Проведенные эксперименты совместных колебаний трубопровода с компенсатором выявили резонансные режимы, при которых амплитуда колебаний системы достигает значительных величин.

Используя приведенные в настоящей работе расчетные уравнения, можно заранее предвидеть и не допускать наступление резонанса для вновь проектируемых компенсированных трубопроводных систем.

ЛИТЕРАТУРА

1. Крюков А. И. Частотные характеристики трубопроводов с компенсаторами. Известия вузов «Авиационная техника», 1968, № 4, стр. 47—53.

Ю. С. ВОРОБЬЕВ

# ОПРЕДЕЛЕНИЕ ГЕОМЕТРИЧЕСКИХ ХАРАКТЕРИСТИК ПОПЕРЕЧНОГО СЕЧЕНИЯ ЛОПАТОК ТУРБОМАШИН

При статических и вибрационных расчетах турбинных и компрессорных лопаток необходимо знать большое число геометрических характеристик их поперечных сечений. Причем для определения таких характеристик, как координаты центра изгиба, коэффициенты формы поперечного сечения при сдвиге, жесткость на кручение, — должно быть известно распределение касательных напряжений в поперечном сечении стержня при его деформации. Поэтому рассмотрена задача об изгибе с кручением призматического бруса несимметричного поперечного сечения. Брус рассматривается в произвольной правой системе координат $xyz$. Ось $z$ проходит по нейтральной оси недеформированного бруса, а оси $x$ и $y$ — по главным центральным осям инерции одного из торцовых поперечных сечений.

Обозначим через $u_1(z)$ и $v_1(z)$ перемещения нейтральной оси в направлениях $x$ и $y$ при изгибе, $u_2(z)$, $v_2(z)$ — соответствующие перемещения при сдвиге, $\Theta(z)$ — угловые перемещения относительно центра изгиба при кручении бруса.

Если на брус действует нагрузка в виде сосредоточенных сил и моментов, то его можно разделить на участки, для которых выполняются условия

$$\frac{d^4 u_1}{dz^4} = \frac{d^4 v_1}{dz^4} = \frac{d^2 u_2}{dz^2} = \frac{d^2 v_2}{dz^2} = \frac{d^2 \Theta}{dz^2} = 0. \quad (1)$$

В этом случае может быть получено решение задачи теории упругости о пространственном изгибе бруса с кручением согласно гипотезе Сен-Венана [2, 4]. Перемещения любого элементарного объема бруса в направлениях $x$, $y$, $z$ выражаются в виде:

$$U(x, y, z) = u_1 + u_2 + \theta (y - y_s) + \nu \frac{d^2 u_1}{dz^2} \frac{x^2 - y^2}{2} + \nu \frac{d^2 v_1}{dz^2} xy;$$

$$V(x, y, z) = v_1 + v_2 - \theta (x - x_s) + \nu \frac{d^2 u_1}{dz^2} xy + \nu \frac{d^2 v_1}{dz^2} \cdot \frac{y^2 - x^2}{2};$$

$$W(x, y, z) = -\frac{du_1}{dz} x - \frac{dv_1}{dz} y + \frac{du_2}{dz} \chi + \frac{dv_2}{dz} \Psi + \frac{d\Theta}{dz} \varphi, \quad (2)$$

где $\nu$ — коэффициент Пуассона;

$\varphi(x, y)$ — функция кручения;

$\chi(x, y)$, $\Psi(x, y)$ — функции депланации при сдвиге в направлениях $x$ и $y$;

$x_s$, $y_s$ — координаты центра изгиба поперечного сечения.

Деформации с учетом условий (1) равны:

$$\varepsilon_z = -\frac{d^2 u_1}{dz^2} x - \frac{d^2 v_1}{dz^2}; \qquad \varepsilon_x = \varepsilon_y = \nu \left[ \frac{d^2 u_1}{dz^2} x + \frac{d^2 v_1}{dz^2} y \right];$$

$$\gamma_{xz} = \frac{d\Theta}{dz} \left( \frac{\partial \varphi}{\partial x} + y - y_s \right) + \frac{du_2}{dz} \left( 1 + \frac{\partial \chi}{\partial x} \right) + \frac{dv_2}{dz} \cdot \frac{\partial \Psi}{\partial x} + \nu +$$

$$+ \nu \frac{d^3 u_1}{dz^3} \frac{x^2 - y^2}{2} + \nu \frac{d^3 v_1}{dz^3} xy;$$

$$\gamma_{yz} = \frac{d\Theta}{dz} \left( \frac{\partial \varphi}{\partial y} - x + x_s \right) + \frac{du_2}{dz} \frac{\partial \chi}{\partial y} + \frac{dv_2}{dz} \left( 1 + \frac{\partial \Psi}{\partial y} \right) +$$

$$+ \nu \frac{d^3 v_1}{dz^3} \cdot \frac{y^2 - x^2}{2} + \nu \frac{d^3 u_1}{dz^3} xy; \quad \gamma_{xy} = 0. \quad (3)$$

Функции $\varphi$, $\chi$ и $\Psi$ зависят только от формы поперечного сечения и определяют распределение деформаций и касательных напряжений. При численных расчетах удобно перейти к функциям

$$\chi_1 = (\chi + x) \frac{1}{F k_x}; \quad \Psi_1 = (\Psi + y) \frac{1}{F k_y}, \quad (4)$$

где $F$ — площадь поперечного сечения,

$k_x$, $k_y$ — коэффициенты формы поперечного сечения при сдвиге в направлениях $x$ и $y$.

Функции $\varphi$, $\chi_1$ и $\Psi_1$ определяются вариационными уравнениями [4]:

$$\delta \iint_F \left[ \left( \frac{\partial \varphi}{\partial x} + y - y_s \right)^2 + \left( \frac{\partial \varphi}{\partial y} - x + x_s \right)^2 \right] dF = 0;$$

$$\delta \iint_F \left[ \left( \frac{\partial \chi_1}{\partial x} \right)^2 + \left( \frac{\partial \chi_1}{\partial y} \right)^2 - \frac{\nu}{(1+\nu)\ I_y} \left( \frac{\partial \chi_1}{\partial x} \cdot \frac{x^2 - y^2}{2} + \frac{\partial \chi_1}{\partial y} xy \right) - \frac{2x}{I_y} \chi_1 \right] dF = 0;$$

$$\delta \iint_F \left[ \left( \frac{\partial \Psi_1}{\partial x} \right)^2 + \left( \frac{\partial \Psi_1}{\partial y} \right)^2 - \frac{\nu}{(1+\nu)\ I_x} \left( \frac{\partial \Psi_1}{\partial y} \cdot \frac{y^2 - x^2}{2} + \frac{\partial \Psi_1}{\partial x} xy \right) - \right.$$
$$\left. - \frac{2y}{I_x} \Psi_1 \right] dF = 0, \qquad (5)$$

где $I_x$, $I_y$ — главные центральные моменты инерции сечения.

Искомые функции представляются в виде рядов

$$\chi_1 = \sum_{i,j} A_{ij} X_{Aj}(x) Y_{Aj}(y); \quad \Psi_1 = \sum_{i,j} B_{ij} X_{Bi}(x) Y_{Bj}(y);$$
$$\varphi = \sum_{i,j} C_{ij} X_{Ci}(x) Y_{Cj}(y), \qquad (6)$$

и задача сводится к решению трех систем уравнений для определения варьируемых параметров $A_{ij}$, $B_{ij}$, $C_{ij}$. После этого становится возможным определить любые геометрические характеристики поперечного сечения.

Координаты центра изгиба согласно работам [2,4] можно вычислить по формулам:

$$y_s = \iint_F \left( \frac{\partial \chi_1}{\partial x} y - \frac{\partial \chi_1}{\partial y} x + \frac{\nu}{2(1+\nu) I_y} \frac{x^2 + y^2}{2} y \right) dF;$$

$$x_s = \iint_F \left( \frac{\partial \Psi_1}{\partial y} x - \frac{\partial \Psi_1}{\partial x} y + \frac{\nu}{2(1+\nu) I_x} \frac{y^2 + x^2}{2} x \right) dF. \qquad (7)$$

Коэффициенты формы поперечного сечения при пространственном сдвиге имеют вид [4]:

$$k_x = \left\{ F \iint_F \left[ \left( \frac{\partial \chi_1}{\partial x} \right)^2 + \left( \frac{\partial \chi_1}{\partial y} \right)^2 \right] dF \right\}^{-1};$$

$$k_y = \left\{ F \iint_F \left[ \left( \frac{\partial \Psi_1}{\partial x} \right)^2 + \left( \frac{\partial \Psi_1}{\partial y} \right)^2 \right] dF \right\}^{-1};$$

$$k_{xy} = F^2 k_x k_y \iint_F \left( \frac{\partial \chi_1}{\partial x} \cdot \frac{\partial \Psi_1}{\partial x} + \frac{\partial \chi_1}{\partial y} \cdot \frac{\partial \Psi_1}{\partial y} \right) dF. \qquad (8)$$

Функция $\varphi$ позволяет определить геометрическую жесткость бруса на кручение:

$$I_d=\iint\limits_F\left[\left(\frac{\partial\varphi}{\partial x}+y-y_s\right)^2+\left(\frac{\partial\varphi}{\partial y}-x+x_s\right)^2\right]dF. \qquad (9)$$

Определяются также все геометрические характеристики, используемые в современной теории стержней [4]:

$$F=\iint\limits_F dF;\ I_x=\iint\limits_F y^2dF;\ I_y=\iint\limits_F x^2dF;\ I_p=\iint\limits_F r_1^2\,dF;$$

$$I_{xr}=\iint\limits_F yr_1^2\,dF;\ I_{yr}=\iint\limits_F xr_1^2\,dF;\ I_r=\iint\limits_F r_1^4\,dF;\ S_\varphi=\iint\limits_F \varphi dF;$$

$$I_\varphi=\iint\limits_F \varphi^2\,dF;\ I_{x\varphi}=\iint\limits_F x\varphi\,dF;\ I_{y\varphi}=\iint\limits_F y\varphi dF;\ I_{r\varphi}=\iint\limits_F r_1^2\,\varphi\,dF;$$

$$r_1^2=(x-x_s)^2+(y-y_s)^2. \qquad (10)$$

Координаты центра изгиба определяются по формулам Власова В. З. [1] и Джанелидзе Г. Ю. [3], что дает возможность судить о надежности получаемых результатов. По упрощенной формуле Власова В. З. определяется жесткость на кручение.

Определение геометрических характеристик запрограммировано для ЭЦВМ М-20 и БЭСМ-3М. Координаты профиля поперечного сечения могут быть заданы в произвольной прямоугольной системе координат с произвольным переменным шагом. Предусмотрена возможность изменения координатных функций в рядах (6). Определение характеристик ряда сечений (до 10) происходит автоматически.

Расчет характеристик одного сечения занимает около 35 сек. машинного времени.

## ЛИТЕРАТУРА


1. Власов В. З. Тонкостенные упругие стержни. М., Физматгиз, 1959.
2. Воробьев Ю. С. Изгиб стержня с учетом депланации поперечного сечения при сдвиге и кручении. В сб.: «Динамика и прочность машин». Изд-во Харьковского ун-та, 1965, вып. 1.
3. Джанелидзе Г. Ю. Определение координат центра жесткости по различным функциям напряжения при кручении. В сб.: «Динамика и прочность машин». Труды ЛПИ, Машгиз, 1963, вып. 226.
4. Филлипов А. П., Булгаков В. Н., Воробьев Ю. С., Кантор Б. Я., Марченко Г. А. Численные методы в прикладной теории упругости. Киев, изд-во «Наукова думка», 1968.