

А.И.Белоусов, А.С.Мокрый

МЕТОД РАСЧЕТА ДИНАМИЧЕСКИХ ХАРАКТЕРИСТИК РОТОРОВ
С ИСПОЛЬЗОВАНИЕМ ТЕОРИИ ГРАФОВ СИГНАЛОВ

Ротор двигателя летательного аппарата представляет собой сложную многодисковую систему. Его динамика описывается дифференциальными уравнениями в частных производных, как и любой системы с распределенными параметрами. С целью упрощения расчета динамических характеристик ротора в настоящее время автоматизируется процесс численного расчета по дифференциальным уравнениям. Для автоматизации вывода передаточной функции или системы уравнений, описывающих динамику механической модели, представляется перспективным применение теории графов сигналов.

Эта теория используется в радиотехнике /1/, гидравлике и механике /2/. Определение передаточной функции осуществляется или последовательным упрощением графа с помощью эквивалентных преобразований, или по правилу Шеннона-Мэсона.

Передача от источника (входного сигнала) к стоку (выходному сигналу) в соответствии с этим правилом определяется по формуле /2/

$$T = \frac{\sum_n T_n \Delta_n}{\Delta},$$

где T_n - передача n -го прямого пути между заданными входом и выходом;

Δ_n - определитель подграфа, образующегося в результате исключения из исходного графа пути с передачей T_n и вершин, через которые он проходит;

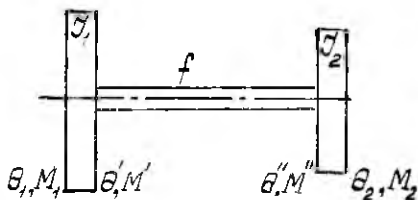
Δ - определитель графа сигналов.

Суммирование производится по всем имеющимся прямым путям.

Более широкому распространению теории графов сигналов препятствует отсутствие метода построения графов сигналов для систем с распределенными параметрами.

В основе предлагаемого метода лежит причинно-следственный способ построения графов по принципу суперпозиции, используемый для анализа линейных механических систем с постоянными коэффициентами, где каждому элементу и функциональной зависимости модели соответствует определенный табличный граф (см. таблицу). Рассмотрим этот метод на примере крутильных колебаний двухдискового ротора (рис. 1).

Обозначим f - податливость вала; J_1, J_2 - моменты инерции дисков; θ_1, θ_2 - углы поворота дисков; M_1, M_2 - моменты, приложенные к дискам; ρ - искомая частота колебаний. Графам сигналов вала и диска (см. таблицу и рис. 2) соответствуют матричные уравнения



Р и с. 1. Схема двухдискового ротора

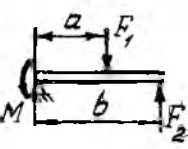
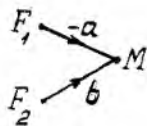
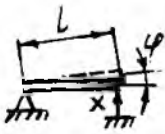
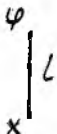
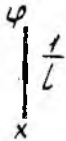

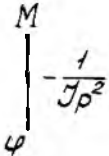
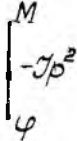
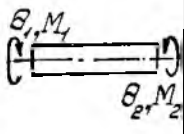
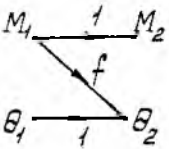
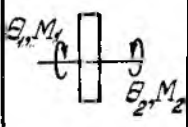
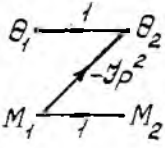
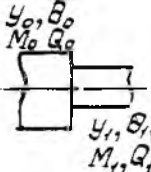
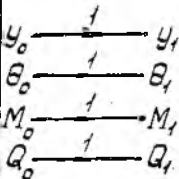
$$\begin{pmatrix} \theta' \\ M' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -J_1 \rho^2 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \theta_1 \\ M_1 \end{pmatrix},$$

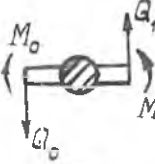
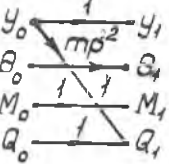
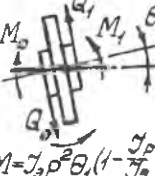
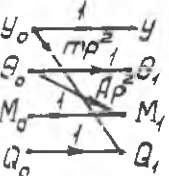

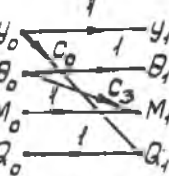

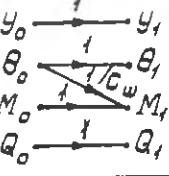
$$\begin{pmatrix} \theta'' \\ M'' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & f \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \theta'' \\ M'' \end{pmatrix}$$

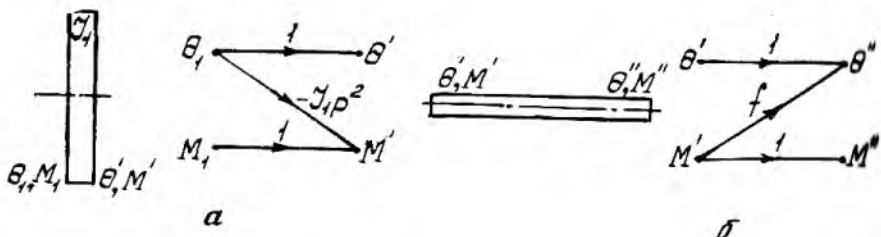
Общий граф сигналов ротора (рис. 3, а) строится путем соединения одноименных вершин графов элементов. Используя простейшие эквивалентные преобразования теории графов сигналов, исключаем вершины $\theta', \theta'', M', M''$ и получаем упрощенный граф (рис. 3, б) с коэффициентами передачи ветвей

$$A_{11} = 1 - J_1 \rho^2 f, A_{12} = f, A_{21} = J_1 J_2 \rho^4 f - J_1 \rho^2 - J_2 \rho^2, A_{22} = 1 - J_2 \rho^2 f.$$

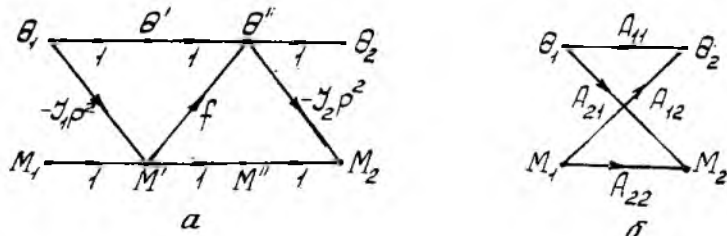
Элементы, участки и функциональные зависимости модели	Механический аналог	Основной граф сигналов	Инвертированный граф сигналов
1	2	3	4
Упругость			
Диссипативный элемент (демпфер)			
Инерционность поступательно-го движения			
Результирующая сила			
Эффект запаздывания сигнала			

1	2	3	4
Результирующая момент			—
Связь между линейными и угловыми перемещениями			
Инерционность вращения			
Крутящийся вал			—
Крутящийся диск			—
Ступенчатое изменение жесткости вала			—

1	2	3	4
Точечная масса			—
Вращающийся диск			—
Упругая опора c_0 с упругостью заземления c_2			—
Шарнир упругости c_ψ			—



Р и с. 2. Графы сигналов диска (а) и вала (б)



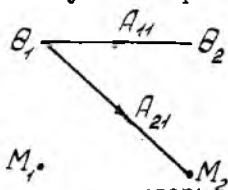
Р и с. 3. Общий (а) и упрощенный (б) графы сигналов ротора

Матричное уравнение, соответствующее общему графу сигналов, запишем в виде

$$\begin{Bmatrix} \theta_2 \\ M_2 \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} \\ A_{21} & A_{22} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \theta_1 \\ M_1 \end{Bmatrix}.$$

Для получения по графу сигналов частотного уравнения необходимо придерживаться следующих положений. Ветви, выходящие из вершин нулевых параметров, исключаются из графа. Коэффициенты передачи ветвей, входящих в вершину нулевого параметра, приравниваются к нулю. В случае наличия нескольких выходных параметров, равных нулю, из коэффициентов передачи ветвей, входящих в вершины этих параметров, составляется определитель, который также приравнивается к нулю. Эти равенства и дают уравнения частот.

Для ротора (см.рис.1) при $M_1 = 0$ граф сигналов принимает вид, изображенный на рис.4. В случае $M_2 = 0$ коэффициент A_{21} приравнивается к нулю, тогда уравнение частот запишется следующим образом:



Р и с. 4. Граф сигналов ротора при $M_1 = 0$

$$J_2 p^2 (1 - J_1 p^2 f) + J_1 p^2 = 0.$$

Этому уравнению соответствуют два значения частот:

$$p_1^2 = 0; \quad p_2^2 = \frac{J_1 + J_2}{f J_1 J_2}.$$

Если правый конец вала жестко закреплен, то $\theta_2 = 0$, следовательно, $A_{11} = 0$ и уравнение частот будет

$$1 - J_1 p^2 f = 0,$$

откуда $p^2 = \frac{1}{J_1 f}.$

При построении общего графа сигналов ротора, совершающего изгибные колебания, ротор разбивается на ряд отдельных участков, границами которых являются, как и в методе начальных параметров, места ступенчатого изменения жесткости вала, расположения сосредоточенных масс, дисков и опор. Наибольшую трудность представляет построение графа сигналов вала с распределенной массой.

Для участка однородного вала запишем систему уравнений в матричной форме, определяющих перемещения и усилия на правом конце [3]:

$$\begin{pmatrix} y_K \\ \theta_K \\ M_K \\ Q_K \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} S(k) & \frac{1}{\alpha} T(k) & \frac{1}{\alpha^2 EJ} U(k) & -\frac{1}{\alpha^3 EJ} V(k) \\ \alpha V(k) & S(k) & \frac{1}{\alpha EJ} T(k) & -\frac{1}{\alpha^2 EJ} U(k) \\ \alpha^2 EJ U(k) & \alpha EJ V(k) & S(k) & -\frac{1}{\alpha} T(k) \\ -\alpha^3 EJ T(k) & -\alpha^2 EJ U(k) & -\alpha V(k) & S(k) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y_0 \\ \theta_0 \\ M_0 \\ Q_0 \end{pmatrix}, \quad (1)$$

где $\alpha = \frac{k}{\ell}$; $k^4 = \frac{\mu p^2 \ell^4}{EJ}$; μ - погонная масса; ℓ - длина участка; индексы 0 и K означают начало и конец участка.

Представим матричное уравнение (1) в виде

$$\begin{pmatrix} y_K \\ \theta_K \\ M_K \\ Q_K \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} A_{11} & A_{12} & A_{13} & A_{14} \\ A_{21} & A_{22} & A_{23} & A_{24} \\ A_{31} & A_{32} & A_{33} & A_{34} \\ A_{41} & A_{42} & A_{43} & A_{44} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y_0 \\ \theta_0 \\ M_0 \\ Q_0 \end{pmatrix}.$$

Граф сигналов участка вала, соответствующий этому уравнению, изображен на рис. 5.

Уравнение (I) составлено для i -го участка постоянной жесткости (EJ); ступенчатого вала без сосредоточенных нагрузок. Из него могут быть получены все упрощенные расчетные соотношения для приведенных валов и однородных стержней [4].

Так, например, положив $\mu \rightarrow 0 (k \rightarrow 0)$ и использо-

вав первые слагаемые известных разложений sh , ch , \sin , \cos в ряды, получим из квадратной матрицы уравнения (I) матрицу жесткости. Задавшись граничными условиями для однородных стержней, найдем из матричной формы (I) уравнение частот.

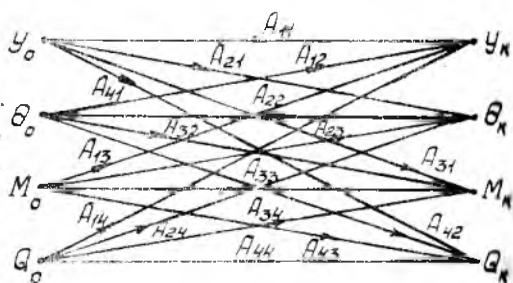
Если расчет производится без учета распределенных масс участка, то в качестве уравнений, связывающих начало и конец участка, берется следующее матричное уравнение, составленное для схемы, изображенной на рис. 6, а:

$$\begin{pmatrix} Y_k \\ \theta_k \\ M_k \\ Q_k \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & l & \alpha_{12} & \alpha_{11} - \alpha_{12}l \\ 0 & 1 & \alpha_{22} & \alpha_{12} - \alpha_{22}l \\ 0 & 0 & 1 & -l \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} Y_0 \\ \theta_0 \\ M_0 \\ Q_0 \end{pmatrix},$$

где $\alpha_{11} = \frac{l^3}{3EJ}$, $\alpha_{12} = \frac{l^2}{2EJ}$, $\alpha_{22} = \frac{l}{EJ}$ - коэффициенты влияния консольной балки. Тогда граф сигналов (см. рис. 5) примет вид, показанный на рис. 6, б.

Графы сигналов для переходов от одного участка вала к другому приведены в таблице. Влияние жесткой опоры учитывается добавлением единичной ветви, направленной от вершины реакции опоры к вершине порезывающего усилия Q в этом сечении. Причем путь от вершины предыдущего неопределенного параметра к вершине прогиба y , равного в этом сечении нулю, инвертируется, а ветви, выходящие из вершины этого прогиба y , исключаются.

Построение общего графа сигналов ротора заключается в последовательном соединении одноименных вершин графов участков и элементов ротора.

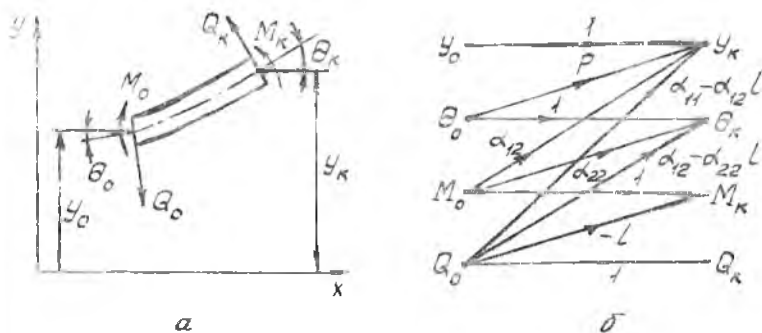


Р и с. 5. Граф сигналов участка вала при изгибных колебаниях

Таким образом, расчет динамических характеристик ротора, совершающего изгибные колебания, проводится следующим образом:

1. Механическая модель разбивается на элементы, участки и функциональные зависимости.

2. для них по таблице, рис. 5 или рис. 6,6 выбираются графы сигналов.



Р и с. 6. Участок вала (а) и его граф сигналов (б)

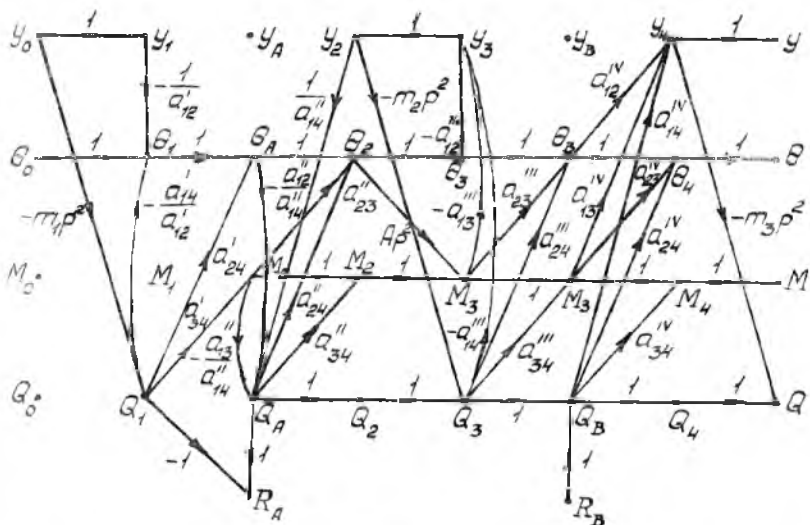
3. Из этих графов, используя принцип "причина—следствие" и соединяя одноименные вершины, строится общий граф сигналов модели.

4. По полученному общему графу методом упрощения графа или по правилу Шеннона—Мэсона определяются передаточные функции от источников к стокам. В случае модели, представляющей собой многомерную механическую цепь, задаются матрицы—столбцы входных и выходных сигналов. Исключая все вершины графа, не входящие в число входных и выходных сигналов, эквивалентными преобразованиями граф упрощается, а взаимосвязь между параметрами системы характеризуется передаточной матрицей, коэффициенты которой равны соответствующим коэффициентам передачи ветвей графа.

5. По полученному графу сигналов в зависимости от поставленной задачи, используя граничные условия, по вышеприведенному правилу определяются уравнения частот и вычисляются частотные характеристики ротора.

Рассмотрим пример построения графа сигналов ротора (рис. 7), совершающего изгибные колебания.

Разбиваем вал ротора на четыре участка. Для них и элементов модели (двух сосредоточенных масс и вращающегося диска) по рис. 6,6 и



Р и с. 9. Окончательный вид графа сигналов, изображенного на рис.8

Граф сигналов ротора ДЛА является его математической моделью и несет в себе информацию не только о взаимосвязи между параметрами, но и о составе и структуре механической модели ротора. Это позволяет облегчить анализ динамики системы в случае замены или введения новых элементов и функциональных зависимостей. Применение теории графов сигналов дает возможность проводить анализ без решения уравнений и получить аналитическое выражение передаточной функции между любыми входными и выходными сигналами. Для моделей с многомерной сложной структурой значительно увеличивается трудоемкость поиска коэффициентов передачи путей и контуров, а выражение передаточной функции становится громоздким. Поэтому, как отмечено выше, взаимосвязь между входными и выходными параметрами удобнее получать в виде передаточной матрицы. Для упрощения графа с успехом применяется ЭВМ [5].

В отличие от метода начальных параметров графовый метод не требует расчета значений промежуточных параметров. В то же время замена коэффициентов передачи ветвей графа на их численные значения позволяет получить передачи между параметрами системы в числовом компактном виде.

На основе теории графов сигналов можно получить математическую модель не только механических систем, но и сложных электромеханических

ких, гидравлических устройств и их сочетаний, а значит, и устанавливать взаимосвязь между различными динамическими процессами, происходящими в ДДА.

Л и т е р а т у р а

1. Мэзон С., Циммерман Г. Электронные цепи, сигналы и системы. - М.: Изд-во иностр. лит., 1963. - 620 с.
2. Вибрации в технике: Справочник. В 6-ти т. /Ред. совет: В.Н.Челомей (пред.). - М.: Машиностроение, 1981, Т.5. Измерения и испытания. - Под ред. М.Д.Генкина, 1981. - 496 с.
3. Хронин Д.В. Теория и расчет колебаний в двигателях летательных аппаратов. - М.: Машиностроение, 1970. - 412 с.
4. Бабаков И.М. Теория колебаний. - М.: Наука, 1968. - 560 с.
5. Робишо Л., Буавер М., Робер Ж. Направленные графы и их приложение к электрическим цепям и машинам /Пер. с фр. - М.; Л.: Энергия, 1964. - 248 с.