

4. Беляшен П. Н., Черненко Ж. С. Авиационные фильтры и очистители гидравлических систем. «Машиностроение», 1964.

5. Ужов В. Н., Мягков Б. И. Очистка промышленных газов фильтрами. М., «Химия», 1970.

В. И. БЫКОВ

О ВЛИЯНИИ ВЫНУЖДЕННЫХ КОЛЕБАНИЙ НА РЕЖИМЫ ВОЗНИКНОВЕНИЯ САМОВОЗБУЖДАЮЩИХСЯ КОЛЕБАНИЙ РОТОРА С ГИДРОСТАТИЧЕСКИМИ ПОДШИПНИКАМИ

Экспериментальные исследования колебаний роторов на гидростатических подшипниках показали, что при заданном перепаде давления на подшипниках (разности давлений подачи и слива) ротор до определенного числа оборотов совершает только вынужденные колебания с оборотной частотой. При увеличении оборотов выше некоторого определенного значения наряду с вынужденными колебаниями возникают колебания ротора с необоротной частотой, которые не связаны с действием на ротор внешних сил [1].

Таким образом, ротор на гидростатических подшипниках является системой, в которой возможно возникновение самовозбуждающихся колебаний. Возникновение самовозбуждающихся колебаний в системе можно рассматривать как потерю устойчивости движения ротора.

При длительной работе ротора с достаточно напряженными деталями, которые к тому же могут быть подвержены коррозии, из-за ползучести и коррозионного износа возможно увеличение дисбаланса ротора по сравнению с первоначальным. Поэтому актуальным становится вопрос о влиянии дисбаланса на режимы возникновения самовозбуждающихся колебаний ротора с гидростатическими подшипниками.

Существующие расчеты самовозбуждающихся колебаний роторов на гидростатических подшипниках [1, 2] основаны на методах теории малых колебаний и приводят к линейному рассмотрению устойчивости ротора с гидростатическими подшипниками. Поэтому они не могут быть использованы для исследования влияния вынужденных колебаний, которые вызываются

несбалансированностью ротора, на режимы возникновения самовозбуждающихся колебаний.

В настоящей работе рассматривается влияние вынужденных колебаний на самовозбуждающиеся колебания ротора с гидростатическими подшипниками при учете нелинейной зависимости восстанавливающей силы в гидростатическом подшипнике от перемещений шипа ротора относительно вкладыша подшипника.

Рассмотрим схему сил в гидростатическом подшипнике. Примем, что шип ротора смещен относительно оси подшипника на величину r , вращается со скоростью ω и центр шипа имеет относительно центра подшипника поступательную скорость v (рис. 1).

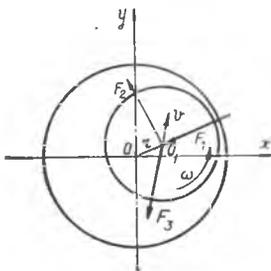


Рис. 1

При допущениях об отсутствии разрывов смазки, постоянстве вязкости, турбулентности и квазистационарности течений по всем элементам подшипника может быть составлена система уравнений, нелинейных относительно неизвестных давлений в камерах подшипника. Каждое из уравнений этой системы является уравнением баланса расхода для одной камеры подшипника. Решение системы уравнений отыскивается по методу Ньютона. Задача запрограммирована для счета на ЭЦВМ.

Решение задачи о силах в гидростатических подшипниках для удобства ищется в относительных величинах. Вводятся относительные величины:

$$\varepsilon = \frac{r}{\delta_0}; \quad V_0 = \frac{\omega D}{2V_+}; \quad v_0 = \frac{v}{V_+}; \quad \Theta = \frac{F}{\Delta p \cdot D \cdot L},$$

где δ_0 — величина радиального зазора в подшипнике;

D — диаметр подшипника;

F — величина размерной силы,

Δp — перепад давления на подшипнике;

$V_+ = \sqrt{\frac{2}{\rho} \Delta p}$ — характеристическая скорость, которую можно поставить в соответствии с перепадом давления на подшипнике;

ρ — плотность смазки;

$L = L_0 - l$ — приведенная длина подшипника;

L_0 — полная длина подшипника;

l — длина торцевой перемычки подшипника.

Уравнения, определяющие распределение давления в подшипнике, таковы, что безразмерные силы Θ в подшипнике зависят только от величин ε , V_0 и v_0 . Проведенные расчеты подшипников показали, что после перехода от относительных сил к размерным их величина в проекциях на оси координат x , y может быть записана в виде:

$$\begin{aligned} F_x &= -k_1 x [1 + \alpha_1 (x^2 + y^2)] - k_2 \omega y - k_3 \dot{x}; \\ F_y &= -k_1 y [1 + \alpha_1 (x^2 + y^2)] + k_2 \omega x - k_3 \dot{y}, \end{aligned} \quad (1)$$

где x , y , \dot{x} , \dot{y} — проекции перемещений и скоростей перемещений шипа относительно подшипника;

k_1 , α_1 , k_2 , k_3 — коэффициенты, которые могут быть приняты постоянными для некоторой области значений V_0 .

Перейдем к рассмотрению самовозбуждающихся колебаний жесткого, симметричного, несбалансированного ротора на гидростатических подшипниках.

Для лучшего выяснения физической сущности влияния вынужденных колебаний на режимы возникновения самовозбуждающихся колебаний ротора с гидростатическими подшипниками рассмотрим сначала простую схему невесомого жесткого ротора на гидростатических подшипниках с несбалансированным диском, расположенным в середине между опорами.

Если для записи сил в гидростатических подшипниках использовать выражение (1), то уравнения движения ротора можно записать в виде:

$$\begin{aligned} \ddot{x} + \omega_0^2 x [1 + \alpha_1 (x^2 + y^2)] + \delta_1 \omega y + \delta \dot{x} &= e \omega^2 \cos \omega t; \\ \ddot{y} + \omega_0^2 y [1 + \alpha_1 (x^2 + y^2)] - \delta_1 \omega x + \delta \dot{y} &= e \omega^2 \sin \omega t. \end{aligned} \quad (2)$$

Здесь введены обозначения:

$$\omega_0^2 = \frac{2k_1}{M}; \quad \delta_1 = \frac{2k_2}{M}; \quad \delta = \frac{2k_3}{M}.$$

M — масса ротора;

e — эксцентриситет диска.

Решение системы уравнений (2) будем искать в виде бигармонических колебаний [3]:

$$\begin{aligned} x &= x_0 + x_1 = a \cos \nu t + b \cos \omega t; \\ y &= y_0 + y_1 = a \sin \nu t + b \sin \omega t. \end{aligned} \quad (3)$$

Неизвестными здесь являются величины a , b и ν .

На режимах, достаточно далеких от резонансных, вынужденное движение системы $(x_1; y_1)$ может быть найдено из рассмотрения линейных консервативных частей уравнений (2):

$$\begin{aligned}\ddot{x}_1 + \omega_0^2 x_1 &= e \omega^2 \cos \omega t; \\ \ddot{y}_1 + \omega_0^2 y_1 &= e \omega^2 \sin \omega t,\end{aligned}\quad (4)$$

откуда
$$b = \frac{e \omega^2}{\omega_0^2 - \omega^2}.$$
 (5)

Подставив выражения (3) и (4) в уравнения (2), получим:

$$\begin{aligned}\ddot{x}_0 + \omega_0^2 x_0 + \omega_0^2 \kappa_1 (x^2 + y^2) x + \delta_1 \omega y + \delta \dot{x} &= 0; \\ \ddot{y}_0 + \omega_0^2 y_0 + \omega_0^2 \kappa_1 (x^2 + y^2) y - \delta_1 \omega x + \delta \dot{y} &= 0.\end{aligned}\quad (6)$$

Уравнения (6) перепишем в виде:

$$\begin{aligned}\ddot{x}_0 + \nu^2 x_0 &= \sum F_x; \\ \ddot{y}_0 + \nu^2 y_0 &= \sum F_y,\end{aligned}\quad (7)$$

где правые части уравнений равны:

$$\begin{aligned}\sum F_x &= (\nu^2 - \omega_0^2) x_0 - \omega_0^2 \kappa_1 (x^2 + y^2) x - \delta_1 \omega y - \delta \dot{x}; \\ \sum F_y &= (\nu^2 - \omega_0^2) y_0 - \omega_0^2 \kappa_1 (x^2 + y^2) y + \delta_1 \omega x - \delta \dot{y}.\end{aligned}\quad (8)$$

Подставив в правые части уравнений значения (3) и удерживая только члены с частотой ν , получим укороченные значения для правых частей:

$$\begin{aligned}\sum F_x &\simeq \{\nu^2 - \omega_0^2 [1 + \kappa_1 (a^2 + b^2)]\} a \cos \nu t + (\delta \nu - \delta_1 \omega) a \sin \nu t; \\ \sum F_y &\simeq \{\nu^2 - \omega_0^2 [1 + \kappa_1 (a^2 + b^2)]\} a \sin \nu t - (\delta \nu - \delta_1 \omega) a \cos \nu t.\end{aligned}$$

Тогда уравнения установления колебаний, в соответствии с [3], получим в виде:

$$\begin{aligned}a \{\nu^2 - \omega_0^2 [1 + \kappa_1 (a^2 + b^2)]\} &= 0; \\ \frac{da}{dt} &= -\frac{a}{2\nu} (\delta \nu - \delta_1 \omega).\end{aligned}\quad (9)$$

При наличии в системе колебаний с частотой ν $a \neq 0$ и из (9) имеем

$$\begin{aligned}\nu^2 &= \omega_0^2 [1 + \kappa_1 (a^2 + b^2)]; \\ \frac{da}{dt} &= -\frac{a}{2\nu} (\delta \nu - \delta_1 \omega).\end{aligned}\quad (10)$$

Стационарные амплитуды колебаний могут быть найдены из условия $\frac{da}{dt} = 0$, а устойчивость стационарных амплитуд может быть исследована с помощью второго уравнения системы (10). Границе самовозбуждения соответствует случай $a \simeq \frac{da}{dt} \simeq 0$, из (10) получим обороты возникновения самовозбуждающихся колебаний несбалансированного ротора с гидростатическими подшипниками:

$$\omega_c = \frac{\delta}{\delta_1} \nu; \quad \nu^2 = \omega_0^2 (1 + \kappa_1 b^2). \quad (11)$$

Из уравнений (11) видно, что влияние амплитуды вынужденных колебаний на режимы возникновения самовозбуждающихся колебаний зависит от знака коэффициента κ_1 . Если $\kappa_1 > 0$ (жесткая характеристика), то при больших амплитудах вынужденных колебаний самовозбуждающиеся колебания возникнут на больших оборотах и их частота будет выше. При $\kappa_1 < 0$ (мягкая характеристика) увеличение амплитуды вынужденных колебаний приводит к снижению частоты и оборотов возникновения самовозбуждающихся колебаний.

Рассмотрим самовозбуждающиеся колебания несбалансированного ротора на гидростатических подшипниках с произвольным распределением массы и жесткости по длине ротора. Примем прямоугольную систему координат x, y, z . Ось z совпадает с осями гидростатических подшипников, которые расположены в сечениях z_1 и z_2 . Изменение массы, жесткости и эксцентриситета масс по длине ротора определяется заданными функциями $EI(z)$, $m(z)$, $e(z)$.

Силы, действующие на ротор в каждом из подшипников, могут быть записаны в виде (I). При составлении дифференциальных уравнений движения неконсервативные силы и нелинейные части консервативных сил, действующих на ротор в гидростатических подшипниках, вводятся в уравнения движения, а линейные части выражений для восстанавливающих сил определяют граничные условия по опорам ротора.

Проекции смещений оси ротора на оси координат x и y определяются функциями $u(z, t)$ и $w(z, t)$.

С учетом принятых допущений уравнения движения рассматриваемого ротора могут быть записаны в виде:

$$\frac{\partial^2}{\partial z^2} \left[EI(z) \frac{\partial^2 u(z_1, t)}{\partial z^2} \right] + m(z) \frac{\partial^2 u(z_1, t)}{\partial t^2} + \omega [k_2(z_1) w(z_1, t) +$$

$$\begin{aligned}
& + k_2(z_2) w(z_2, t) + k_3(z_1) \frac{\partial u(z_1, t)}{\partial t} + k_3(z_2) \frac{\partial u(z_2, t)}{\partial t} + k_1(z_1) x_1(z_1) \times \\
& \times [u^2(z_1, t) + w^2(z_1, t)] u(z_1, t) + k_1(z_2) x_1(z_2) [u^2(z_2, t) + \\
& + w^2(z_2, t)] u(z_2, t) = \omega^2 m(z) e(z) \cos \omega t; \\
& \frac{\partial^2}{\partial z^2} \left[EI(z) \frac{\partial^2 w(z_1, t)}{\partial z^2} \right] + m(z) \frac{\partial^2 w(z_1, t)}{\partial t^2} - \omega [k_2(z_1) u(z_1, t) + \\
& + k_2(z_2) u(z_2, t)] + k_3(z_1) \frac{\partial w(z_1, t)}{\partial t} + k_3(z_2) \frac{\partial w(z_2, t)}{\partial t} + k_1(z_1) x_1(z_1) \times \\
& \times [u^2(z_1, t) + w^2(z_1, t)] w(z_1, t) + k_1(z_2) x_1(z_2) [u^2(z_2, t) + w^2(z_2, t)] \times \\
& \times w(z_2, t) = \omega^2 m(z) e(z) \sin \omega t. \quad (12)
\end{aligned}$$

Уравнения (12) решаются при следующих граничных условиях:

$$\begin{aligned}
R_x(z_i, t) &= -k_1(z_i) u(z_i, t); \\
R_y(z_i, t) &= -k_1(z_i) w(z_i, t) \quad (i=1, 2). \quad (13)
\end{aligned}$$

Решение уравнений (12), как и в случае простейшего ротора, ищем в виде суммы самовозбуждающихся и вынужденных колебаний:

$$\begin{aligned}
u(z_1, t) &= u_0(z_1, t) + u_1(z_1, t); \\
w(z_1, t) &= w_0(z_1, t) + w_1(z_1, t). \quad (14)
\end{aligned}$$

На режимах, достаточно удаленных от резонансных частот, части решений u_1 и w_1 , описывающие вынужденные колебания, могут быть найдены из рассмотрения линейной консервативной части уравнений (12)

$$\begin{aligned}
\frac{\partial^2}{\partial z^2} \left[EI(z) \frac{\partial^2 u_1(z_1, t)}{\partial z^2} \right] + m(z) \frac{\partial^2 u_1(z_1, t)}{\partial t^2} &= m(z) e(z) \omega^2 \cos \omega t; \\
\frac{\partial^2}{\partial z^2} \left[EI(z) \frac{\partial^2 w_1(z_1, t)}{\partial z^2} \right] + m(z) \frac{\partial^2 w_1(z_1, t)}{\partial t^2} &= m(z) e(z) \omega^2 \sin \omega t. \quad (15)
\end{aligned}$$

с граничными условиями (13).

Решение уравнений (15) может быть найдено, например, в виде разложения в ряд по собственным функциям [2,3]:

$$\begin{aligned}
u_1(z_1, t) &= b(z) \cos \omega t; \\
w_1(z_1, t) &= b(z) \sin \omega t;
\end{aligned}$$

$$b(z) = \sum_{k=1}^n \frac{\omega^2 \int_0^e m(z) e(z) y_k(z) dz}{(\omega_k^2 - \omega^2) \int_0^e m(z) y_k^2(z) dz} \cdot y_k(z), \quad (16)$$

где ω_k и $y_k(z)$ — k -е собственные частоты и формы колебаний ротора, определяемые из решения однородных уравнений, соответствующих уравнениям (15).

В выражении для суммы берется такое число членов n , чтобы

$$\omega_n < \omega < \omega_{n+1}.$$

При близости ω к k -й резонансной частоте величины u_1 и ω_1 могут быть приближенно определены из рассмотрения одночастотного режима колебаний при допущении, что на этих режимах форма вынужденных колебаний будет соответствовать k -й собственной форме колебаний [4]. При этом допущении амплитуда вынужденных колебаний легко определяется как для системы с одной степенью свободы. Решение на этих режимах будем искать в виде:

$$\begin{aligned} u_1(z_1 t) &= b_k y_k(z) \cos(\omega t + \varphi_k); \\ \omega_1(z_1 t) &= b_k y_k(z) \sin(\omega t + \varphi_k). \end{aligned} \quad (17)$$

Подставляя это решение в уравнения (12) и вводя обозначения

$$a_k = b_k \sin \varphi_k,$$

$$c_k = b_k \cos \varphi_k,$$

после приравнивания членов при $\sin \omega t$ и $\cos \omega t$ получим:

$$\begin{aligned} \frac{d^2}{dz^2} \left[EI(z) \frac{d^2 y_k(z)}{dz^2} \right] a_k - a_k \omega^2 m(z) y_k(z) - \omega c_k \{ [k_3(z_1) - k_2(z_1)] y_k(z_1) + \\ + [k_3(z_2) - k_2(z_2)] y_k(z_2) \} + a_k b_k^2 [k_1(z_1) x_1(z_1) y_k^3(z_1) + \\ + k_1(z_2) x_1(z_2) y_k^3(z_2)] = \omega^2 m(z) e(z); \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \frac{d^2}{dz^2} \left[EI(z) \frac{d^2 y_k(z)}{dz^2} \right] c_k - c_k \omega^2 m(z) y_k(z) + \omega a_k \{ [k_3(z_1) - k_2(z_1)] y_k(z_1) + \\ + [k_3(z_2) - k_2(z_2)] y_k(z_2) \} + c_k b_k^2 [k_1(z_1) x_1(z_1) y_k^3(z_1) + \\ + k_1(z_2) x_1(z_2) y_k^3(z_2)] = 0. \end{aligned} \quad (18)$$

Умножая оба уравнения (18) на $y_k(z)$ и интегрируя по всей длине ротора, получим два уравнения, из которых можно найти

$$b_k = \frac{\omega F_k}{V \left[\omega_k^2(b) - \omega^2 \right]^2 - \sigma_k^2 \omega^2}, \quad (19)$$

где

$$F_k = \frac{\int_0^e m(z) e(z) y_k(z) dz}{\int_0^e m(z) y_k^2(z) dz};$$

$$\alpha_k = \frac{[k_3(z_1) - k_2(z_1)] y_k^2(z_1) + [k_3(z_2) - k_2(z_2)] y_k^2(z_2)}{\int_0^e m(z) y_k^2(z_1) dz};$$

$$\omega_k^2(b) = \omega_k^2 + b^2 \Omega_k^2; \quad \Omega_k^2 = \frac{k_1(z_1) \chi_1(z_1) y_k^4(z_1) + k_1(z_2) \chi_1(z_2) y_k^4(z_2)}{\int_0^e m(z) y_k^2(z) dz}.$$

При рассмотрении самовозбуждающихся колебаний принимаем, что на границе устойчивой работы их форма близка к первой собственной форме колебаний ротора соответствующей линейной консервативной системы. Часть решения u_0 , w_0 , соответствующую самовозбуждающимся колебаниям системы, будем искать в виде:

$$\begin{aligned} u_0(z, t) &= a y_1(z) \cos vt; \\ w_0(z, t) &= a y_1(z) \sin vt. \end{aligned} \quad (20)$$

Подставляя (20) и значения u_1 , w_1 из (16) или (19) в исходные уравнения (11), получим уравнения установления колебаний, как для системы с одной степенью свободы:

$$a \left[\begin{aligned} &k_1(z_1) \chi_1(z_1) [a^2 y_1^2(z_1) + b^2(z_1)] y_1^2(z_1) + \\ &+ k_1(z_2) \chi_1(z_2) [a^2 y_1^2(z_2) + b^2(z_2)] y_1^2(z_2) \\ &\frac{\int_0^e m(z) y_1^2(z) dz}{v^2 - \omega_1^2} \end{aligned} \right] = 0; \quad (21)$$

$$\frac{da}{dt} = - \frac{a}{2v} \frac{[k_3(z_1) y_1^2(z_1) + k_3(z_2) y_1^2(z_2)] - \omega [k_2(z_1) y_1^2(z_1) + k_2(z_2) y_1^2(z_2)]}{\int_0^e m(z) y_1^2(z) dz}.$$

Так как на границе устойчивости $a \simeq \frac{da}{dt} \simeq 0$, то для определения условий самовозбуждения получим уравнения:

$$v_1^2 = \omega_1^2 + \frac{k_1(z_1) \chi_1(z_1) b^2(z_1) y_1^2(z_1) + k_1(z_2) \chi_1(z_2) b^2(z_2) y_1^2(z_2)}{\int_0^e m(z) y_1^2(z) dz};$$

$$\frac{\omega}{\nu} = \frac{k_3(z_1) y_1^2(z_1) + k_3(z_2) y_1^2(z_2)}{k_2(z_1) y_1^2(z_1) + k_2(z_2) y_1^2(z_2)} \quad (22)$$

Из выражений (22) следует, что величина отношения скорости вращения ротора, при которой возникают самовозбуждающиеся колебания, к их частоте на границе устойчивости, не зависит от амплитуды вынужденных колебаний. Влияние вынужденных колебаний на самовозбуждающиеся колебания ротора с гидростатическими подшипниками проявляется через изменение частоты самовозбуждающихся колебаний при изменении амплитуды вынужденных колебаний. Характер этого влияния определяется знаками коэффициентов $\kappa_1(z_1)$ и $\kappa_1(z_2)$.

Полученные теоретические выводы хорошо согласуются с экспериментальными результатами исследования самовозбуждающихся колебаний ротора на гидростатических подшипниках при различной его разбалансировке.

Режимы возникновения самовозбуждающихся колебаний ротора с гидростатическими подшипниками определялись экспериментально при значениях введенного дисбаланса, которые превосходят остаточный дисбаланс в 4,5 и 9 раз. Экспериментально установлено, что величина отношения $(\frac{\omega}{\nu})$ на границе самовозбуждения не зависит от величины введенного дисбаланса. Частота самовозбуждающихся колебаний при введении дисбаланса, превышающего остаточный в 4,5 раза, уменьшается на 3,7%, а при введении дисбаланса, превышающего остаточный в 9 раз, — на 13%. Расчетное снижение частоты самовозбуждающихся колебаний при указанных значениях введенного дисбаланса получается равным 2% и 7% соответственно.

ВЫВОДЫ

Проведенный анализ влияния вынужденных колебаний на самовозбуждающиеся колебания роторов с гидростатическими подшипниками при учете нелинейной зависимости восстанавливающей силы в подшипниках от перемещений шипа показал, что характер этого влияния зависит от вида характеристики восстанавливающей силы. При жесткой характеристике восстанавливающей силы увеличение амплитуды вынужденных колебаний расширяет диапазон устойчивой работы, а при мягкой — сужает.

Влияние вынужденных колебаний на самовозбуждающиеся колебания ротора с гидростатическими подшипниками проявляется внешне через изменение частоты самовозбуждающихся колебаний. Отношение скорости вращения ротора, при которой возникают самовозбуждающиеся колебания, к частоте самовозбуждающихся колебаний на границе устойчивости не зависит от амплитуды вынужденных колебаний.

Полученные теоретические выводы хорошо согласуются с имеющимися экспериментальными данными.

ЛИТЕРАТУРА

1. Ямпольский И. Д., Пируев Е. В. Несущая способность и устойчивость четырехкамерного гидростатического подшипника. Энергомашиностроение, 1966, № 6.
2. Малаховский Е. Е. Устойчивость и вынужденные колебания роторов на гидростатических подшипниках. Машиноведение, 1967, № 1.
3. Теодорчик К. Ф. Автоколебательные системы. Изд. 2-е, Гостехиздат, 1948.
4. Боголюбов Н. Н., Митропольский Ю. А. Асимптотические методы в теории нелинейных колебаний. Изд. 2-е. Физматгиз, 1958.

Ю. А. ВОЛКОВ

ОПРЕДЕЛЕНИЕ АМПЛИТУД ВЫНУЖДЕННЫХ КОЛЕБАНИЙ ВРАЩАЮЩЕГОСЯ РОТОРА НА ГИДРОСТАТИЧЕСКИХ ПОДШИПНИКАХ

Применение в быстроходных энергетических машинах в качестве опор роторов гидростатических подшипников выдвинуло задачу определения расчетным путем амплитуд вынужденных колебаний вращающегося ротора на нелинейных упруго-демпферных опорах.

Не останавливаясь подробно на вопросах схематизации, заметим, что гидростатический подшипник можно представить в виде нелинейной опоры с заданной упругой характеристикой и коэффициентом демпфирования.

Процессы в системах с нелинейными элементами выражаются, как известно, нелинейными дифференциальными уравнениями. Регулярные методы их решения отсутствуют, поэтому каждая задача решается тем или иным приближенным способом.