

Ф. Ф. СИМАКОВ

О ВЛИЯНИИ МЕЖДУЧАСТИЧНОГО ТРЕНИЯ НА ПРОЧНОСТЬ И ВИБРОПРОЧНОСТЬ КРУТИЛЬНОЙ СИСТЕМЫ

Междучастичное трение в деформируемом объеме воспринимает часть внешней нагрузки, уменьшая деформацию и увеличивая прочность технического сооружения. Кроме того, внутреннее и внешнее трение заглушает колебания, оказывая этим влияние на вибропрочность колеблющейся системы.

Для исследования колебаний систем и устранения в них резонансов, вызывающих напряжения, иногда превосходящие допускаемые, требуется знать закономерность изменения сил междучастичного трения в зависимости от деформации и скорости смен ее циклов.

Так как внутренним трением обуславливается несовпадение линий нагружения и разгружения системы, то изучение изменения этих диссипативных сил можно производить не только по кривым затухающих колебаний, но и по диаграммам «напряжение — деформация».

С этой целью произведено испытание на кручение тринадцати круглых образцов разных размеров с разными переходными контурами и тридцати трех коленчатых валов различных конструкций. На основании полученных при этом диаграмм кручения установлены закономерности изменения момента междучастичного трения, крутильной жесткости и модуля упругости второго рода в зависимости от деформации.

ИССЛЕДОВАНИЕ РЕЗУЛЬТАТОВ ИСПЫТАНИЯ

На основании закона сохранения энергии соотношение между работой внешних сил Z сил упругости Z_y и работой междучастичного трения Z_t при медленном нагружении образца может быть выражено следующим уравнением:

$$L + L_y + L_t = 0, \quad (1)$$

откуда

$$L = -(L_y + L_t).$$

Для идеального материала

$$L_t = 0 \text{ и } L = -L_y.$$

Из уравнения (1) следует, что при медленном нагружении момент внешних сил M_n уравнивается моментами сил упругости M_y и сил междучастичного трения M_t , т. е.

$$M_n = M_{yn} + M_{tn} = M_{yn}(1 + \mu_{tn}), \quad (3)$$

где $\mu_{tn} = \frac{M_{tn}}{M_{yn}}$ — коэффициент междучастичного трения при нагружении.

Для разгрузки

$$M_p = M_{yp} - M_{tp} = M_{yp}(1 - \mu_{tp}). \quad (4)$$

Деля уравнение (3) и (4) на один и тот же угол кручения φ , получим кажущиеся крутильные жесткости:

для нагружения

$$c_n = c_{yn} + c_{tn} = c_{yn}(1 + \mu_{tn}), \quad (5)$$

для разгрузки

$$c_p = c_{yp} - c_{tp} = c_{yp}(1 - \mu_{tp}). \quad (6)$$

Вследствие множества и беспорядочности расположения зерен в объеме деформируемого металла при любом угле кручения в пределах упругости можно считать вероятным следующие равенства:

$$M_{yn} = M_{yp} = M_y; \quad M_{tn} = M_{tp} = M_t;$$

$$c_{yn} = c_{yp} = c_y; \quad c_{tn} = c_{tp} = c_t;$$

$$\mu_{tn} = \mu_{tp} = \mu_t = \frac{M_t}{M_y} = \frac{c_t}{c_y}; \quad \frac{c_n}{c_p} = \frac{1 + \mu_t}{1 - \mu_t}$$

$$M_n - M_p = M_{yn} - M_{yp} \quad M_{tn} + M_{tp} = 2M_t.$$

Из последнего уравнения момент междучастичного трения

$$M_t = \frac{M_n - M_p}{2}. \quad (7)$$

Опытами установлено, что при нагрузке в пределах упругости в первых четырех циклах нагружения момент междучастичного трения M_t практически не зависит от деформации, а при многократно повторяющейся нагрузке после десятого-одиннадцатого циклов

$$M_t = M_{t_{\max}} = \frac{\varphi}{\varphi_{\max}} = C_1 \varphi = \mu_2 C_y \varphi. \quad (8)$$

Кажущаяся крутильная жесткость скручиваемой части стержня:
для нагружения от нуля до M

$$c_{н} = \frac{\mu}{\varphi} = \frac{M_y + M_t}{\varphi} = c_y + c_t = c_y (1 + \mu_2), \quad (9)$$

для нагружения от M_0 до M

$$c_{н} = \frac{M - M_0}{\varphi - \varphi_0} = \frac{M_{ун} + M_t - (M_{y0} + M_{t0})}{\varphi - \varphi_0}. \quad (10)$$

Для первых четырех циклов нагружения в пределах упругости

$$M_{t0} = M_t = \text{const},$$

поэтому

$$c_{н} = \frac{M_{ун} - M_{ун}}{\varphi - \varphi_0} = c_y. \quad (11)$$

В этом случае величина $c_{н} = c_y$ представляет собой действительную крутильную жесткость деформируемой части образца при его нагружении от M_0 до M .

Истинная крутильная жесткость, получающаяся при деформации на очень малый угол $\Delta\varphi_i = \varphi_i - \varphi_{i-1}$ будет:

для нагружения

$$c_{ин} = \frac{M_{yi} + M_{ti} - M_{yi-1} - M_{ti-1}}{\Delta\varphi_i}, \quad (12)$$

для разгружения

$$c_{ип} = \frac{M_{yi} - M_{ti} - M_{yi-1} + M_{ti-1}}{\Delta\varphi_i}, \quad (13)$$

при $M_t = \text{const}$.

$$c_{ин} = c_{ип} = c_{yn} = \frac{M_{yi} - M_{yi-1}}{\Delta\varphi_i}. \quad (14)$$

ЗАВИСИМОСТЬ МЕЖДУ НАПРЯЖЕНИЕМ И ДЕФОРМАЦИЕЙ СКРУЧИВАЕМОГО КРУГОВОГО СТЕРЖНЯ

Кажущееся касательное напряжение состоит из действительного τ_y , соответствующего потенциальным силам упругости, и диссипативного τ_t , обуславливаемого силами междучастичного трения, т. е.

$$\tau = \tau_y + \tau_t. \quad (15)$$

Для волокон, расположенных на расстоянии r от продольной оси стержня

$$\tau_y = \tau_{yn} \left(\frac{r}{r_n} \right)^n,$$

где τ_{tn} — напряжение внешних волокон, соответствующее потенциальным силам;

r — радиус наружной поверхности круглого стержня;

n — показатель кривой распределения рассматриваемых напряжений в его поперечном сечении.

При этом удельная сила междучастичного трения

$$\tau_l = \tau_{ln} \left(\frac{r}{r_n} \right)^m,$$

где τ_{ln} — удельная сила внутреннего трения внешних волокон расположенных на радиусе r ;

m — показатель кривой распределения удельных сил внутреннего трения в поперечном сечении скручиваемого стержня

В области малых напряжений, ниже одной десятой от предела упругости, а также в области текучести сила междучастичного трения, как показывают опыты, практически не зависит от напряжения, что соответствует $m = 0$ и $\tau_l = \tau_{ln}$.

При деформации в пределах упругости элементарный момент

$$dM = 2\pi r^2 \tau dr = 2\pi r^2 \left[\tau_{ln} \left(\frac{r}{r_n} \right)^n + \tau_{ln} \left(\frac{r}{r_n} \right)^m \right] dr.$$

После интегрирования

$$M = M_y + M_t = \frac{4}{n+3} \omega_0 \tau_{yn} + \frac{4}{m+3} \omega_0 \tau_{ln} = \tau_{yn} \omega_0 \xi_n = \tau \omega_0, \quad (16)$$

где $\omega_0 = \frac{\pi r^3}{2}$ — полярный момент сопротивления поперечного сечения круглого образца;

$\tau = \tau_{ln}$ — кажущееся напряжение его внешних волокон;

$M_y = \frac{4}{n+3} \tau_{yn} \omega_0$ — момент сил упругости;

$M_t = \frac{4}{m+3} \tau_{ln} \omega_0 = \mu_r c_y \Phi$ — момент сил междучастичного трения;

$$\xi_n = \frac{\tau}{\tau_{yn}} = \frac{G}{G_y} = \frac{4}{n+3} \left(1 + \frac{n+3}{m+3} \frac{\tau_{ln}}{\tau_{yn}} \right).$$

Согласно равенству (16) действительное напряжение внешних волокон

$$\tau_{yn} = \frac{\tau}{\xi_n} = \frac{M}{\omega_0 \xi_n}. \quad (17)$$

Опытами установлено, что распределение кажущихся напряжений в поперечном сечении круглого стержня приблизительно выражается уравнением:

$$\tau_r = \tau_n \frac{r}{r_n}. \quad (18)$$

По формуле (15)

$$\tau_r = \tau_{yn} \left(\frac{r}{r_n} \right)^n + \tau_{ln} \left(\frac{r}{r_n} \right)^m. \quad (19)$$

Из сравнения (18) и (19) $n = m = 1$.

При кручении элементарного цилиндра длиной dx на угол $d\varphi$ угол сдвига внешних волокон

$$\gamma_{\text{н}} = \frac{r_{\text{н}} d\varphi}{dx}. \quad (20)$$

Если G_y — действительный модуль упругости второго рода, соответствующий потенциальным силам упругости, то

$$\tau_{\text{н}} = \frac{\bar{\tau}_{\text{н}}}{G_y}. \quad (21)$$

Из уравнения (20) и (21) элементарный угол кручения

$$d\varphi = \frac{\tau_{\text{н}} dx}{G_y r_{\text{н}}}. \quad (22)$$

После интегрирования в пределах изменения x от нуля до l

$$\varphi = \frac{\bar{\tau}_{\text{н}} l}{G_y r_{\text{н}}} = \frac{\tau}{G} \frac{l}{r_{\text{н}}}.$$

Используя равенство (16), будем иметь

$$\varphi = \frac{Ml}{\omega_0 r_{\text{н}} \bar{\tau}_{\text{н}} G_y} = \frac{Ml}{I_p G} = \frac{M}{C}, \quad (23)$$

где $I_p = \omega_0 r_{\text{н}}^2$ — полярный момент инерции поперечного сечения круглого стержня;
 l — длина скручиваемой его части;
 $G = \xi_0 c_y$ — кажущийся модуль упругости;
 $c = \frac{GI_p}{l} = c_2 + c_1 = \frac{M}{\varphi}$ — кажущаяся крутильная жесткость скручиваемой части образца.

Элементарная потенциальная энергия кручения

$$dV_y = M_y d\varphi = c_y \varphi d\varphi.$$

После интегрирования при $c_y = \text{const}$,

$$V_y = c_y \frac{\varphi^2}{2}. \quad (24)$$

Имея равенства (16) и (23) формулу (24) можно представить в следующем виде:

$$V_y = \frac{\tau^2 \pi r^2 l}{4G(1 + \nu_1)}.$$

Потенциальная энергия кручения, отнесенная к $l \text{ см}^3$ скручиваемой части круглого стержня.

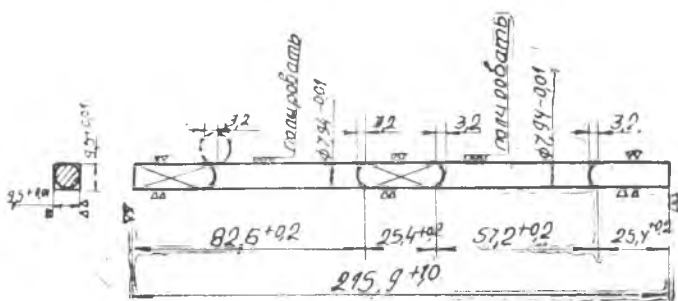
ИССЛЕДОВАНИЕ КОЛЕБАНИЙ КРУТИЛЬНОГО АППАРАТА И ОПРЕДЕЛЕНИЕ МОДУЛЯ КРУЧЕНИЯ

Крутильный аппарат фирмы Кембридж и К, использованный для исследования внутреннего трения, представляет собой систему с двумя степенями свободы.

Упругое звено в этом аппарате представляет испытуемый образец, изображенный на фиг. 1. Квадратные концы этого образца закреплены в зажимах рамы аппарата, а на среднем квадрате образца закреплена поперечина с шаровыми грузами. При угловом смещении поперечины относительно рамы с помощью микрометрического винта и клина производится закрутка образца на желаемый угол, после чего клин осторожно выдергивается и система, предоставленная самой себе, совершает затухающие колебания.

Получающиеся при этом угловые смещения поперечины относительно рамы записываются пишущим механизмом на вращающемся целлулоидном диске.

В процессе этих колебаний деформируется два участка образца. Длина каждого из этих участков $l = 57,2$ мм, а диаметр $d = 7,94$ мм приведенная длина одного участка $l_0 = l + 0,4d = 60,38$ мм. Полярный момент инерции площади поперечного сечения скручиваемой



Фиг. 1. Определение рассеивания энергии в деформируемом материале.

○—○—○ по виброграммам затухающих колебаний нормализованной стали 45.

×—×—× по результатам статического испытания.

части $I_p = 0,387$ см⁴. Действительная крутильная жесткость колеблющейся системы

$$c_y = 2 \frac{GI_0}{l_0 (1 + \mu_T)} = 0,01213 \frac{G}{1 + \mu_T}, \quad (26)$$

где кажущийся модуль упругости материала определяется по данным нагружения образца.

Длина поперечины с маховыми массами $L = 264$ мм.

Момент инерции ее массы вместе с испытуемым образцом относительно оси последнего

$$I_1 = 0,242 \text{ кг} \cdot \text{см} \cdot \text{сек}^2.$$

Момент инерции массы рамы относительно оси закрепленного в ней образца $I_2 = 0,378$ кг·см·сек.

Если для выражения момента внутреннего трения воспользоваться формулой (8) и моменты внешних (воздушных) сопротив-

лений движению колеблющихся масс аппарата принять пропорциональными моментам касательных сил инерции этих масс, то уравнения Лагранжа второго рода для двухмассовой системы исследуемого аппарата можно представить в следующем виде:

$$\begin{aligned} (1 \pm \gamma_3) I_2 \varphi''_1 + c_y (\varphi_1 - \varphi_2) \mp \mu_r a_1 c_y \varphi_1 &= 0, \\ (1 \pm \gamma_3) I_2 \varphi''_2 - c_y (\varphi_1 - \varphi_2) \pm \mu_2 a_1 c_y \varphi_1 &= 0, \end{aligned} \quad (27)$$

где μ_r — коэффициент внутреннего трения $\left[\mu_r = \frac{M_r}{M_y} \right]$;

γ_ξ — коэффициент внешнего трения $\left[\gamma_\xi = \frac{M \xi_i}{I_i \xi_i} \right]$;

c_y — действительная крутильная жесткость, равная удвоенной крутильной жесткости одной цилиндрической части испытываемого образца (см. формулу (26));

φ_1 и φ_2 — углы отклонения колеблющихся масс;

I_1 и I_2 — моменты инерции колеблющихся масс аппарата.

Решая систему уравнений (27), получим два результата, один из которых $P = k \sqrt{\frac{1 \pm \mu_r}{1 \pm \gamma_\xi}}$,

где $k = \sqrt{\frac{c_y (I_1 + I_2)}{I_1 I_2}}$ — частота собственных колебаний консервативной системы с двумя степенями свободы, для которой $\mu_r = 0$ и $\gamma_\xi = 0$.

Верхние знаки перед коэффициентами μ_r и γ_ξ соответствуют времени тех двух четвертей периода колебаний, в которых потенциальная энергия переходит в кинетическую, а нижние знаки соответствуют обратному переходу кинетической энергии в потенциальную.

Следовательно, при переходе потенциальной энергии в кинетическую частота колебаний

$$p_v = k \sqrt{\frac{1 - \mu_r}{1 + \gamma_\xi}},$$

а при переходе кинетической энергии в потенциальную

$$p_r = k \sqrt{\frac{1 + \mu_r}{1 - \gamma_\xi}}.$$

Период затухающих колебаний рассматриваемой системы

$$T = \frac{1}{2} \left(\frac{2\pi}{p_v} + \frac{2\pi}{p_r} \right) = \frac{\pi (p_v + p_r)}{p_v p_r},$$

их угловая частота

$$p = \frac{2\pi}{T} = 2 \frac{p_v p_r}{p_v + p_r}.$$

Квадрат этой частоты

$$p^2 = \frac{c_y (I_1 + I_2)}{I_1 I_2 a_2} (1 + \mu_r).$$

Отсюда действительная крутильная жесткость

$$c_y = \frac{I_1 I_2 a_r}{I_1 + I_2} \frac{p^2}{1 + \mu_r},$$

где

$$a_r = \frac{1 + \mu_r \gamma_{i_2} + \sqrt{(1 - \mu_r^2)(1 - \gamma_{i_2}^2)}}{2(1 - \mu_r)}.$$

По формуле (26)

$$c_y = 2 \frac{GI_r}{I_0 (1 + \mu_r)}.$$

Сравнивая правые части последних двух уравнений, получим кажущийся модуль упругости второго рода

$$G = \frac{I_1 I_2}{I_1 + I_2} \frac{I_0}{2I_p} a_r p^2. \quad (29)$$

После подстановки числовых величин

$$G = 11,45 a_r p^2, \quad (30)$$

$$a_r = 1,05 - 1,06.$$

Угловая частота p определена по виброграмме затухающих колебаний системы. Для этого виброграмма разделена на части через каждые $N=10$ циклов колебаний. Для каждой из полученных при этом ее частей измерен угол α^0 , соответствующий времени поворота целлулоидного диска за время записи на нем $N=10$ циклов колебаний в данном участке виброграммы.

При известных N и Δt_i период i -того цикла колебаний определен по уравнению

$$T_i = \frac{\Delta t_i}{N} \frac{\text{сек}}{\text{цикл}}.$$

Частота i -того цикла затухающих колебаний

$$p = \frac{2\pi}{T_i}.$$

Время одного оборота целлулоидного диска $t = 17,4 \text{ сек/об}$. Поэтому

$$\Delta t_1 = 17,4: \frac{\alpha^0}{360^0} = 0,0485 \alpha^0 \text{ сек}$$

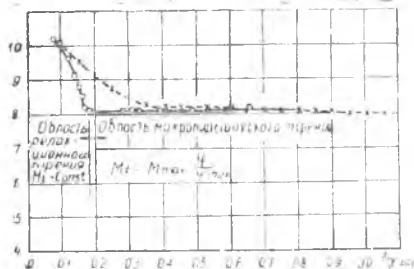
и

$$p = \frac{6,28 \cdot 10}{0,0485 \alpha^0} = \frac{1285}{\alpha^0} \text{ рад/сек}.$$

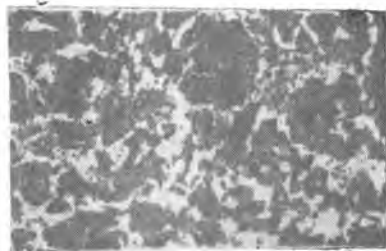
После определения частоты p затухающих колебаний представляется возможность по формуле (30) при $\alpha \approx 1$ подсчитать числовые значения кажущегося модуля упругости второго рода.

Результаты этого расчета представлены на фиг. 2 в виде кривой $G = f(\gamma)$. На этой фигуре пунктиром нанесена кривая зависимости кажущегося модуля упругости второго рода от деформации, подсчитанная по диаграммам кручения круглого образца, изготовленного для той же стали, что и образец для крутильного аппарата. Химический состав ее: $C = 0,41$; $Si = 0,2$; $Mn = 0,66$; $P = 0,029$ и $S = 0,02$. Сталь эта нормализована при 850° с закалкой с 545° в растворе каустической соды с отпуском при $400^\circ C$. Твердость 387 по Бринеллю. Микроструктура ферритоперлитовая, крупнозернистая, как это показано на фиг. 3.

По диаграмме, показанной на фиг. 2 видно, что кажущийся при нагружении модуль упругости второго рода значительно изменяется только в области малых напряжений, не выше одной пятой от предела упругости. В области более высоких напряжений, не превышающих половины предела упругости, модуль кручения допустимо полагать постоянным.



Фиг. 2. Зависимость модуля кручения от деформации для стали 45.



Фиг. 3. Структура нормализованной стали 45.

КОЭФФИЦИЕНТЫ РАССЕИВАНИЯ ЭНЕРГИИ ПРИ КОЛЕБАНИЯХ СИСТЕМЫ

Имея виброграмму затухающих колебаний и закономерность изменения моментов внешних и внутренних сопротивлений, установленную при составлении уравнений (27), можно баланс энергии при любом i -том цикле затухающих колебаний крутильной системы аппарата выразить следующим уравнением:

$$V_{r\dot{\epsilon}} = V_r + V_{\dot{\epsilon}}. \quad (32)$$

или, в развернутом виде:

$$\frac{c_y}{2} (\lambda_i^2 - \lambda_{i+1}^2) = 4\mu_r c_y \int_0^{\lambda_i} \varphi d\varphi + 4r_{\dot{\epsilon}} \left[I_1 \int_0^T \varphi''_1 \varphi'_1 dt + I_2 \int_0^{\frac{T}{4}} \varphi''_2 \varphi'_2 dt \right].$$

После интегрирования и преобразования

$$\frac{c_y}{2} \lambda_i^2 \left(1 - \frac{\lambda_{i+1}^2}{\lambda_i^2} \right) = 2\mu_r c_y \lambda_i^2 + 2r_{\dot{\epsilon}} P^2 I_1 \lambda_i^2 \left(1 + \frac{I_2 \lambda_2^2}{I_1 \lambda_1^2} \right).$$

Разрезая двухмассовую систему по узлу колебаний на две парциальные системы и сравнивая выражения частот собственных колебаний этих систем, получим:

$$\frac{c_1}{c_2} = \frac{I_1}{I_2} = \frac{\lambda_2^2}{\lambda_1^2}; \quad I_2 \lambda_2 = I_1 \lambda_1; \quad 1 + \frac{I_2 \lambda_2^2}{I_1 \lambda_1^2} = 1 + \frac{\lambda_2^2}{\lambda_1^2} = 1 + \frac{I_1}{I_2} = a_1.$$

$$\text{Поэтому } \frac{c_y}{2} \lambda_i^2 \left(1 - \frac{\lambda_{i+1}^2}{\lambda_1^2}\right) = 2\mu_r c_y \lambda_i^2 + 2\gamma_\xi p^2 I_1 \lambda_1^2 a_1, \quad (33)$$

где λ_1 и λ_2 — амплитуды колебаний первой и второй масс относительно узла колебаний при i -том их цикле;
 λ_i и λ_{i+1} — амплитуды углового смещения первой массы относительно второй при i -том и $(i+1)$ -ном циклах колебаний, измеренные от средней линии виброграммы.

Потенциальная энергия, накапливаемая испытуемым образцом при i -том цикле колебаний

$$V_i = c_y \frac{\lambda_i^2}{2}. \quad (34)$$

Из уравнения (32) — (34) коэффициенты рассеяния энергии выражаются следующими формулами:

для суммарных потерь

$$\Psi_i = \Psi_r + \Psi_\xi = 1 - \frac{\lambda_{i+1}^2}{\lambda_i^2}; \quad (35)$$

для гистерезисных потерь

$$\Psi_2 = \frac{V_r}{V_i} = 4\mu_r; \quad (36)$$

для внешних сопротивлений

$$\Psi_\xi = \frac{V_\xi}{V_i} = 4\gamma_\xi I_1 a_1 \frac{p^2}{c_y} \frac{\lambda_1^2}{\lambda_i^2} = 4\gamma_\xi \frac{p^2}{\kappa^2} \approx 4\gamma_\xi. \quad (37)$$

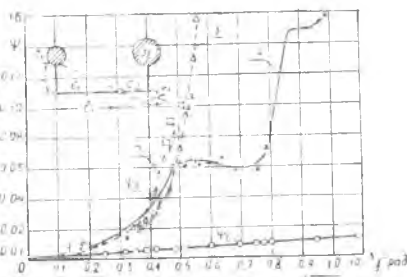
Применяя закон Ньютона о сопротивлении воздуха и используя экспериментальные коэффициенты обтекаемости колеблющихся масс при данных их размерах, нетрудно установить следующую зависимость:

$$\Psi_\xi = ,086 \lambda. \quad (38)$$

Из сравнения (37) и (38)

$$\gamma_\xi = \frac{\Psi_\xi}{4} \text{ или } \gamma_\xi = 0,0215 \lambda.$$

Закономерность изменения коэффициентов Ψ_2 и Ψ_ξ в зависимости от деформации показана на фиг. 4. По кривой $\Psi_r =$



Фиг. 4. Коэффициенты рассеивания энергии Ψ_r и Ψ_ξ для стали 45.

На кривых $\Psi_2 = f(\lambda)$ указаны номера очередности испытаний образца.

$f(\gamma)$ фиг. 4 видно, что в пределах изменения деформации примерно от одной пятой до половины предела упругости коэффициента гистерезисных потерь для стали 45 не зависит от деформации и равен $\Psi_r = 0,06$.

Для закаленной мелкозернистой стали 45 сорбитовой структуры в пределах горизонтального участка кривой $\Psi_r = 0,037$.

ВЫВОДЫ

При исследовании колебаний динамических систем необходимо знать закономерности изменения момента междучастичного трения, коэффициентов рассеивания энергии и модуля упругости второго рода в зависимости от деформации.

Установленные опытами горизонтальные участки кривых $\Psi_2 = f(\gamma)$, располагающиеся в диапазоне напряжений, допускаемых в машиностроении, и неизменность модуля упругости в этой области деформации облегчает линеаризацию дифференциальных уравнений собственных и вынужденных колебаний реальных (неконсервативных) систем.
