В. А. УФИМКИНА, В. Г. ШАХОВ

ОБ «АВТОМОДЕЛЬНОСТИ» ДВИЖЕНИЯ В НЕСЖИМАЕМОМ ТУРБУЛЕНТНОМ ПОГРАНИЧНОМ СЛОЕ

В [1—3] предлагается метод решения дифференциальных уравнений в частных производных для турбулентного пограничного слоя. Для оценки точности этих методов можно было бы использовать «автомодельные» турбулентные движения в пограничном слое.

Ниже делается попытка установления условий существования подобных решений дифференциальных уравнений турбулентного пограничного слоя при использовании гипотезы Прандтля о связи между турбулентным касательным напряжением и осредненной скоростью, а также некоторого предположения о характере изменения длины пути перемешивания.

Дифференциальные уравнения движения в плоском турбулентном пограничном слое несжимаемой жидкости имеют вид

$$u\frac{\partial u}{\partial x} + v\frac{\partial u}{\partial x} = -\frac{1}{\rho}\frac{dp}{dx} + \frac{1}{\rho}\frac{\partial \tau}{\partial y}; \qquad (1)$$

$$\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial y} = 0. \qquad (2)$$

Здесь u и v — составляющие скорости в направлении осей x и y прямоугольной системы координат; ось x направлена вдоль поверхности обтекаемого тела; ось y — по нормали к ней; τ — напряжение трения в пограничном слое; p — давление; ρ — плотность.

Скорость внешнего потока U должна удовлетворять уравнению Эйлера, которое для рассматриваемого случая записывается

$$U\frac{dU}{dx} = -\frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial x}. \qquad (3)$$

Из (1)—(3) следует:

$$u\frac{\partial u}{\partial x}+v\frac{\partial u}{\partial y}=UU'+\frac{1}{\rho}\frac{\partial\tau}{\partial y};\qquad(4)$$

$$\frac{\partial u}{\partial x}+\frac{\partial v}{\partial y}=0.$$

Здесь штрих означает дифференцирование по x. Граничные условия:

$$u=v=0 \text{ при } y=0;\quad u=U \text{ при } y\to\infty.\qquad(5)$$

Турбулентные касательные напряжения τ в уравнении (4), используя формулу Прандтля [4], представим в виде

$$\tau=\mu\frac{\partial u}{\partial y}+\rho l^2\left(\frac{\partial u}{\partial y}\right)^2,\qquad(6)$$

где l — длина пути перемешивания, которую можно аппроксимировать формулой [5]—[7]

$$l=ky^n\exp\left(-A\frac{y}{\delta}\right).\qquad(7)$$

Здесь A, n, k — постоянные; δ — толщина пограничного слоя.

При автомодельном движении распределение скоростей в направлении, перпендикулярном стенке, можно выразить единым профилем, отличающимся в различных точках только масштабами. Тогда скорость «автомодельного» пограничного слоя

$$u=U\varphi'(\eta).\qquad(8)$$

Здесь штрих означает дифференцирование по η

$$\eta=yg(x),\qquad(9)$$

где $g(x)$ — некоторая функция x.

Используя (2), (8) и (9), получаем соотношение для поперечной составляющей скорости в пограничном слое

$$v=\frac{U'}{g}\varphi-[\varphi'\eta-\varphi]\frac{U}{g^2}g'.\qquad(10)$$

Подставляя (8), (10), (6) в (4) и (5), приведем их к виду:

$$\varphi'''+\frac{k^2}{\nu}Ug^{1-2n}\left[\eta^{2n}\exp\left(-2A\frac{\eta}{\gamma}\right)\varphi''^2\right]'+$$

$$+\varphi''\varphi\left(\frac{U'}{\nu g^2}-\frac{Ug'}{\nu g^3}\right)-\varphi'^2\frac{U'}{\nu g^2}+\frac{U'}{\nu g^2}=0;\qquad(11)$$

$$\varphi'=\varphi=0 \text{ при } \eta=0;\quad \varphi'=1 \text{ при } \eta\to\infty,\qquad(12)$$

где γ — безразмерная толщина пограничного слоя.

Чтобы решение уравнения (11) было автомодельным, функция $\varphi(\eta)$ должна зависеть только от η. Следовательно, в уравнении (11) коэффициенты, стоящие при неизвестной функции $\varphi(\eta)$, должны быть постоянными, т. е. уравнение (11) сведется к обыкновенному дифференциальному уравнению относительно η. Введем следующие обозначения для этих коэффициентов:

$$C_1 = \frac{k^2}{\nu} U g^{1-2n}; \quad C_2 = \frac{U'}{\nu g^2}; \quad C_3 = \frac{U g'}{\nu g^3}. \tag{13}$$

Подставляя (13) в (11), получим

$$\varphi''' + C_1\left[\eta^{2n} \exp\left(-2A\frac{\eta}{\gamma}\right) \varphi''^2\right]' + \varphi'''\varphi(C_2 - C_3) - C_1(\varphi'^2 - 1) = 0. \tag{14}$$

Из первых двух уравнений (13) следует:

$$g = N_1 U^{-\frac{1}{1-2n}}; \quad U = x^{\frac{1-2n}{3-2n}} N_2; \quad N_1 = \left(\frac{C_1 \nu}{k^2}\right)^{\frac{1}{1-2n}};$$

$$N_2 = \left[\frac{1-2n}{3-2n}\left(\frac{C_1\nu}{k^2}\right)^{\frac{2}{1-2n}} \cdot C_2 \nu\right]^{\frac{1-2n}{3-2n}} \tag{15}$$

Из первого и третьего уравнений (13)

$$g = N_1 U^{-\frac{1}{1-2n}}; \quad U = x^{\frac{1-2n}{3-2n}} N_3; \quad N_3 = \left[-\frac{C_3 \nu (1-2n)^2}{3-2n}\left(\frac{C_1 \nu}{k^2}\right)^{\frac{2}{1-2n}}\right]^{\frac{1-2n}{3-2n}}. \tag{16}$$

Следовательно, чтобы течение в пограничном слое было автомодельным, распределение скорости U на внешней границе должно подчиняться степенному закону

$$U = c x^m, \text{ где } m = \frac{1-2n}{3-2n}. \tag{17}$$

Накладывая ограничения на n [7]

$$1 < n < 2, \tag{18}$$

получаем области изменения m

$$-\infty < m < -1; \quad 3 < m < +\infty.$$

Автомодельные течения «диффузорных» участков турбулентного пограничного слоя возможны при

$$1 < n < 1{,}5.$$

Соответственно для «конфузорных» с учетом ограничения (18)

$$1{,}5 < n < 2.$$

Автомодельное течение на плоской пластине возможно при расширении значений n в (18) до $n = 0{,}5$.

Отметим, что случай $m = -1$, $n = 1$ рассмотрен в [8] при несколько другой форме аппроксимации длины пути перемешивания (7).

ЛИТЕРАТУРА

1 D. B. Spalding Theories of the Turbulent Boundary Layer. Applied Mechanics Review. Vol. 20 1967 pp 735-740.

2 C. L. Mellor and D. M. Gibson. Equilibrium Turbulent Boundary Layer, Journal of Fluid Mechanics Vol. 24 1966.

3. R. H. Pletcher. Qna Finite-Difference Solution for Constant-Property Turbulent Boundary Layer, AIAA journal №2 pp 305-311, 1969;

Русский перевод Плечер. О конечно разностном решении уравнений турбулентного пограничного слоя при течении жидкости с постоянными свойствами. «Ракетная техника и космонавтика», том 7, № 2, 1969.

4. Л. Г. Лойцянский. Механика жидкости и газа. Физматгиз, 1959.

5. И. К. Ротта. Турбулентный пограничный слой в несжимаемой жидкости «Судостроение», 1967.

6 I. A. Buyevich Bemer-Kung über die Konstruktion von Modellen für wandnahe Turbulenz. ZAMM, №6, 372-374, 1968.

7. I. O. Hinze Turbulence. An Introduction to its mechanism and theory. McGRAW-HINZE BOOK COMPANY INC, 1959; русский перевод И. О. Хинце. Турбулентность. Ее механизм и теория. Физматгиз, 1963.

8. B. E. Launder, F. C. Lockwood. An aspect of heat transfer in accelerating turbulent boundary layers. Trans ASME, №2, 229-234, 1969,