sqrt{2} < \bar{\omega}_{раб} < \bar{\omega}^{**}$ $R_{раб}(K, R_0, \bar{\omega}_{раб})$ возрастает с ростом K , а при $\bar{\omega}_{раб} > \bar{\omega}^{**}$ $R_{раб}(K, R_0, \bar{\omega}_{раб})$ имеет максимум при $K = K_{max}$.

Полагая условно $K_{min} = 0$
 при $\sqrt{2} < \bar{\omega}_{раб} < \bar{\omega}^*$, $K_{max} = \frac{R_0 - 1}{R_0 + 1}$
 при $\sqrt{2} < \bar{\omega}_{раб} < \bar{\omega}^{**}$, получим

зависимости $K_{min}(R_0, \bar{\omega}_{раб}), K_{max}(R_0, \bar{\omega}_{раб})$, изображенные на рис. 3

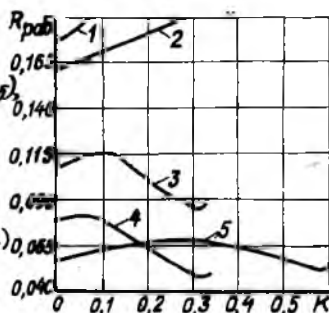
Зависимость $R_{opt} = \min_{(u, K)} R(u, K, \bar{\omega}_{раб})$, от $\bar{\omega}_{раб}$ при фиксированном R_0 и от R_0 при фиксированном $\bar{\omega}_{раб}$ представлена на рис. 4. Угловые точки на кривых (см. рис. 4, а) соответствуют значениям $\bar{\omega}_{раб} = \bar{\omega}^*(R_0)$.

Нетрудно видеть, что
 $\lim_{\bar{\omega}_{раб} \rightarrow \infty} R_{opt}(R_0, \bar{\omega}_{раб}) = 0$;

$\lim_{\bar{\omega}_{раб} \rightarrow \sqrt{2}+0} R_{opt}(R_0, \bar{\omega}_{раб}) = 1$;

$\lim_{R_0 \rightarrow 1+0} R_{opt}(R_0, \bar{\omega}_{раб}) = 1$;

$\lim_{R_0 \rightarrow +\infty} R_{opt}(R_0, \bar{\omega}_{раб}) = \frac{1}{\bar{\omega}_{раб} - 1}$.

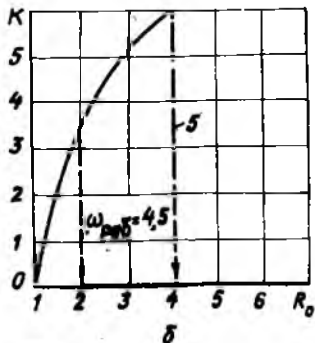
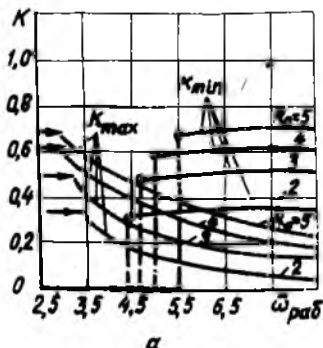


Р и с. 2. Зависимость $R_{раб}$ от K :

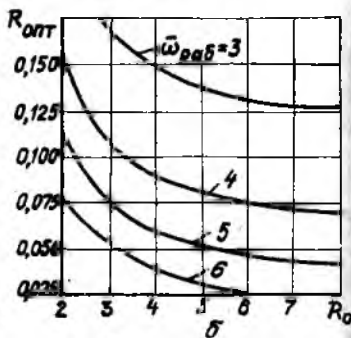
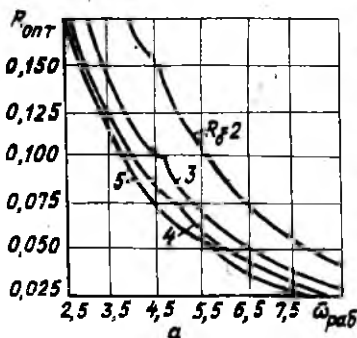
- 1 - $R_0 = 2, \bar{\omega}_{раб} = 4$;
- 2 - $R_0 = 4, \bar{\omega}_{раб} = 3$;
- 3 - $R_0 = 2, \bar{\omega}_{раб} = 6$;
- 4 - $R_0 = 2, \bar{\omega}_{раб} = 8$;
- 5 - $R_0 = 4, \bar{\omega}_{раб} = 5$

График зависимости $\bar{\omega} = \bar{\omega}^*(R_0)$

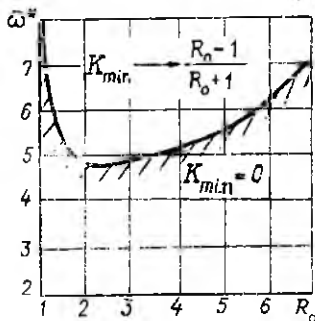
изображен на рис. 5.



Р и с. 3. Зависимость K_{min} от $\bar{\omega}_{раб}$ при фиксированном $R_0(\alpha)$ и от R_0 при фиксированном $\bar{\omega}_{раб}(\beta)$



Р и с. 4. Зависимость $R_{опт}(R_0, \bar{\omega}_{раб})$ от $\bar{\omega}_{раб}$ при фиксированном R_0 (а) и от R_0 при фиксированном $\bar{\omega}_{раб}$ (б)



Р и с. 5. Зависимость $\bar{\omega}^*$ от R_0 (заштрихована область, в которой $K_{min} = 0$)

$$\lim_{R_0 \rightarrow +\infty} \frac{\lim_{\kappa \rightarrow 0+0} h(\kappa, R_0, x_{раб}) - 1 / (x_{раб} - 1)}{\lim_{\kappa \rightarrow \frac{R_0-1}{R_0+1}} h(\kappa, R_0, x_{раб}) - 1 / (x_{раб} - 1)} = 0$$

следует, что $\lim_{R_0 \rightarrow +\infty} \bar{\omega}^*(R_0) = +\infty$.

На рис. 6 показана зависимость коэффициента вязкого трения $d_{опт}$ от R_0 и от $\bar{\omega}$ при $mc=1$.

Таким образом, полученные результаты позволяют предложить следующий алгоритм проектирования устройств, описываемых моделью Зенера.

1. Задаемся ограничением на коэффициент передачи на резонансе R_0 и рабочей частотой $\omega_{раб}$.

Из соотношения

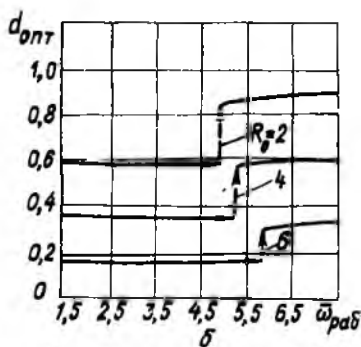
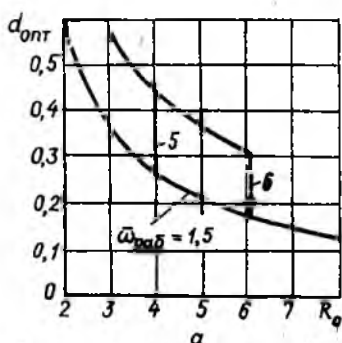
$$\lim_{\kappa \rightarrow \frac{R_0-1}{R_0+1}} h(\kappa, R_0, x_{раб}) > 1$$

при

$$x_{раб} < \frac{(R_0+1)(R_0-1) + \sqrt{(R_0-1)(9R_0-1)}}{2R_0(R_0-1)}$$

следует, что $\lim_{R_0 \rightarrow +\infty} \bar{\omega}^*(R_0) = +\infty$.

С другой стороны, из соотношения



Р и с. 6. Зависимость d_{opt} от R_0 при фиксированном $\bar{\omega}_{pab}$ (а) и от $\bar{\omega}_{pab}$ при фиксированном R_0 (б)

2. Выбираем параметры системы так, чтобы ее статическая жесткость удовлетворяла неравенству $C \geq \frac{m\bar{\omega}_{pab}^2}{2}$ (тогда $\bar{\omega}_{pab} > \sqrt{2}$).
3. Находим $K_{min}(R_0, \bar{\omega}_{pab})$ и выбираем параметры системы так, чтобы $K = \frac{C}{C + C_1}$ было близко к K_{min} .
4. Находим $U_{opt} = U_1(K_{min}, R_0)$ и выбираем параметры системы так, чтобы коэффициент вязкого трения d был близок к $\sqrt{U_{opt} m \bar{\omega}^2 (1 - K)}$ (но не менее).

Вычисление $U_1(K, R_0)$ и $K_{min}(R_0, \bar{\omega}_{pab})$ реализовано в виде программы для ЭВМ.

Л и т е р а т у р а

1. Токарев И.П., Белусов А.И., Чегодаев Д.Е. Упруговязкие модели и динамические характеристики газовых опор с внешним наддувом. - Куйбышев, 1980, с. 30 - 33. Рукопись представлена Куйбышев. авиац. ин-том. Деп. в ВИНИИ 1980, № 1478 - 80.
2. Чегодаев Д.Е., Шакиров Ф.М., Рудман Л.М. Некоторые оптимизационные задачи для систем с релаксационным механизмом демпфирования. - В кн.: Трение и смазка в машинах: Тез. докл. Всесоюз. конф. - Челябинск, 1983, ч. I, с. 152 - 153.