

трещин (трещиностойкости) при циклическом нагружении: Метод. указания. — Львов: АН УССР. Физико-мех. ин-т, 1979.

7. *Adetifa O. A., Gowda C. V. B., Topper T. H.* A Model For Fatigue Crack Growth Delay Under Two—Level Block Loads, in *Fatigue Crack Growth Under Spectrum Loads*, ASTM STP, 1976.

УДК 534.131:621.45.00.11—226—752

Л. И. Фридман

О РАСЧЕТЕ КОЛЕБАНИЙ ДИСКОВ НА ОСНОВЕ УРАВНЕНИЙ ТЕОРИИ УПРУГОСТИ

При проектировании и доводке ГТД расчеты колебаний дисков турбин и компрессоров, наряду с расчетами на прочность, определяют конструктивные формы и размеры. Известные методы расчета колебаний дисков основаны на уравнениях колебаний пластин, построенных в соответствии с гипотезой Кирхгофа. Последняя дает существенную погрешность при описании высших форм колебаний. Уточненные теории колебаний пластин, основанные на аналоге гипотезы Тимошенко для стержней [4] имеют большую область применения при описании частот низших форм, однако, они также дают погрешность при определении частот высших форм. Поэтому методы расчета колебаний дисков, основанные на уравнениях теории пластин, имеют предельную точность, которую невозможно превзойти. Погрешность расчета тем больше, чем выше рассматриваемая форма, она существенна для практически реализуемых форм и приводит к неправильному выбору размеров диска, не обеспечивающих необходимую отстройку.

Значительно большую точность дают расчеты, основанные на уравнениях теории упругости. Одна из возможностей построения метода расчета колебаний дисков на основе уравнений теории упругости заключается в точном решении динамической задачи для полого конечного цилиндра, мысленном разбиении диска на части цилиндрической формы и на основе полученного точного решения обратной стыковке цилиндров в диск.

Известны решения динамических задач теории упругости для конечного цилиндра только для случая осесимметричных колебаний [2], [5], [6]. Колебания дисков происходят, как правило, по неосесимметричным формам (с узловыми диаметра-

ми). Поэтому исключается построение решений для диска на основе известных решений для цилиндра.

Ниже дается решение неосесимметричной динамической задачи для конечного цилиндра. Задача решается методом Б. Л. Абрамяна [1], примененного им для статической осесимметричной задачи. На основе решения, полученного по описанной выше схеме, строится расчет диска, который как составная часть, может быть использован при расчете связанных колебаний диска и лопаток.

В безразмерных цилиндрических координатах ρ , Θ , z , отнесенных к характерному линейному размеру R , перемещения собственной формы, характеризуемой числами m (номер параметра разделения при отделении функции времени) и k , могут быть записаны в виде

$$U_{\rho mk} = u_{\rho mk} \cos k \Theta;$$

$$U_{\Theta mk} = u_{\Theta mk} \sin k \Theta;$$

$$U_{zmk} = u_{zmk} \cos k \Theta.$$

Здесь $u_{\rho mk}$, $u_{\Theta mk}$, u_{zmk} — функции ρ и z , которые могут быть записаны через волновые функции Φ_{mk} , Ψ_{1mk} , Ψ_{2mk} [3]

$$u_{\rho mk} = \frac{\partial}{\partial \rho} \left(\Phi_{mk} + \frac{\partial \Psi_{1mk}}{\partial z} \right) + \frac{k}{\rho} \Psi_{2mk};$$

$$u_{\Theta mk} = - \frac{k}{\rho} \left(\Phi_{mk} + \frac{\partial \Psi_{1mk}}{\partial z} \right) - \frac{\partial \Psi_{2mk}}{\partial \rho};$$

$$u_{zmk} = \frac{\partial}{\partial z} \left(\Phi_{mk} + \frac{\partial \Psi_{1mk}}{\partial z} \right) + \left(\frac{\lambda_{mk}}{c_2} \right)^2 \Psi_{1mk}.$$

При этом функции Φ_{mk} и Ψ_{imk} ($i = 1, 2$) определяются уравнениями

$$\frac{\partial^2 \Phi_{mk}}{\partial \rho^2} + \frac{1}{\rho} \frac{\partial \Phi_{mk}}{\partial \rho} + \frac{\partial^2 \Phi_{mk}}{\partial z^2} - \left(\frac{k^2}{\rho^2} - \frac{\lambda_{mk}^2}{c_1^2} \right) \Phi_{mk} = 0;$$

$$\frac{\partial^2 \Psi_{imk}}{\partial \rho^2} + \frac{1}{\rho} \frac{\partial \Psi_{imk}}{\partial \rho} + \frac{\partial^2 \Psi_{imk}}{\partial z^2} - \left(\frac{k^2}{\rho^2} - \frac{\lambda_{mk}^2}{c_2^2} \right) \Psi_{imk} = 0; \quad (1)$$

$$i = 1, 2.$$

Здесь λ_{mk} — безразмерная частота, отнесенная к c/R ; $c = \sqrt{Eg/\gamma}$ — скорость распространения возмущений в одномерной задаче; E — модуль упругости; γ — удельный вес; g — ускорение земного притяжения;

$$c_1 = \sqrt{\frac{1-\nu}{(1+\nu)(1-2\nu)}}; \quad c_2 = \frac{1}{\sqrt{2(1+\nu)}} \quad \text{безразмерные скорости}$$

ти распространения изменений объема и формы; ν — коэффициент Пуассона.

Применяя метод разделения переменных к уравнениям (1), запишем решение их в виде суммы двух рядов:

$$\begin{aligned}\Phi_{mk} &= \sum_{n=0}^{\infty} \varphi_{mkn} Z_n^{(j)} + \sum_{q=1}^{\infty} V_{mkq} \chi_{kq}^{(j)}; \\ \Psi_{1mk} &= \sum_{n=0}^{\infty} \Psi_{1mkn} \frac{\varepsilon}{n\pi} \frac{dZ_n^{(j)}}{dz} + \sum_{q=1}^{\infty} W_{1mkq} \chi_{kq}^{(j)}; \\ \Psi_{2mk} &= \sum_{n=0}^{\infty} \Psi_{2mkn} Z_n^{(j)} + \sum_{q=1}^{\infty} W_{2mkq} \chi_{kq}^{(j)}.\end{aligned}\quad (2)$$

Здесь

$$\begin{aligned}\varphi_{mkn} &= A_{kn} I_k(\rho \gamma_{mkn}) + B_{kn} K_k(\rho \gamma_{mkn}); \\ \Psi_{imkn} &= A_{ikn} I_k(\rho \delta_{mkn}) + B_{ikn} K_k(\rho \delta_{mkn}) \quad (i = 1, 2); \\ V_{mkq} &= C_{kq} \operatorname{sh} \omega_{mkq} z + D_{kq} \operatorname{ch} \omega_{mkq} z;\end{aligned}$$

$$W_{imkq} = C_{ikq} \operatorname{sh} \Omega_{mkq} z + D_{ikq} \operatorname{ch} \Omega_{mkq} z \quad (i = 1, 2);$$

$$\begin{aligned}\gamma_{mkn}^2 &= (n\pi/\varepsilon)^2 - (\lambda_{mk}/c_1)^2; \quad \omega_{mkq}^2 = (h_{kq}^{(j)})^2 - (\lambda_{mk}/c_1)^2; \\ \delta_{mkn}^2 &= (n\pi/\varepsilon)^2 - (\lambda_{mk}/c_2)^2; \quad \Omega_{mkq}^2 = (h_{kq}^{(j)})^2 - (\lambda_{mk}/c_2)^2;\end{aligned}$$

$$Z_n^{(j)} = \alpha_n^{(j)} \cos \frac{n\pi z}{\varepsilon} + \beta_n^{(j)} \sin \frac{n\pi z}{\varepsilon};$$

$$K_{kq}^{(j)} = E_{kq}^{(j)} I_k(\rho h_{kq}^{(j)}) + G_{kq}^{(j)} Y_k(\rho h_{kq}^{(j)});$$

ε — безразмерная высота цилиндра;

$I_k(\rho h_{kq}^{(j)})$, $Y_k(\rho h_{kq}^{(j)})$ — функция Бесселя первого и второго рода соответственно, k -го порядка; $I_k(\rho \gamma_{mkn})$, $K_k(\rho \gamma_{mkn})$ — модифицированные функции Бесселя первого и второго рода m -го порядка; A_{kn} , B_{kn} , A_{ikn} , B_{ikn} , C_{kq} , D_{kq} , C_{ikq} , D_{ikq} , $E_{kq}^{(j)}$, $G_{kq}^{(j)}$, $\alpha_n^{(j)}$, $\beta_n^{(j)}$ — постоянные.

Рассматривается два варианта представления решения.

В первом варианте ($j=1$) полагаем $\alpha_n^{(1)} = 1$; $\beta_n^{(1)} = 0$;

$$E_{kq}^{(1)} = \frac{dY_k(\rho h_{kq}^{(1)})}{d\rho} \quad (\rho = \rho_0); \quad G_{kq}^{(1)} = -\frac{dI_k(\rho h_{kq}^{(1)})}{d\rho} \quad (\rho = \rho_0)$$

(ρ_0 — безразмерный радиус внутренней поверхности цилиндра) и $h_{kq}^{(1)}$ — положительные корни, расположенные в порядке возрастания (q — номер корня), определяются из уравнения

$$E_{kq}^{(1)} \frac{dI_k(\rho h_{kq})}{d\rho} (\rho = \rho_1) + G_{kq}^{(1)} \frac{dY_k(\rho h_{kq})}{d\rho} (\rho = \rho_1) = 0;$$

ρ_1 — безразмерный радиус внешней поверхности цилиндра.

При втором варианте ($j=2$) полагаем $\alpha_n^{(j)} = 0$; $\beta_n^{(j)} = 1$;

$$E_{kq}^{(2)} = Y_k(\rho_0 h_{kq}^{(2)}); G_{kq}^{(2)} = I_k(\rho_0 h_{kq}^{(2)});$$

$h_{kq}^{(2)}$ — положительные корни определяются из уравнения

$$E_{kq}^{(2)} I_k(\rho_1 h_{kq}^{(2)}) + G_{kq}^{(2)} Y_k(\rho_1 h_{kq}^{(2)}) = 0.$$

Заметим, что функции $\kappa_{kq}^{(j)}$ удовлетворяют условию ортогональности

$$\int_{\rho_0}^{\rho_1} K_{kq}^{(j)} K_{kp}^{(j)} \rho d\rho = 0 \quad (p \neq q).$$

Из уравнения Бесселя для функции $\kappa_{kq}^{(j)}$ можно получить условие ортогональности в виде

$$\int_{\rho_0}^{\rho_1} \left(\frac{dK_{kq}^{(2)}}{d\rho} \pm \frac{k}{\rho} K_{kq}^{(2)} \right) \left(\frac{dK_{kp}^{(2)}}{d\rho} \pm \frac{k}{\rho} K_{kp}^{(2)} \right) \rho d\rho = 0.$$

($p \neq q$)

Граничные условия для свободного цилиндра могут быть записаны в виде

$$\rho = \rho_0 \text{ и } \rho = \rho_1 \quad \sigma_{\rho mk} = 0; \quad \tau_{\rho\theta mk} = 0; \quad \tau_{\rho zmk} = 0;$$

$$z = 0 \text{ и } z = \varepsilon \quad \sigma_{zmk} = 0; \quad \tau_{\rho zmk} = 0; \quad \tau_{\theta zmk} = 0.$$

Двенадцати граничным условиям соответствует столько же последовательностей произвольных постоянных.

В первом варианте решения ($j=1$) точно удовлетворяются граничные условия для $\tau_{\rho zmk}$ и $\tau_{\theta zmk}$ на торцевых плоскостях $z=0$ и $z=\varepsilon$, для $\tau_{\rho zmk}$ на боковых поверхностях $\rho=\rho_0$ и $\rho=\rho_1$. Эти же условия позволяют исключить шесть последовательностей произвольных постоянных. Остальные граничные условия после разложения в тригонометрический ряд гиперболических функций на боковых поверхностях (в условиях $\sigma_{\rho mk} = 0$ и $\tau_{\rho\theta mk} = 0$ при $\rho=\rho_0$ и $\rho=\rho_1$) и в ряд по $\kappa_{kq}^{(1)}$ модифицированных функций Бесселя на торцевых плоскостях ($\sigma_{zmk} = 0$ при $z=0$ и $z=\varepsilon$), дают шесть бесконечных последовательностей линейных алгебраических уравнений и могут

быть удовлетворены с любой заданной степенью точности. При удержании в рядах (2) конечного числа N слагаемых порядок усеченной системы равен $6N$.

Второй вариант решения позволяет точно удовлетворить граничным условиям $\sigma_{zmk} = 0$ при $z = 0$ и $z = \varepsilon$. Оставшиеся граничные условия также удовлетворяются с заданной точностью и дают десять бесконечных последовательностей линейных уравнений. При удержании в рядах (2) N слагаемых порядок усеченной системы равен $10N$. При этом граничные условия на торцевых плоскостях для второго варианта решения записываются в виде

$$\tau_{\rho zmk} + \tau_{\theta zmk} = 0; \quad \tau_{\rho zmk} - \tau_{\theta zmk} = 0.$$

Такая запись граничных условий позволяет перейти от функциональных уравнений к бесконечным последовательностям линейных алгебраических уравнений после разложений функций

$$\frac{dI_k}{d\rho} \pm \frac{k}{\rho} I_k; \quad \frac{dK_k}{d\rho} \pm \frac{k}{\rho} K_k$$

в ряды по

$$K_{kq}^* = \frac{dK_{kq}^{(2)}}{d\rho} + \frac{k}{\rho} K_{kq}^{(2)}; \quad K_{kq}^{**} = \frac{dK_{kq}^{(2)}}{d\rho} - \frac{k}{\rho} K_{kq}^{(2)}.$$

Условие разрешимости полученной однородной системы дает частотное уравнение.

Полученное решение является точным, численная реализация его имеет ограниченную точность, определяемую числом N удерживаемых в рядах слагаемых. Составлена программа расчета частот цилиндра на языке «Фортран» и реализована на ЭВМ ЕС-1033.

В обоих вариантах решения получена хорошая сходимость: частоты, полученные при $N = 4$, практически не меняются при дальнейшем увеличении N . В таблице сопоставляются резуль-

Параметр разделения, m	Безразмерные частоты, λ	
	1 вариант	2 вариант
1	1,0722	1,08051
2	2,12126	2,14038
3	2,9487	2,954705
4	4,5627	4,49402
5	5,0372	5,02789

таты расчета частот по двум вариантам решения для сплошного цилиндра ($\rho_0 = 0$) при осесимметричных колебаниях ($k = 0$) для $\varepsilon = 0,5$ при различных параметрах m . (В качестве характерного линейного размера принят наружный радиус R цилиндра). В первом варианте удержано $N = 6$ членов рядов (2), во втором — $N = 8$. Как видно из таблицы, оба варианта решения дают совпадающие результаты.

На рис. 1 приведена первая частота полого цилиндра ($\rho_0 = 0,2$) в зависимости от относительной высоты цилиндра ε для $k = 0$ (осесимметричные формы) и $k = 4$.

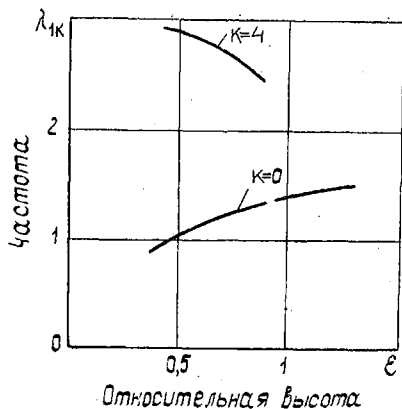
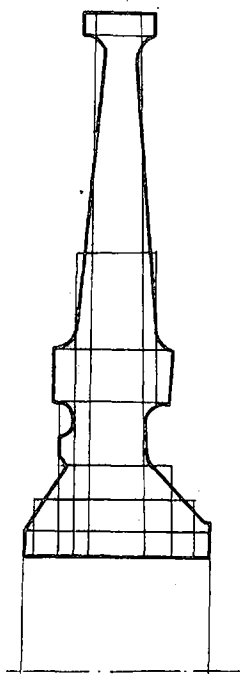


Рис. 1. Зависимость частоты полого цилиндра от его относительной высоты

← Рис. 2. Схема разбиения диска на цилиндрические столбцы и пояса

Условимся называть концентричные цилиндры одинаковой высоты цилиндрическим поясом, а цилиндры с одинаковыми радиусами, стоящие друг на друге — цилиндрическим столбцом. Диск разбивается на цилиндрические столбцы и цилиндрические пояса. На рис. 2 показано разбиение диска на 8 цилиндрических поясов и 9 цилиндрических столбцов. При таком разбиении граничные условия в пределах одной из четырех поверхностей каждого цилиндра не меняются.

Цилиндры, расположенные в одном поясе, сопрягаются по боковым поверхностям, два цилиндра в поясе имеют по одной свободной боковой поверхности. Цилиндры, расположенные в одном столбце, сопрягаются по торцевым плоскостям, одна из торцевых плоскостей каждого крайнего цилиндра свободна. На одной из торцевых плоскостей каждого цилиндрического пояса расположено начало отсчета координаты z .

Если обозначить номер столбца i (счет столбцов ведется в сторону возрастания радиуса) и номер пояса j , то удобно вести двойную нумерацию цилиндров i, j .

Условия сопряжения по боковым поверхностям можно записать в виде:

$$\begin{aligned}
 \sigma_{\rho} m_k(i, j)_{(\rho=\rho_i)} &= \sigma_{\rho} m_k(i+1, j)_{(\rho=\rho_0)} ; \\
 \tau_{\rho\theta} m_k(i, j)_{(\rho=\rho_i)} &= \tau_{\rho\theta} m_k(i+1, j)_{(\rho=\rho_0)} ; \\
 \tau_{\rho} z m_k(i, j)_{(\rho=\rho_i)} &= \tau_{\rho} z m_k(i+1, j)_{(\rho=\rho_0)} ; \\
 u_{\rho} m_k(i, j)_{(\rho=\rho_i)} &= u_{\rho} m_k(i+1, j)_{(\rho=\rho_0)} ; \\
 u_{\theta} m_k(i, j)_{(\rho=\rho_i)} &= u_{\theta} m_k(i+1, j)_{(\rho=\rho_0)} ; \\
 u_{z m_k(i, j)_{(\rho=\rho_i)}} &= u_{z m_k(i+1, j)_{(\rho=\rho_0)}} .
 \end{aligned} \tag{3}$$

Каждое из записанных условий после разложения в них гиперболических функций в тригонометрический ряд, дает бесконечную последовательность линейных алгебраических уравнений.

Условия сопряжения по торцевым плоскостям имеют вид

$$\begin{aligned}
 \sigma_{z m_k(i, j)(z=\varepsilon)} &= \sigma_{z m_k(i, j+1)(z=0)} ; \\
 \tau_{\theta} z m_k(i, j)(z=\varepsilon) &= \tau_{\theta} z m_k(i, j+1)(z=0) ; \\
 \tau_{\rho} z m_k(i, j)(z=\varepsilon) &= \tau_{\rho} z m_k(i, j+1)(z=0) ; \\
 u_{\rho} z m_k(i, j)(z=\varepsilon) &= u_{\rho} z m_k(i, j+1)(z=0) ; \\
 u_{\theta} m_k(i, j)(z=\varepsilon) &= u_{\theta} m_k(i, j+1)(z=0) ; \\
 u_{z m_k(i, j)(z=\varepsilon)} &= u_{z m_k(i, j+1)(z=0)} .
 \end{aligned} \tag{4}$$

Для первого варианта решения первые два условия (4) дают функциональные уравнения, которые не переходят в алгебраические. Поэтому метод расчета диска удобно строить на основе второго варианта решения динамической задачи теории упругости для цилиндра.

В этом случае второе и третье условия (3) заменяются следующими:

$$\begin{aligned}
 (\tau_{\rho} zmk + \tau_{\theta} mk)_{(i,j)(z=\varepsilon)} &= (\tau_{\rho} zmk - \tau_{\theta} zmk)_{(i,j+1)(z=0)} ; \\
 (\tau_{\rho} zmk - \tau_{\theta} zmk)_{(i,j)(z=\varepsilon)} &= (\tau_{\rho} zmk + \tau_{\theta} zmk)_{(i,j+1)(z=0)}.
 \end{aligned}
 \tag{5}$$

Первое условие (3) и первые два условия (4) удовлетворяются точно, третье условие (4) после разложения модифицированных функций Бесселя в ряды по $\kappa_{kq}^{(2)}$ и условие (5) после разложений функций

$$\frac{dI_k}{d\rho} \pm \frac{k}{\rho} I_k ; \quad \frac{dK_k}{d\rho} \pm \frac{k}{\rho} K_k$$

в ряды по κ_{kq}^* и κ_{kq}^{**}

переходят в бесконечные последовательности линейных уравнений.

При расчете диска порядок усеченной однородной системы линейных уравнений зависит от числа N удерживаемых слагаемых в рядах (2) и от числа цилиндров, на которые разбивается диск.

Таким образом, задача для диска сводится к решению системы однородных линейных алгебраических уравнений, соответствующих четырем типам граничных условий: для свободной боковой поверхности, для свободной торцевой поверхности, для сопряжения по боковой поверхности, для сопряжения по торцевой плоскости.

Условие разрешимости полученной системы дает частотное уравнение.

В отличие от решения для цилиндра решение для диска является приближенным, точность его зависит от степени приближения диска, состоящего из цилиндров, к реальному диску, т. е. от разбиения диска на цилиндры. Численная реализация описанного метода находится в стадии разработки.

ЛИТЕРАТУРА

1. Абрамян Б. Л. Некоторые задачи равновесия круглого цилиндра. — ДАМ Арм. ССР, 1958, т. 26, № 2.
2. Гринченко В. Т. Равновесие и установившиеся колебания упругих тел конечных размеров. — Киев: Наукова думка, 1978.
3. Гузь А. Н., Кубенко В. Д., Черевко М. А. Дифракция упругих волн. — Киев: Наукова думка, 1978.
4. Фридман Л. И. Поперечные колебания круглых пластин с учетом инерции вращения и деформации сдвига. — Науч. тр./Куйбыш. авиац. ин-т,

1974. Проектирование и доводка авиационных ГТД/Под ред. Кузнецова Н. Д.

5. Чернышев К. В., Шегай В. В. Собственные колебания твердых цилиндров конечной длины.—Акустический журнал АН СССР, 1977, т. XXIII, вып. 4.

6. Hutchinson J. R. Axisymmetric Vibrations of a Free Finite—Length Rod. J. Acoust. Soc. America, 1972, 51, 1, 233—240.

УДК 519.65

Д. В. Хронин

АВТОМАТИЗИРОВАННОЕ ПРОГНОЗИРОВАНИЕ И ПРОЕКТИРОВАНИЕ АМПЛИТУДНО-ЧАСТОТНЫХ ХАРАКТЕРИСТИК ГАЗОТУРБИНЫХ ДВИГАТЕЛЕЙ

В качестве средств борьбы с вибрациями в авиационных газотурбинных двигателях используются упруго-демпферные опоры роторов, демпферные устройства в различных узлах двигателя, конструкционное трение. Производится частотная отстройка системы от резонанса. Вместе с тем можно отметить, что разработанные в настоящее время расчетно-теоретические методы оценки вибраций двигателей и особенно оценки влияния различных конструктивных мероприятий на амплитудно-частотные характеристики (АЧХ) двигателей весьма трудоемки и их широкое применение возможно лишь с помощью современных ЭВМ.

В этой связи представляет интерес изложенное в настоящей статье освещение некоторых особенностей АЧХ двигателей и методов автоматизации построения, анализа и прогнозирования АЧХ двигателей в процессе их проектирования и доводки.

Вибрационные характеристики газотурбинных двигателей формируются в процессе проектирования двигателей, когда выбирается их конструктивная схема, расположение опор роторов, способ подвески двигателя, геометрические размеры и жесткость основных частей и деталей роторной системы и корпусов двигателя. Поэтому уже на ранней стадии проектирования желательно возможно точнее прогнозировать основные вибрационные свойства колебательной системы двигателя.

Следует отметить, что сложившиеся амплитудно-частотные характеристики вынужденных колебаний двигателей являются весьма стабильными. Введение дополнительной податливости отдельных опор роторов или изменение жесткости от-