10. Дидковский В.С., Павловский М.А. Нестационарные колебания гироскопа с динамическим гасителем колебаний при разгоне ротора. – Доклады АН УССР. Сер. А., Физико-математические и технические науки, 1975, № 12, с.1096-1100.
11. Cunningham R.E., Gunter E.J., Fleming D.P. Design of An Oil Squeeze Film Damper Bearing For A Multimass Flexible Rotor Bearing System.– NASA TN–D–7892, p.30.
12. Кравцова Е.В., Поздняк Э.Л. Влияние места установки и характера возмущений на эффективность виброгасителей в роторных системах.– Машиноведение, 1980, № 4, с.32-37.
13. Иносов С.В., Севериновский М.Л. Оптимальное управление активным виброгасителем. – Машиноведение , 1979, № 3, с.10-11.
14. Allaire P.E., Lewis D.W., Knight J.D. Active Vibration Control of a Single Mass rotor on Flexible Supports.–Journal of the Franklin Institute, Vol.315, No.3, pp.211–222, March,1983.

УДК 531:539.3

Б.Ф.Шорр, О.Б.Каплунова

МАТЕМАТИЧЕСКОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ ИЗГИБНЫХ КОЛЕБАНИЙ БАЛКИ НА УПРУГОВЯЗКОМ ОСНОВАНИИ ПРИ ДВИЖУЩИХСЯ НАГРУЗКАХ

В развитие работы /1/, где рассматривалось воздействие движущейся нагрузки на пластину – полосу с малой изгибной жесткостью, ниже приводится решение задачи об изгибных колебаниях балки на упруговязком основании под действием внезапно приложенной к ней, а затем движущейся с переменной скоростью силы q_0 . Как и в работе /1/, для решения используется численный метод прямого математического моделирования волновых процессов /2-5/. Алгоритм "разнесения" движущейся нагрузки по границам тех элементов, на которые она воздействует в течение расчетных малых промежутков времени Δt /1/, не зависит от конкретного вида элементов и поэтому остается в силе и для данной задачи.

I. Применительно к проблеме математического моделирования распространения волн изгиба в балках постоянного сечения с учетом влияния сдвига и инерции поворота сечений (модель балки Тимошенко) алгоритм поэтапного расчета сводится к следующей системе соотношений /6/.

По известным для момента времени t значениям изгибающих моментов $M_{j-1,0}$, M_{j0}, поперечных сил $Q_{j-1,0}$, Q_{j0}, поперечных скоростей $v_{j-1,0}$, v_{j0}, угловых скоростей $\omega_{j-1,0}$, ω_{j0} и усилий в дополнительных сдвиговых податливостях граничных связей $\hat{Q}^{+}_{j-1,0}$, $\hat{Q}^{-}_{j0}$ для соседних (j - I)-го и j -го элементов, а также по известному прогибу y_{j*0} на границе между этими элементами определяются значения скоростей $v^{+}_{j-1,*} = v^{-}_{j*}$ и $\omega^{+}_{j-1,*} = \omega^{-}_{j*}$ на этой границе в течение промежутка времени Δt :

$$v^{-}_{j*} = \frac{Q_{j0} - Q_{j-1,0} + v_{j0} + v_{j-1,0} + (\beta - 1)(\hat{Q}^{-}_{j0} - \hat{Q}^{-}_{j-1,0}) + (q_j - 2\delta y_{j*0})\beta}{2[1 + \beta(\eta + \delta\alpha)]};$$

$$\omega^{-}_{j*} = \frac{\beta(M_{j0} - M_{j-1,0} + \omega_{j0} + \omega_{j-1,0}) + \alpha\left[Q_{j0} + Q_{j-1,0} + v_{j0} - v_{j-1,0} + (\beta - 1)(\hat{Q}^{-}_{j0} + \hat{Q}^{+}_{j-1,0})\right]}{2(\beta + \alpha^2)}.$$

Здесь $\alpha = 0{,}5\Delta x / z$; $\beta = k_c E/G$; $z = \sqrt{J/F}$; J - момент инерции; F - площадь поперечного сечения балки; k_c - коэффициент формы сечения при сдвиге; E - модуль продольной упругости; G - модуль сдвига. Длина элементов $\Delta x = c\Delta t$, где $c = \sqrt{E/\rho}$ - скорость распространения продольных волн (ρ - плотность материала балки). Коэффициент δ характеризует упругость, а η - вязкость основания. Действующая на границе между соседними элементами в течение текущего промежутка времени Δt нагрузка q_j определяется, как указано выше, в зависимости от скорости ее движения вдоль балки. Все параметры в расчете приведены в безразмерном виде: $\bar{Q} = Q/q_0$, $\bar{M} = M/q_0 z$, $\bar{v} = \rho c F v / q_0$, $\bar{\omega} = \rho c J \omega / q_0 z$, $\bar{y} = EFy/q_0 z$, $\bar{x} = x/z$, $\bar{t} = ct/z$, причем черточки над безразмерными параметрами опущены. Коэффициенты δ и η связаны с погонными коэффициентами упругости k_δ и вязкости k_η основания соотношениями
$\delta = \alpha z^4 k_\delta / EJ$ и $\eta = k_\eta \sqrt{\delta\alpha / k_\delta \rho F}$.

Определив v_{j*}^- и ω_{j*}^-, находим параметры возмущений, распространяющихся от правой границы ($j-1$)-го элемента:

$$\omega_{j-1}^+=\omega_{j*}^-;\ v_{j-1}^+=\left[v_{j*}^- -\alpha\omega_{j*}^- +(\beta-1)(v_{j-1,0}-Q_{j-1,0}+\hat{Q}_{j-1,0}^+)\right]/\beta;$$

$$M_{j-1}^+=M_{j-1,0}+\omega_{j-1}^+-\omega_{j-1,0};\ Q_{j-1}^+=Q_{j-1,0}+v_{j-1}^+-v_{j-1,0},$$

а по ранее найденным значениям параметров возмущений ω_{j-1}^-, v_{j-1}^-, M_{j-1}^-, Q_{j-1}^-, распространяющихся от левой границы ($j-1$)-го элемента, находим новые значения параметров ($j-1$)-го элемента для момента времени $t+\Delta t$ по идентичным формулам типа

$$\omega_{j-1,0}(t+\Delta t)=\omega_{j-1}^+ +\omega_{j-1}^- -\omega_{j-1,0}(t).$$

Кроме того, определяем

$$\hat{Q}_{j-1,0}^+(t+\Delta t)=2Q_{j-1}^+-\hat{Q}_{j-1,0}^+(t)$$

и

$$y_{j*0}(t+\Delta t)=y_{j*0}(t)+v_{j*}^-\Delta t.$$

Затем находим параметры возмущений, распространяющихся от левой границы j-го элемента:

$$\omega_j^-=\omega_{j*}^-;\ \ v_j^-=\left[v_{j*}^-+\alpha\omega_{j*}^-+(\beta-1)(v_{j0}+Q_{j0}-\hat{Q}_{j0}^-)\right]/\beta;$$

$$M_j^-=M_{j0}-\omega_j^-+\omega_{j0};\ Q_j^-=Q_{j0}-v_j^-+v_{j0};$$

$$\hat{Q}_{j0}^-(t+\Delta t)=2Q_j^- -\hat{Q}_{j0}^-(t),$$

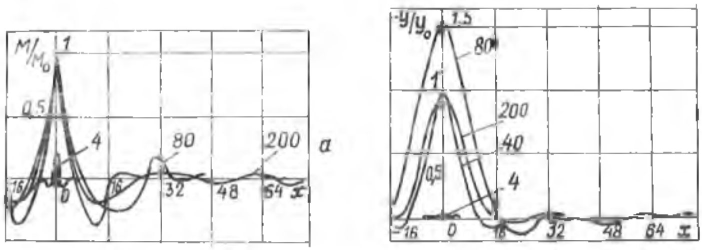
после чего переходим к расчету следующего стыка между j-м и ($j+1$)-м элементами, а после перебора всех стыков – к расчету следующего временного этапа.

Для балки конечной длины учитываются граничные условия на концах.

2. Рассмотрим вначале внезапное приложение к балке постоянной неподвижной силы q_0 = – I (в сечении j = I). В этом случае в силу симметрии системы следует принять граничные условия (для левого конца первого элемента) в виде $\omega_{1*}^-=0$ и q_1^- = – 0,5, что дает

$$v_{1*}^{-} = \frac{Q_{10} + v_{10} + (\beta - 1)\hat{Q}_{10}^{-} + (q_1^{-} - \sigma y_{1*0})\beta}{1 + \beta(\gamma + \sigma\alpha)}.$$

На рис.I показаны эпюры изгибающих моментов M/M_0 и прогибов y/y_0 для нескольких моментов безразмерного времени t. В расчете принято: α = 0,2; β = 7,II; $\sigma = 2\cdot10^{-4}$; $\gamma = 2{,}6\cdot10^{-3}$,



Р и с. I. Распределение изгибающих моментов (а) и прогибов (б) по длине балки при внезапно приложенной нагрузке для разных моментов времени, обозначенных числами

что соответствует данным работы /7/. Изгибающие моменты, прогибы и поперечные силы отнесены к величинам соответствующих теоретических значений M_0, y_0, Q_0 для задачи статического приложения нагрузки q_0 к балке на упругом основании без учета деформаций сдвига, когда для точки приложения нагрузки

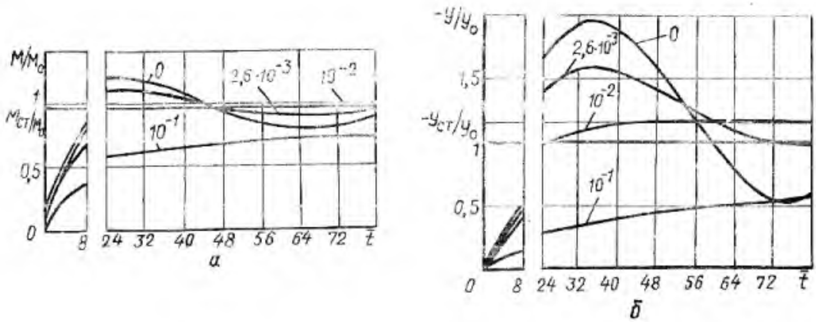
$$y_0 = 0{,}5(4\sigma^3/\alpha^3)^{-0{,}25} q_0 \; ; \quad M_0 = 0{,}5(4\sigma/\alpha)^{-0{,}25} q_0 \; ; \quad Q_0 = 0{,}5 q_0 \, .$$

На рис.2 показано изменение по времени изгибающих моментов и прогибов в точке приложения нагрузки как для чисто упругого, так и упруговязкого основания. И изгибающие моменты, и прогибы стремятся к стационарным значениям, практически совпадающим с данными аналитического расчета соответствующей балки с учетом деформаций сдвига, которые могут быть определены по вытекающим из работы /7/ формулам:

$$-y_{ст}/y_0 = (2R+1)/\sqrt{R(4R+1)}\, ; \quad M_{ст}/M_0 = 2\sqrt{R(4R+1)}\, , \text{ где } R = (2\beta\sqrt{\sigma/\alpha})^{-1}.$$

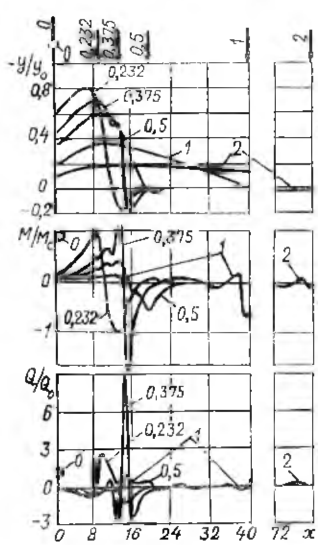
Отметим, что для более жесткого основания влияние сдвига становится более существенным.

Последующие рисунки относятся к расчету балки при движущейся нагрузке, которая в момент времени t = 0 внезапно прикладывается в сечении x = 0 (j = I).



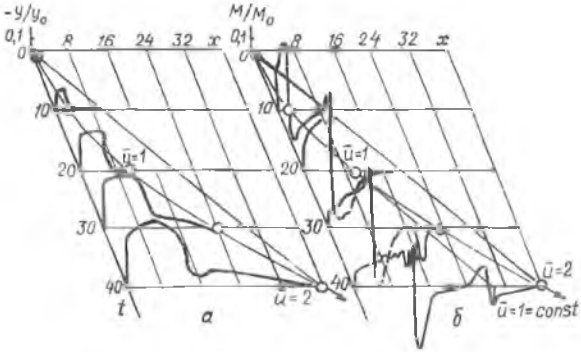
Р и с. 2. Изменение во времени изгибающих моментов (а) и прогибов (б) в точке приложения неподвижной нагрузки при различных коэффициентах вязкости основания γ, обозначенных числами

На рис.3 приведены эпюры прогибов y/y_0, изгибающих моментов M/M_0 и поперечных сил Q/Q_0 в момент времени t = 40 при различных постоянных скоростях $\bar{u} = u/c$ движения нагрузки q_0 = – I, положения которой в этот момент времени показаны стрелками. На эпюрах хорошо видна смена знака прогибов и изгибающих моментов в точке приложения движущейся силы при увеличении ее скорости в диапазоне "критических" значений (в данном примере $\bar{u}_1$ = 0,232 и $\bar{u}_2$ = 0,375), что отвечает аналитическому решению /7/; наблюдается также рост изгибающего момента M при движении со скоростью распространения продольных волн $\bar{u}_3$ = I. Скорость $\bar{u}_2$ соответствует скорости распространения волн сдвиговой деформации, а $\bar{u}_1$ – скорости волны, связанной с взаимодействием балки и упругого основания.



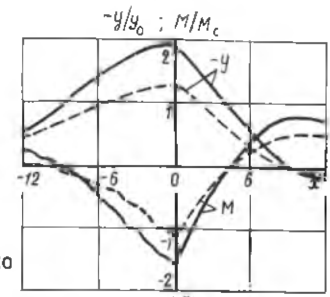
Р и с. 3. Распределение прогибов (а), изгибающих моментов (б) и поперечных сил (в) по длине балки в момент времени t = 40 и при различных постоянных скоростях движения нагрузки $\bar{u}$, обозначенных числами. Точками показаны стационарные значения соответствующих параметров при $\bar{u}$ = 0, x = 0

На рис.4 показано распределение прогибов y/y_0 и изгибающих моментов M/M_0 по длине балки для нескольких моментов времени при движении нагрузки



Р и с. 4. Распределение прогибов (а) и изгибающих моментов (б) по длине балки для разных моментов времени при движении нагрузки со скоростью, возрастающей за время t = 40 от $\bar{u}$ = 0 до $\bar{u}$ = 2. Точками показаны положения нагрузки

с переменной скоростью, возрастающей за время t = 40 от $\bar{u}$ = 0 до $\bar{u}$ = 2. Видно появление и распространение со скоростью $\bar{u}$ = I волны изгибающего момента при движении нагрузки с закритической скоростью $\bar{u} > 1$.



Р и с. 5. Распределение прогибов и изгибающих моментов на участке разрыва основания при длине разрыва $l_{разр}$ = I2 при $\bar{u}$ = 0,I в момент времени t - 60: ——— основание с разрывом, _ _ _ сплошное основание

В заключение приведем результаты расчета более сложного случая движения нагрузки по балке с местным разрывом основания, когда особенно отчетливо проявляются преимущества метода прямого моделирования процесса распространения волновых фронтов. Для учета разрыва основания достаточно ввести в программу условие, что при $j_1 \leq j \leq j_2$ (j_1, j_2 – номера элементов у границ разрыва) $\delta = \eta = 0$. На рис.5 показана сравнительная картина распределения прогибов и изгибающих моментов на участке разрыва основания в момент нахождения нагрузки в середине этого участка и при сплошном основании.

Библиографический список

1. Шорр Б.Ф. Математическое моделирование динамических процессов при движущихся нагрузках. - В сб.:Вибрационная прочность и надежность двигателей и систем летательных аппаратов. Куйбышев:КуАИ, 1983, с. 148-156.
2. Шорр Б.Ф. Прямое математическое моделирование процесса распространения механических возмущений в твердых деформируемых телах. - В сб.: Проектирование и доводка авиационных ГТД. Куйбышев:КуАИ, 1976, вып. 78, с.70-75.
3. Мельникова Г.В., Стратонова М.М., Шорр Б.Ф. Численное решение одномерных нелинейных задач механики сплошной среды методом прямого математического моделирования. - В сб.:Вопросы вычислительной и прикладной математики. Ташкент, 1980, вып.60, с.46-53.
4. Мельникова Г.В., Шорр Б.Ф. Исследование динамики систем с демпфирующими элементами сухого трения методом математического моделирования процесса распространения возмущений. - В сб.: У Всесоюзный съезд по теоретической и прикладной механике: Аннотации докладов. Алма-Ата: Наука, 1981. - 253 с.
5. Шорр Б.Ф. Математическое моделирование волновых процессов в упруговязкопластических телах. - МТТ, 1984, № 4, с.144-151.
6. Мельникова Г.В., Шорр Б.Ф. Изгибные колебания балок с демпфером сухого трения. - В сб.: ХШ конференция по вопросам рассеяния энергии при колебаниях механических систем: Тезисы докладов. Киев: Наукова думка, 1983, с. 57.
7. Муравский Г.Б. Колебания балки типа Тимошенко, лежащей на упругонаследственном основании. - МТТ, 1981, № 5, с.167-179.