

А. М. СОЙФЕР, Г. П. ФЕДОРЧЕНКО

О ДОСТОВЕРНОСТИ РЕЗУЛЬТАТОВ ТЕНЗОМЕТРИРОВАНИЯ ДЕТАЛИ, КОЛЕБЛЮЩЕЙСЯ ПОД ВОЗДЕЙСТВИЕМ ИМПУЛЬСОВ, СЛУЧАЙНО РАСПРЕДЕЛЕННЫХ ПО ВРЕМЕНИ

При испытаниях авиационных двигателей наблюдаются случаи разрушения деталей, хотя тензометрирование не обнаруживает опасных напряжений. Можно предположить, что в таких случаях возникают вибрационные напряжения, амплитуды которых имеют случайный характер во времени и в пространстве и, следовательно, в некоторых точках детали могут однократно или многократно появиться предельные напряжения, не улавливаемые тензометрированием. Источником случайных напряжений может служить, в частности, возбуждение вибраций от неустойчивого горения или от воздействия шума выхлопной струи.

В настоящей работе рассматривается следующая схема возбуждения случайных амплитуд напряжения. На деталь действуют кратковременные последовательности периодических силовых факторов («цуги сил»). Последние хаотически распределены во времени. Внешние воздействия вызывают в детали вынужденные и затухающие колебания в форме цугов волн напряжения ограниченной длительности. В зависимости от особенностей возбуждения и затухания колебаний в детали может одновременно существовать n цугов волн напряжения. Если $\Theta_{1\text{ср}}$ время средней длительности цуга сил, $\Theta_{2\text{ср}}$ — длительность затухающих колебаний, принимаемых во внимание, а $\Theta_{3\text{ср}}$ среднее время между последующими цугами сил, то число одновременно существующих цугов волн напряжений

$$n = \frac{\Theta_{1\text{ср}} + \Theta_{2\text{ср}}}{\Theta_{3\text{ср}}} \quad (1)$$

Предполагая, что система допускает суперпозицию волн напряжения в детали, амплитуды суммарных напряжений могут получать различные значения до максимального в том маловероятном случае, когда суммарная амплитуда равняется сумме всех n амплитуд отдельных колебаний.

Представляет интерес определить функцию плотности распределения вероятностей появления различных значений суммарных амплитуд напряжений в зависимости от числа одновременно существующих цугов волн напряжения. Мы не ставим здесь задачи определения функции и числовых значений напряжений по заданной случайной функции силовых факторов, а ищем по общей характеристике первых закономерности распределения вероятностей появления относительных значений суммарных амплитуд напряжений.

Рассмотрим данную задачу в следующей постановке. Требуется определить закон распределения вероятностей амплитуд a суммарного колебания

$$S = \sum_{i=1}^n S_i,$$

$$\text{где } S_1 = a_1 \cos(\omega t - \alpha_1),$$

$$S_2 = a_2 \cos(\omega t - \alpha_2),$$

$$S_n = a_n \cos(\omega t - \alpha_n),$$

если амплитуды a_1, a_2, \dots, a_n — постоянные, а фазы $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n$ — случайные, принимающие равновероятные значения в интервале $-\pi, \pi$

Задача сводится к определению закона распределения модуля суммы компланарных векторов

$$\vec{a} = \sum_{i=1}^n \vec{a}_i,$$

где модуль a_i равен амплитуде, а угол наклона \vec{a}_i к некоторой фиксированной прямой, лежащей в плоскости слагаемых векторов, равен фазе α_i соответствующего i -го колебания.

Спроектируем слагаемые и суммарный вектор на оси координат. Тогда проекции вектора \vec{a} на оси координат равны

$$\left. \begin{aligned} a_x &= \sum_{i=1}^n a_i \cos \alpha_i \\ a_y &= \sum_{i=1}^n a_i \sin \alpha_i \end{aligned} \right\} \quad (2)$$

Если угол α принимает равновероятные значения в интервале $(-\pi, \pi)$, то величина $z = \cos \alpha$ распределяется по закону

$$\varphi(z) = \frac{1}{\pi \sqrt{1-z^2}}, \quad (-1 \leq z < 1). \quad (3)$$

Числовые характеристики этого распределения — математическое ожидание, дисперсия и третий абсолютный момент — будут соответственно равны:

$$m_z = 0, \quad \sigma_z^2 = \frac{1}{2} \quad \text{и} \quad \nu_z = \frac{4}{3\pi}.$$

Тогда на основании теорем о числовых характеристиках суммы и произведения случайных величин для распределения проекций a_x и a_y суммарного вектора \vec{a} получим

$$\left. \begin{aligned} m_x = m_y = 0 \\ \sigma_x = \sigma_y = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^n a_i^2 \quad \text{и} \\ \nu_x = \nu_y = \frac{4}{3\pi} \sum_{i=1}^n a_i^3 \end{aligned} \right\} \quad (4)$$

Из предельной теоремы Ляпунова теории вероятностей следует, что если для суммы

$$X = \sum_{i=1}^n X_i$$

выполняется условие

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\nu_x}{\sigma_x^3} = 0,$$

то при $n \rightarrow \infty$ закон распределения величины x неограниченно приближается к закону Гаусса.

В нашем случае

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\nu_x}{\sigma_x^3} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\frac{4}{3\pi} \sum_{i=1}^n a_i^3}{\frac{1}{2\sqrt{2}} \left(\sum_{i=1}^n a_i^2 \right)^{3/2}} \leq \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{8\sqrt{2} a_m}{3\pi \left(\sum_{i=1}^n a_i^2 \right)^{1/2}} = 0.$$

Здесь принято, что a_m — наибольший модуль из всех слагаемых, которые не слишком различаются между собой по величине.

Так как условие теоремы Ляпунова выполняется, то при стремлении числа слагаемых к бесконечности закон распределения проекций a_x и a_y суммарного вектора \vec{a} неограниченно приближается к закону Гаусса с центром группирования в начале координат и равными дисперсиями. Из этого следует, что закон распределения модуля вектора \vec{a} при $n \rightarrow \infty$ приближается к закону распределения Максвелла с плотностью

$$\varphi_a(x) = \frac{x}{\sigma^2} e^{-\frac{x^2}{2\sigma^2}}, \quad (0 \leq x < +\infty), \quad (5)$$

где σ — предельное значение средних квадратических отклонений

$$\sigma = \sigma_x = \sigma_y.$$

При суммировании ограниченного числа векторов параметр σ определяется по формуле (4), т. е.

$$\sigma = \frac{1}{2} \cdot \sum_{i=1}^n a_i^2. \quad (6)$$

Таким образом, с помощью формул (5) и (6) решается задача об определении предельного закона распределения вероятностей амплитуды суммарного колебания. На фиг. 1 изображен график плотности суммарных амплитуд.

Используя формулы (5) и (6), получим предельное значение математического ожидания (среднего значения) суммарной амплитуды

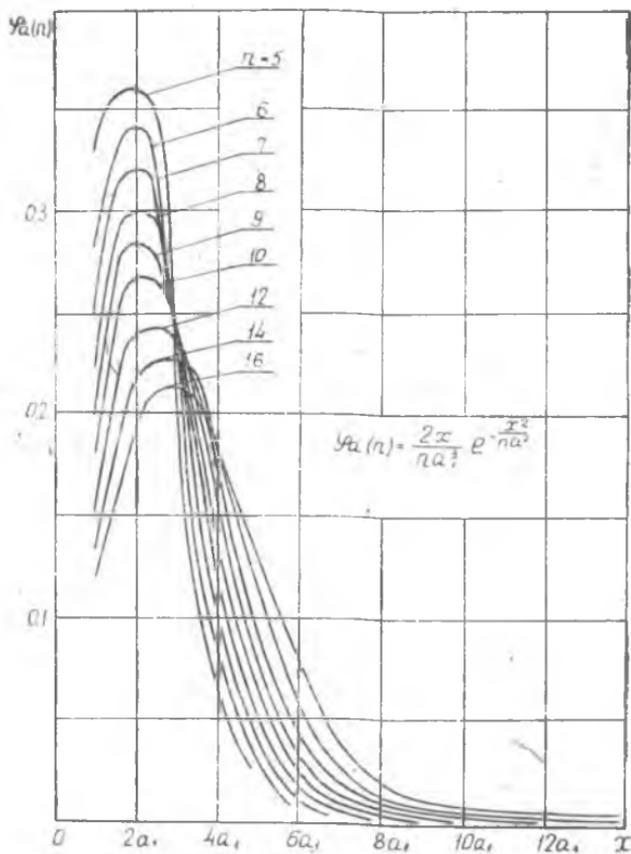
$$m_a = \frac{1}{2} \cdot \sqrt{\pi \cdot \sum_{i=1}^n a_i^2}. \quad (7)$$

Если

$$a_1 = a_2 = \dots = a_n,$$

то

$$m_a = \frac{a_1}{2} \sqrt{n\pi}.$$



Фиг. 1.

Вероятность реализации амплитуды суммарного колебания, превышающей заданное значение a_0 , будет равна

$$P\% = 100e^{-\frac{a_0^2}{na_1^2}} \quad (9)$$

Экспериментальные исследования показали хорошую согласованность формулы (5) с реальными данными суммирования векторов для $n \geq 3$.

Если вероятность получения амплитуды a суммарного колебания, превышающей Q_0 , удовлетворяет условию

$$\text{Вер. } \{a \geq a_0\} \cdot 100\% = 0,15\%,$$

то эту величину можно считать «предельным» значением амплитуды суммарного колебания. Если число слагаемых колебаний $n = 6, 7, 8, 9, 10, 11, 12, 13, 14, 15$, то «предельные» значения суммарной амплитуды соответственно равны $a_0 = 6a_1; 6,7a_1; 7,2a_1; 7,6a_1; 8a_1; 8,4a_1; 8,8a_1; 9,5a_1; 9,5a; 9,9a$ (см. таблицу 1).

На основании полученной зависимости $a_0 = f(n)$ следует, что предельное значение амплитуды a_0 нарастает медленнее по сравнению с возрастанием арифметической суммы амплитуд слагаемых колебаний.

Таблица 1

Вероятности реализации амплитуды суммарного колебания, превышающей заданное значение a_0 для суперпозиции различного числа колебаний, %

$n \backslash a_0$	a	$2a$	$3a$	$4a$	$5a$	$6a$	$7a$	$8a$	$9a$	$10a$
6	84,5	51,2	22,3	6,94	1,45	0,25	—	—	—	—
7	86,7	56,5	27,6	10,2	2,86	0,58	0,09	—	—	—
8	88,6	60,6	32,6	13,5	4,4	1,11	0,22	—	—	—
9	89,6	64,2	36,8	16,8	6,22	1,83	0,43	0,08	—	—
10	90,5	67,0	40,7	20,2	8,2	2,73	0,74	0,16	—	—
11	91,3	69,5	44,0	23,4	10,3	3,80	1,16	0,30	—	—
12	92,3	71,8	47,2	26,4	12,5	5,0	1,69	0,48	0,12	—
13	92,5	73,5	50,1	29,2	14,6	6,26	2,30	0,73	0,20	—
14	93,2	75,5	52,7	31,9	16,8	7,65	3,02	1,13	0,31	—
15	93,0	76,3	54,9	34,3	18,8	9,07	3,80	1,40	0,45	0,13

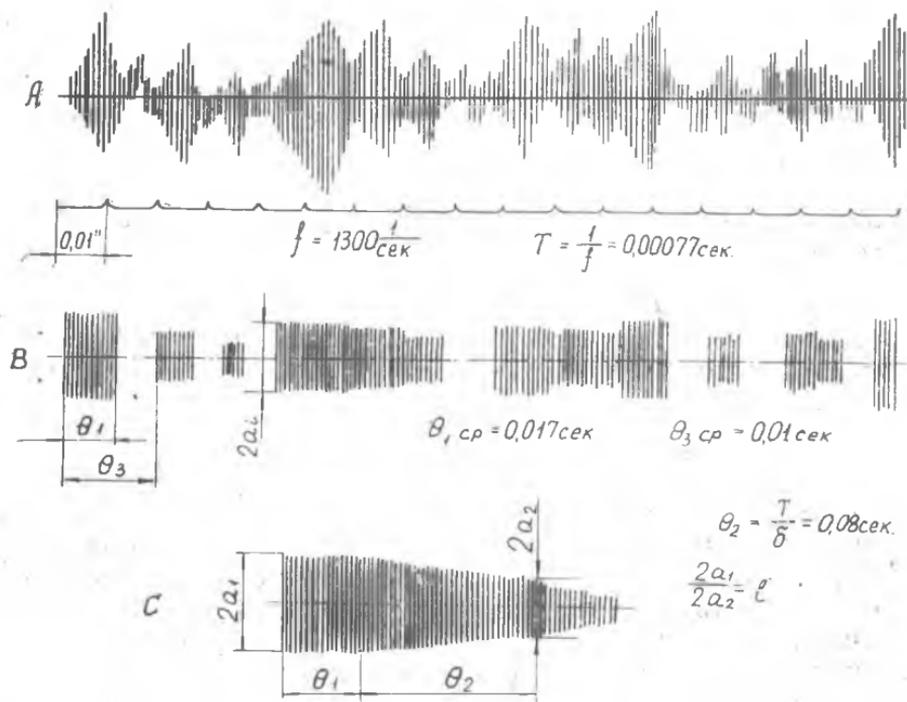
В качестве примера рассмотрим напряжения, возникающие под действием пульсаций давления газа, наполняющего оболочку (см. осциллограмму на фиг. 2А). Частота модулированных колебаний $f = 1300$ гц.

Заменяем действительную картину пульсаций идеализированной (см. фиг. 2В), представляющей цуги волн с постоянными амплитудами, равными средним амплитудам.

Осциллограмма позволяет определить средние значения

$$\Theta_{1 \text{ ср}} = 0,017 \text{ сек} \text{ и } \Theta_{3 \text{ ср}} = 0,01 \text{ сек.}$$

Под действием пульсаций в оболочке возникают напряжения. считаем, что амплитудное значение напряжений и функции распределения вероятностей соответствуют амплитудному значению силы a .



Фиг. 2.

После прекращения воздействия пульсаций продолжают затухающие колебания (фиг. 2e). Если пренебречь затухающими колебаниями с амплитудами меньшими, чем амплитуда вынужденных колебаний в e и более раз, то длительность «учитываемых» вибраций будет

$$\Theta_2 = \frac{T}{\delta},$$

где T — период колебаний, а δ — логарифмический декремент.

В данном случае при $\delta = 0,01$, $\Theta_2 = 0,08$ сек.

Общая длительность цуга колебаний напряжения составит

$$\Theta_{1 \text{ ср}} + \Theta_{2 \text{ ср}} = 0,097 \text{ сек.}$$

За это время могут одновременно существовать n независимых колебаний напряжений

$$n = \frac{\Theta_{1 \text{ ср}} + \Theta_{2 \text{ ср}}}{\Theta_{3 \text{ ср}}} \approx 9.$$

Следовательно, в данном случае, согласно формулам (5) и (6) плотность распределения вероятностей суммарной амплитуды будет иметь вид

$$\varphi_a(n) = \frac{2x}{na_1^2} e^{-\frac{x^2}{na_1^2}},$$

где a_1 — амплитуда отдельной волны.

Математическое ожидание суммарной амплитуды при $n=9$ равно.

$$m_a = 2,66a_1.$$

Вероятность реализации суммарной амплитуды, превышающей математическое ожидание, равна

$$\text{Вер. } \{a_0 \geq 2,66a_1\} \cdot 100 \% = 45,6 \%$$

Вероятность получить амплитуду, превышающую удвоенное и утроенное значение математического ожидания, равна соответственно

$$\text{Вер. } \{a_0 \geq 5,32a_1\} \cdot 100 \% = 4,3\%,$$

$$\text{Вер. } \{a_0 \geq 7,98a_1\} \cdot 100 \% = 0,09 \%$$

Анализ полученных результатов указывает на возможность возникновения больших суммарных напряжений, но с малой вероятностью. Учитывая, что нами осреднено значение амплитуд одновременно действующих цугов волн напряжения, действительные максимальные напряжения могут иметь большие значения, но вероятность проявления их будет еще меньше.

Тензометрирование захватывает сравнительно малую часть всей площади детали и длится оно в течение ограниченного времени. Регистрируемые при этих условиях напряжения будут иметь значения, располагающиеся в некотором наиболее вероятном диапазоне. Вероятность возникновения максимальных значений суммарных напряжений может оказаться слишком малой для их обнаружения при тензометрировании, но достаточно большой для разрушения детали при длительной работе.

Другой важный вывод касается значения для надежности демпфирующих свойств детали. Увеличение декремента не только снижает амплитудное значение напряжений при резонансе, но и, как видно из изложенного, уменьшает суммарную величину напряжений, повышает достоверность тензометрирования в случаях, подобных изложенному.

Можно рекомендовать проведение анализа возбуждающих импульсов в ситуациях, когда трещины и разрушения деталей наблюдаются при невысоких замеренных напряжениях. Такой анализ позволяет оценить возбуждающую нагрузку как возможный источник высоких напряжений, не улавливаемых тензометрированием.