

Х. С. ХАЗАНОВ

**КОНЦЕНТРАЦИЯ НАПРЯЖЕНИЙ  
В ЦИЛИНДРИЧЕСКОЙ ОБОЛОЧКЕ  
С КРУГОВЫМ ВЫРЕЗОМ****Принятые обозначения**

$R, h$  — радиус срединной поверхности и толщина оболочки,  
 $R_0$  — радиус отверстия,

$\lambda = \frac{R}{h}, \nu = \frac{R_0}{R}$  — безразмерные параметры оболочки,

$\xi, \eta$  — безразмерные декартовы координаты точек срединной поверхности оболочки, отнесенные к радиусу отверстия  $R_0$  (начало координат в центре отверстия),

$\rho = \frac{r}{R_0}, \theta$  — полярные на развертке цилиндра координаты,

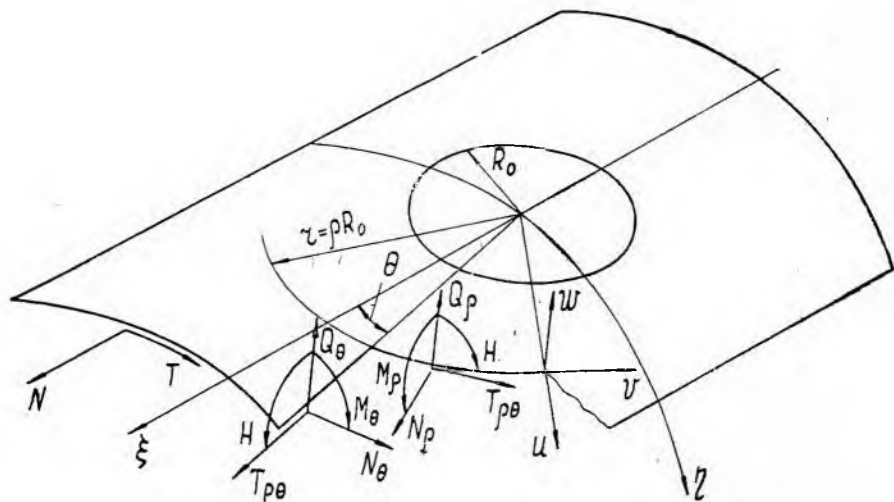
$E, \mu$  — модуль упругости и коэффициент Пуассона материала оболочки.

Первая работа по исследованию напряженного состояния цилиндрической оболочки с круговым вырезом принадлежит А. И. Лурье [7]. Рассмотрен случай весьма небольшого отверстия, что позволило решать задачу разложением решения в ряд по степеням малого параметра. Обширная библиография, посвященная применению этого метода рядом последователей, приведена в [5, 10, 12].

Некоторые частные результаты, касающиеся концентрации напряжений в цилиндрической оболочке с немалым круглым отверстием, получены с использованием прямых вариационных методов в [3, 4, 13]. В последние несколько лет появился ряд работ, где этот вопрос решается с более общих позиций. В работе [11] Г. Н. Савин и А. Н. Гузь получили решение дифференциального уравнения пологой цилиндрической оболочки в виде тригонометрического ряда в полярных координатах, что открывает большие перспективы для дальнейших исследований. Подобное решение получено и Леккеркеркером [6]. Числовые результаты по концентрации напряжений в цилиндрической оболочке, ослабленной круглым отвер-

стием, получены в [2, 6, 8]. Некоторые результаты с использованием решения вида [11] приведены в [9]. В статье автора [14] дается дальнейшее развитие идей работы [11], получены достаточно компактные выражения для усилий и перемещений, что позволяет решать широкий круг задач. Все формулы доведены до вида, удобного для эффективного использования ЭВМ.

В настоящей работе приводится решение некоторых конкретных задач по методике, изложенной в [14]. Напряженное состояние цилиндрической оболочки с отверстием условно разбивается на основное и дополнительное. В основном состоянии внутренние усилия подсчитываются от заданной внешней нагрузки как для



Фиг. 1.

оболочки без отверстия. В дополнительном состоянии по контуру выреза прикладываются усилия, равные по величине и обратные по направлению соответствующим усилиям основного состояния.

Для исследования дополнительного напряженного состояния используется комплексное уравнение тонкой полой цилиндрической оболочки [7], которое в безразмерных координатах имеет вид

$$\nabla^2 \nabla^2 F + 8i\omega^2 \frac{\partial^2 F}{\partial \xi^2} = 0, \quad (1)$$

где  $F = w + i\varphi$ ,  $\nabla^2 = \frac{\partial^2}{\partial \xi^2} + \frac{\partial^2}{\partial \eta^2}$ ,

$$\omega = \frac{1}{2} \sqrt[4]{3(1-\mu^2) \times \sqrt{\lambda}}. \quad (2)$$

В случае кругового выреза удобно пользоваться полярными на

развертке цилиндра (полугеодезическими) координатами (фиг. 1), положив

$$\xi = \rho \cos \Theta, \quad \eta = \rho \sin \Theta. \quad (3)$$

Решение уравнения (1) в полярных координатах для достаточно длинной оболочки, полученное с использованием [11], приведено в [14]. В частности, для напряженного состояния, симметричного или обратно симметричного относительно  $\xi$  и  $\eta$ , оно имеет соответственно вид

$$F_{2(\rho\Theta)} = \sum_{\nu=0, 2, 4 \dots}^{\infty} \sum_{n=0}^{\infty} l_{\nu} i^{\nu} a_n^{\circ} \bar{L}_{n\nu}(z) \cos \nu\Theta$$

$$\left( l_{\nu} = \frac{1}{2} \text{ при } \nu = 0, l_{\nu} = 1 \text{ при } \nu \neq 0 \right)$$

$$F_{4(\rho\Theta)} = \sum_{\nu=2, 4, 6 \dots}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} i^{\nu} a_n^{\circ} \bar{L}_{n\nu}^*(z) \sin \nu\Theta, \quad (4)$$

где

$$\bar{L}_{n\nu}(z) = H_n^{(1)}(z) [J_{n-\nu}(z) + J_{n+\nu}(z)],$$

$$\bar{L}_{n\nu}^*(z) = H_n^{(1)}(z) [J_{n-\nu}(z) - J_{n+\nu}(z)],$$

$z = x \sqrt{2i}$ ,  $x = \omega\rho$ ,  $a_n$  — комплексные постоянные.

Через  $H_n^{(1)}(z)$ ,  $J_{n-\nu}(z)$  обозначены первые функции Ганкеля и функции Бесселя с целыми индексами.

Положив

$$\bar{L}_{n\nu}(z) = \bar{\alpha}_{n\nu}(x) + i\bar{\beta}_{n\nu}(x), \quad \bar{L}_{n\nu}^*(z) = \bar{\alpha}_{n\nu}^*(x) + i\bar{\beta}_{n\nu}^*(x),$$

$$a_n^{\circ} = a_n + ib_n,$$

можно в (4) отделить действительную часть от мнимой. Через функцию напряжений  $\varphi$  определяются усилия в срединной поверхности (фиг. 1), а через перемещение  $w$  — моменты и перерезывающие силы. Расчетные формулы для определения внутренних сил в дополнительном состоянии приведены в [14]. Там же даны рекуррентные соотношения для подсчета функций  $\alpha_{n\nu}(x)$ ,  $\beta_{n\nu}(x)$  и их производных, а также системы алгебраических уравнений относительно постоянных  $a_n$  и  $b_n$ , вытекающие из граничных условий.

При практических расчетах можно в решениях (4), а следовательно и в выражениях для усилий, перейти от бесконечных рядов к усеченным, ограничив суммирование до  $n=\nu=k$ , где  $k$  зависит от степени сходимости решения.

а) *Осевое растяжение оболочки.* По торцам достаточно длинной оболочки приложены равномерно распределенные нормальные силы  $N$ . В основном состоянии получим

$$N_{\rho} = \frac{N}{2}(1 + \cos 2\Theta), \quad N_{\Theta} = \frac{N}{2}(1 - \cos 2\Theta), \quad T_{\rho\Theta} = -\frac{N}{2} \sin 2\Theta. \quad (5)$$

Правые части системы (36) в [14] имеют при этом вид

$$\hat{m}_\nu = \hat{q}_\nu = 0, \hat{n}_0 = \hat{n}_2 = -2\hat{t}_2, \hat{t}_2 = 2\omega \frac{\lambda N}{E}, \hat{n}_\nu = \hat{t}_\nu = 0 \text{ при } \nu > 2;$$

б) Действие внутреннего давления. Оболочка с днищем нагружена внутренним давлением  $p$ . Предполагается, что отверстие закрыто крышкой, передающей на оболочку лишь поперечную нагрузку  $q_\rho = \frac{pR_0}{2}$ , равномерно распределенную по контуру выреза. Внутренние усилия в основном состоянии равны

$$N_\rho^\circ = \frac{pR}{4} (3 - \cos 2\Theta), N_\Theta^\circ = \frac{pR}{4} (3 + \cos 2\Theta), T_{\rho\Theta}^\circ = \frac{pR}{4} \sin 2\Theta, \quad (6)$$

а правые части системы (36) в [14] имеют вид

$$\hat{m}_\nu = 0, \hat{q}_0 = 32\hat{t}_2, \hat{q}_\nu = 0 \text{ при } \nu \geq 2,$$

$$\hat{n}_0 = 6\hat{t}_2, \hat{n}_2 = -2\hat{t}_2, \hat{t}_2 = -\omega \frac{\lambda pR}{E}, \hat{n}_\nu = \hat{t}_\nu = 0 \text{ при } \nu > 2;$$

в) Кручение оболочки. По торцам оболочки приложены равномерно распределенные касательные силы  $T$ , создающие крутящий момент  $M_k = 2\pi R^2 T$ . В основном состоянии усилия в сечениях оболочки определяются из равенств

$$N_\rho^\circ = T \sin 2\Theta, N_\Theta^\circ = -T \sin 2\Theta, T_{\rho\Theta}^\circ = T \cos 2\Theta. \quad (7)$$

Для определения постоянных  $a_n$  и  $b_n$  используется система (42) из [14], правые части которой равны

$$\hat{m}_\nu = \hat{q}_\nu = 0, \hat{n}_2 = -2\hat{t}_2, \hat{t}_2 = 4\omega \frac{\lambda T}{E}, \hat{n}_\nu = \hat{t}_\nu = 0 \text{ при } \nu > 2.$$

Рассмотренные задачи были запрограммированы и просчитаны на ЭВМ «Урал-2»\*. Для обеспечения необходимой точности расчета вычисление по рекуррентным формулам функций,  $\alpha_{n\nu}(x), \beta_{n\nu}(x)$  и их производных проводилось с удвоенным числом значащих цифр.

После определения из систем (36) и (42) постоянных  $a_n$  и  $b_n$  по формулам работы [14] подсчитывались изгибающие моменты  $M_{2\Theta}$  (задачи а и б) и  $M_{4\Theta}$  (задача в), а также нормальные силы  $N_{2\Theta}$  и  $N_{4\Theta}$ , действующие по контуру отверстия ( $\rho = 1$ ) в дополнительном состоянии. Нормальные силы  $N_{2\Theta}$  и  $N_{4\Theta}$  суммировались с усилиями основного состояния  $N_\Theta^\circ$ , соответствующими рассматриваемой задаче.

Результаты расчета удобно представить в виде безразмерных величин, т. е. как отношение мембранных ( $\sigma_{\text{мем}}$ ) и изгибных ( $\sigma_{\text{изг}}$ ) напряжений, действующих по контуру отверстия, к характерным напряжениям для оболочки без выреза при тех же нагрузках. В случае осевого растяжения напряжения делились на  $\sigma_0 = \frac{N}{h}$ , при действии

\* Программирование задач и вычисление на ЭВМ выполнены инженером Г. В. Кановой.

внутреннего давления — на  $\sigma_0 = \frac{pR}{h}$ , при кручении — на  $\sigma_0 = \tau_0 = \frac{T}{h}$ .

Коэффициент Пуассона  $\mu$  принимался равным 0,3. В этом случае

$$\omega = 0,6427 \times \sqrt{\lambda} = 0,6427 \frac{R_0}{\sqrt{Rh}} \quad (8)$$

Расчеты выполнены для  $0,25 \leq \omega \leq 9$ . С целью оценки сходимости решения вычисления проводились с удержанием в (4) различного числа гармоник. В качестве примера в таблице 1 приведены результаты вычислений для случая осевого растяжения при  $\omega = 6$ . Здесь через  $\kappa = \nu_{\max}$  обозначен номер высшей гармоники усеченного ряда (4), а  $A_\nu$  и  $B_\nu$  представляют собой коэффициенты рядов

$$\frac{\sigma_{\text{мем}}}{\sigma_0} = \sum_{\nu=0, 2, 4, \dots}^{\kappa_1} A_\nu \cos \nu \Theta; \quad \frac{\sigma_{\text{изг}}}{\sigma_0} = \sum_{\nu=0, 2, 4, \dots}^{\kappa_2} B_\nu \cos \nu \Theta \quad (9)$$

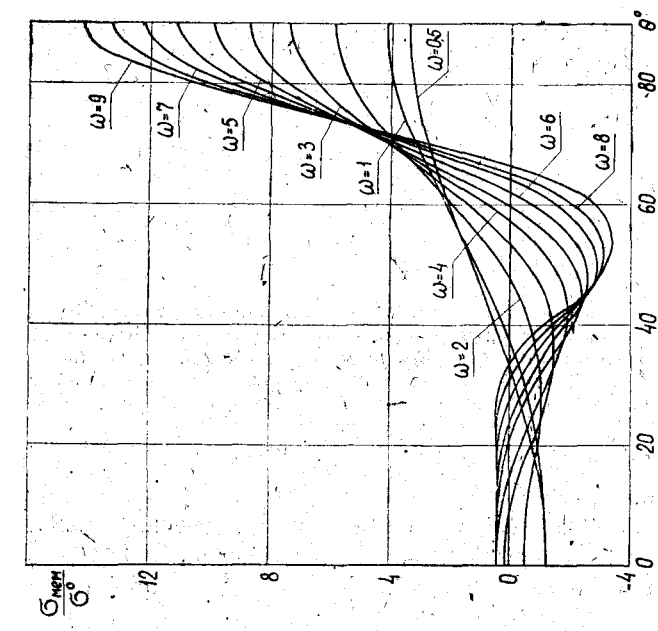
Таблица 1

$\kappa \backslash \nu$	0	2	4	6	8	10
Коэффициенты $A_\nu$						
6	1,51988	-3,45029	4,37288	0,23566	—	—
8	1,53801	-3,49616	4,07633	-1,88424	-0,48149	—
10	1,53818	-3,49707	4,06611	-1,84620	0,16233	-0,08000
12	1,53808	-3,49706	4,06710	-1,83820	0,18566	0,01191
14	1,53808	-3,49706	4,06711	-1,83845	0,18426	0,00374
16	1,53808	-3,49706	4,06711	-1,83846	0,18426	0,00379
Коэффициенты $B_\nu$						
6	0,44385	2,00267	-1,90438	-4,70808	—	—
8	0,43859	1,99903	-0,82750	0,32364	0,32359	—
10	0,43814	2,00023	-0,79497	0,22270	-0,07912	0,92080
12	0,43813	2,00065	-0,79687	0,20070	-0,02507	-0,03206
14	0,43813	2,00064	-0,79692	0,20121	-0,02089	-0,00099
16	0,43813	2,00064	-0,79692	0,20122	-0,02089	-0,00109

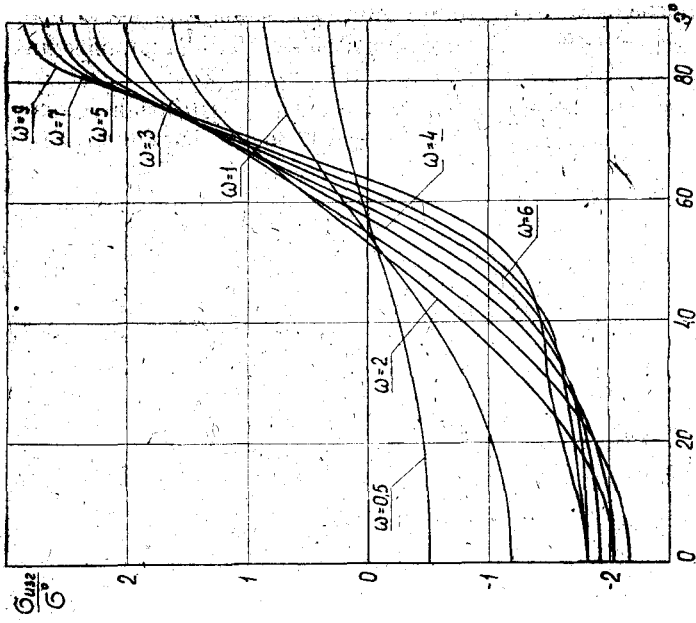
Из таблицы видно, что сходимость решения вполне удовлетворительная. Точность до третьей значащей цифры в значениях мембранных и изгибных напряжений обеспечивается при  $\kappa = 12$ . Наибольшая погрешность в величинах коэффициентов  $A_\nu$  и  $B_\nu$  получается при  $\nu = \kappa$ , вследствие чего для больших  $\omega$  суммирование в (9) велось до  $\kappa_1 = \kappa - 2$ .

С уменьшением параметра  $\omega$  сходимость решения улучшается. Так, для  $\omega = 4$  точность до третьей значащей цифры обеспечивается при  $\kappa = 10$ , для  $\omega = 2$  — при  $\kappa = 6$  и т. д. Аналогичные результаты получены и при исследовании сходимости решения в случае действия внутреннего давления и кручения оболочки.

На фиг. 2 и 3 показано изменение мембранных и изгибных напряжений по контуру отверстия для осевого растяжения оболочки. Мембранные напряжения достигают максимума при  $\Theta = 90^\circ$ . Изгиб-



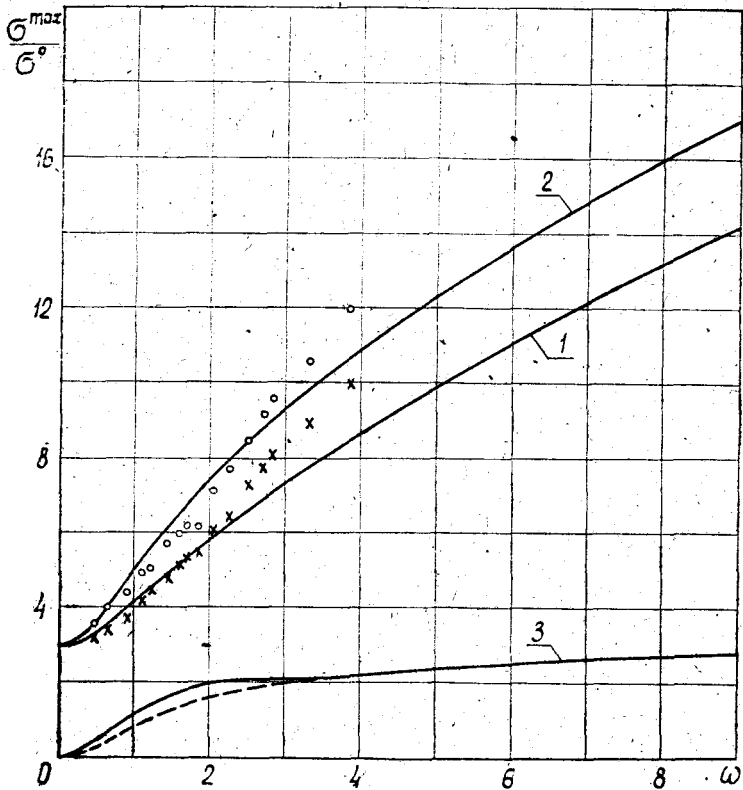
Фиг. 2. Напряжения в средней поверхности по контуру отверстия при осевом растяжении оболочки.



Фиг. 3. Изгибные напряжения по контуру отверстия на внутренней поверхности оболочки при ее осевом растяжении.

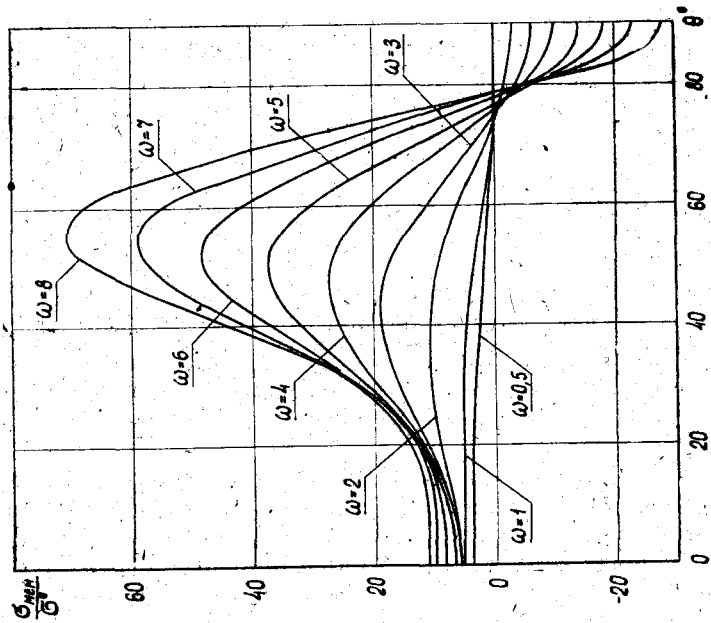
ные же напряжения имеют наибольшие значения для  $\omega \leq 3$  при  $\theta = 0$ , а затем  $\gamma$  при  $\theta = 90^\circ$ . В диапазоне  $\omega = 1,5 \div 2$  напряжения  $\sigma_{изг}^{max}$  составляют до 35% от  $\sigma_{мем}^{max}$ .

На фиг. 4 дана зависимость максимальных мембранных, изгибных и суммарных ( $\sigma_{сум} = \sigma_{мем} \pm \sigma_{изг}$ ) напряжений от параметра  $\omega$ . Пунк-

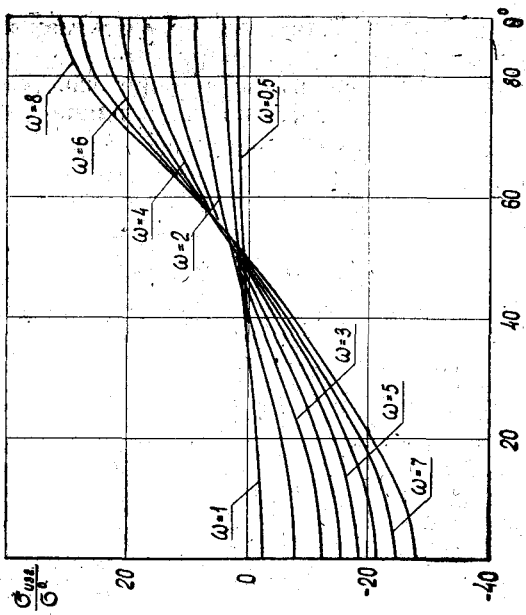


Фиг. 4. Зависимость максимальных напряжений по контуру отверстия от параметра  $\omega$  при осевом растяжении оболочки. Кривая 1 и крестики соответствуют напряжениям в срединной поверхности, кривая 2 и кружочки — суммарным напряжениям на внутренней поверхности, кривая 3 — изгибным напряжениям на внутренней поверхности оболочки.

тирный участок кривой 3 соответствует  $\theta = 90^\circ$ . Из приведенных графиков видно, что изгибные напряжения существенно сказываются на максимальной величине суммарных напряжений, действующих по внутренней поверхности оболочки. При  $\omega = 2,5$ , например,  $\sigma_{сум}^{max} = 1,28\sigma_{мем}^{max}$ .



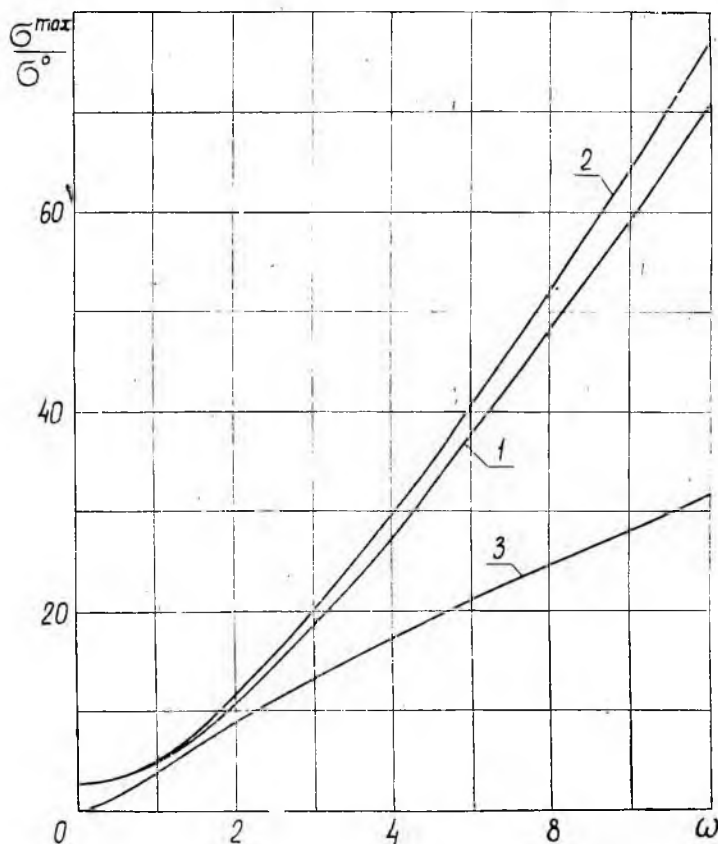
Фиг. 5. Напряжения в средней поверхности оболочки по контуру отверстия при действии внутреннего давления.



Фиг. 6. Изгибные напряжения по контуру отверстия на наружной поверхности оболочки при действии внутреннего давления.



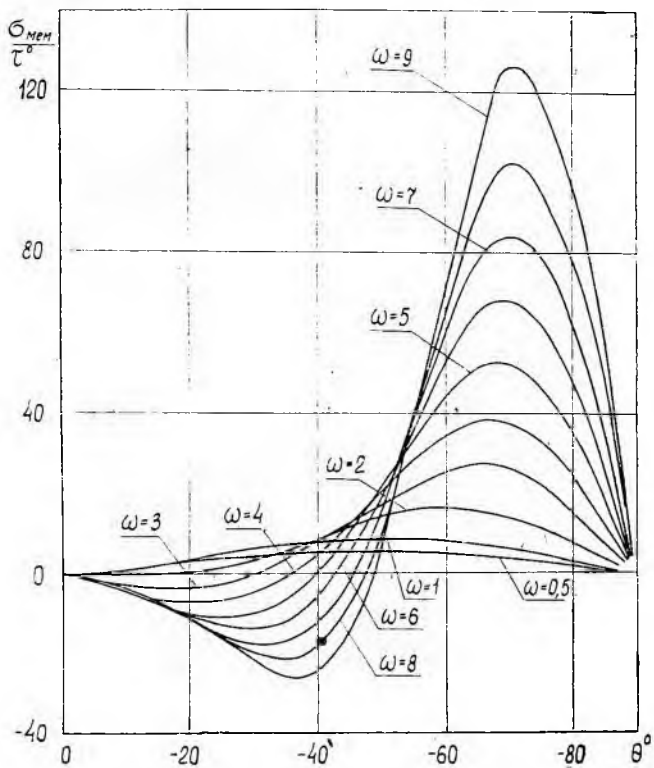
Изменение мембранных и изгибных напряжений по контуру отверстия в случае нагружения оболочки внутренним давлением показано на фиг. 5 и 6, а на фиг. 7 дана зависимость максимальных мембранных, изгибных и суммарных напряжений от параметра  $\omega$ . Хотя изгибные напряжения и достаточно велики (для  $\omega = 1 \div 1,5$ , например,  $\sigma_{\text{изг}}^{\text{max}} = 0,85 \sigma_{\text{мем}}^{\text{max}}$ ), но их влияние на наибольшие значения суммарных напряжений по наружной по-



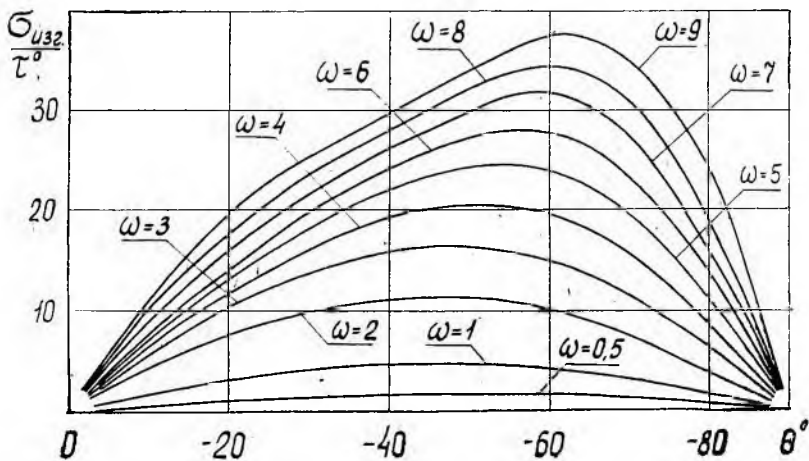
Фиг. 7. Зависимость максимальных напряжений по контуру отверстия от параметра  $\omega$  при действии внутреннего давления. Кривая 1 соответствует напряжениям в срединной поверхности, кривая 2 — суммарным напряжениям на наружной поверхности; кривая 3 — изгибным напряжениям на наружной поверхности оболочки.

верхности оболочки не столь существенно. В тех точках, где мембранные напряжения достигают максимума, изгибные напряжения невелики.

Совсем иная картина наблюдается при кручении оболочки. Из фиг. 8 и 9 видно, что изгибные и мембранные напряжения дости-



Фиг. 8. Напряжения в срединной поверхности по контуру отверстия при кручении оболочки.

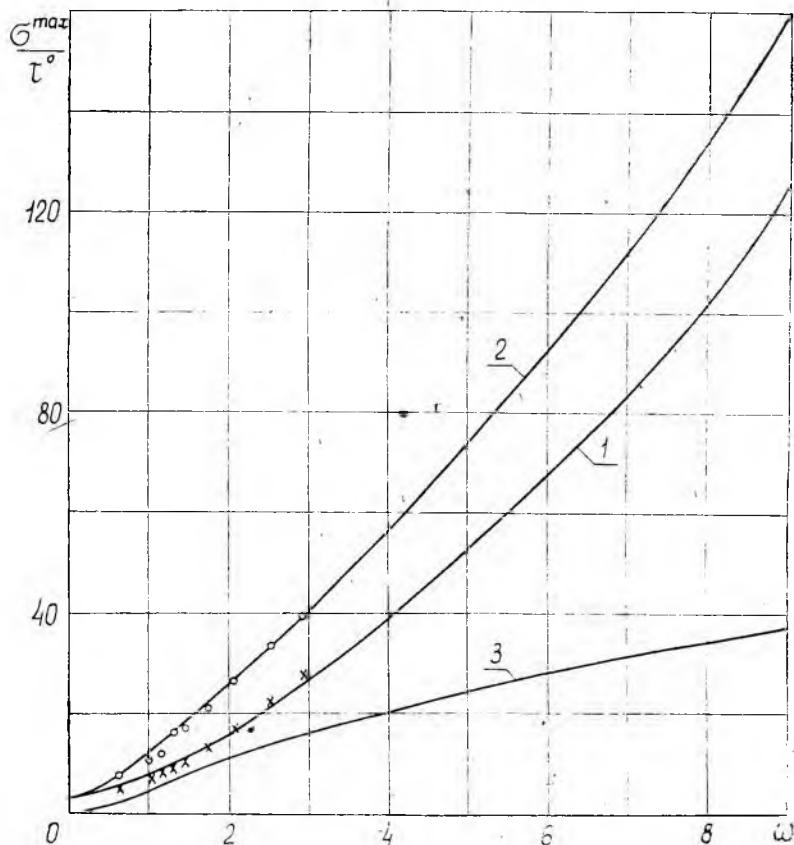


Фиг. 9 Изгибание напряжения по контуру отверстия на внутренней поверхности оболочки при ее кручении.

гают здесь максимальных значений в близких по контуру отверстия точках. Вследствие этого, наибольшие суммарные напряжения по внутренней поверхности оболочки намного превышают мембранные напряжения (фиг. 10). Так, например, при  $\omega = 1,5$

$$\sigma_{\text{сум}}^{\text{max}} = 1,75 \sigma_{\text{мем}}^{\text{max}}$$

Приведенные графики изменения мембранных и изгибных напряжений по контуру отверстия позволяют решать вопрос о концентрации напряжений при комбинированных нагрузках.



Фиг. 10. Зависимость максимальных напряжений по контуру отверстия от параметра  $\omega$  при кручении оболочки. Кривая 1 и крестики соответствуют напряжениям в срединной поверхности; кривая 2 и кружочки — суммарным напряжениям на внутренней поверхности; кривая 3 — изгибным напряжениям на внутренней поверхности оболочки.

Точками на фиг. 4 и 10 показаны результаты экспериментальных исследований, заимствованные из работы [1]. Экспериментальные данные вполне удовлетворительно согласуются с расчетными кривыми, особенно для кручения оболочки. Наибольшие расхождения между экспериментальными и расчетными значениями напря-

жений на внутренней поверхности оболочки в случае осевого растяжения составляют около 12% (при  $\omega \approx 4$ ).

Результаты вычислений, приведенные в настоящей статье, совпадают с аналогичными данными работ [2, 5, 8, 9]. Но в последних расчеты выполнены для  $\omega \leq 2 \div 4$ . Наиболее обширные числовые результаты представлены в [2] ( $\omega \leq 4$ ). Удовлетворение граничным условиям по контуру выреза осуществлено здесь методом точечной коллокации, что потребовало для обеспечения достаточной точности при  $\omega = 4$  удержания в решении уравнения (1) 26 членов ряда. Приведены графики, показывающие быстрое затухание изгибных напряжений по мере удаления от края выреза.

В работе [2] сделана также попытка, на основании исследования пограничной зоны, оценить мембранные напряжения по контуру отверстия и при  $\omega > 4$ . Для наибольших мембранных напряжений в случае осевого растяжения получены удовлетворительные результаты, чего нельзя сказать о прочих исследованиях.

#### ЛИТЕРАТУРА

1. А. Я. Александров, М. Х. Ахметзянов, А. С. Ракин. Исследование упруго-пластического деформирования оболочек с вырезами и усилениями методом фотоупругих покрытий. Прикладная механика, т. II, вып. 3, Киев, 1966.
2. Ван-дейк. Напряжения около круглого отверстия в цилиндрической оболочке. Ракетная техника и космонавтика, АГАА, русский перевод, № 9 Journal, 1965.
3. Н. Г. Василенко. Напряженное состояние в цилиндрической оболочке, ослабленной круговым отверстием. Автореферат кандидатской диссертации ЛПИ, 1953.
4. А. Н. Гузь. Приближенные решения некоторых задач о концентрации напряжений около отверстий в изотропных и ортотропных оболочках. Труды IV Всесоюзной конференции по теории оболочек и пластин, изд-во АН Арм. ССР, 1964.
5. Э. И. Григолюк, Л. А. Фильштинский. Перфорированные пластины и оболочки и связанные с ними проблемы. Обзор результатов. В сб. «Итоги науки. Упругость и пластичность. 1965». ВИНТИ, 1967.
6. Lekkerkerker J. G. On the stress distribution in cylindrical shells weakened by a circular hole. Uitgeverij Waltman, Delft, 1935.
7. А. И. Лурье. Статика тонкостенных оболочек. Гостехиздат, 1947.
8. Naqdi A. K. and Eringen A. C. Stress distribution in a circular cylindrical shell with a circular cutout. Ingenieur-Archiv, 34, № 3, 1965.
9. А. К. Приварников, В. Н. Чехов. Концентрация напряжений в круговой цилиндрической оболочке, ослабленной круговым вырезом. Гидромеханика, вып. 2, издат. Харьковского Госуниверситета, 1965.
10. Г. Н. Савин. Концентрация напряжений около отверстий в оболочках. Труды II Всесоюзной конференции по теории пластин и оболочек. Изд-во АН УССР, Киев, 1962.
11. Г. Н. Савин, А. Н. Гузь. К вопросу о концентрации напряжений возле отверстий в цилиндрической оболочке. Доповіді АН УРСР, № 11, 1964.
12. Г. Н. Савин. Концентрация напряжений около криволинейных отверстий в пластинах и оболочках. В юб. «Концентрация напряжений», вып. 1, Наука думка, Киев, 1965.
13. О. А. Фролов. Концентрация напряжений в цилиндрической оболочке, ослабленной вырезом. Труды конференции по теории пластин и оболочек Казань, 1961.
14. Х. С. Хазанов. К расчету цилиндрических оболочек с круглыми отверстиями. Труды Куйбышевского авиационного института, вып. XXIX, 1967.