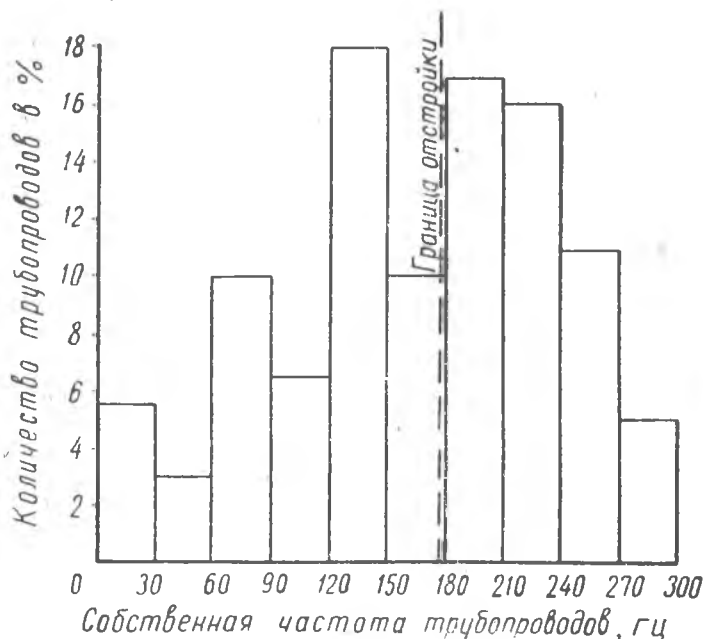


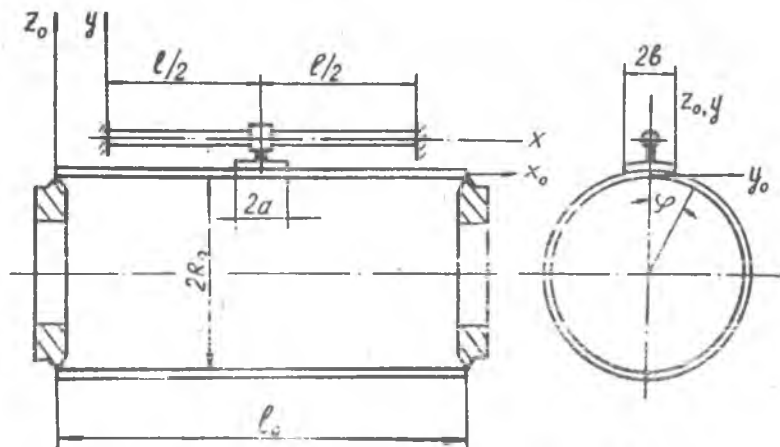
Н. С. КОНДРАШОВ

**КОЛЕБАНИЯ ТРУБОПРОВОДОВ ГТД,
ЗАКРЕПЛЕННЫХ НА ОБОЛОЧЕЧНОМ КОРПУСЕ**

Для частотной отстройки трубопроводов ГТД их собственные частоты определяют из предположения абсолютной жесткости корпусов. Однако проверка собственных частот трубопроводов на двигателе показывает уменьшение фактических частот по сравнению с расчетными. Например, на двигателе длины участков выбирались из условия, чтобы минимальная собственная частота



Фиг. 1. Экспериментально определенные собственные частоты трубопроводов



Фиг. 2. Расчетная схема системы оболочка — трубопровод

трубопроводов была $f_{\min} \geq 180$ гц. Эксперимент выявил, что из 194 участков 97 имеют частоту ниже 180 гц (фиг. 1). Такое снижение фактических собственных частот по сравнению с расчетными в большинстве случаев объясняется податливостью корпусов, к которым крепятся трубопроводы.

Чтобы учесть влияние податливого корпуса на собственные частоты трубопровода, рассматривается задача о совместных колебаниях оболочечного корпуса и связанного с ним трубопровода. Корпус в виде цилиндрической оболочки опирается на жесткие диафрагмы, трубопровод по краям жестко заделан. Связь трубопровода с оболочкой осуществляется в их серединах (фиг. 2). При решении этой задачи ставится цель найти критерий, по которому можно было бы отнести тот или иной корпус к разряду жестких или податливых.

Вывод частотного уравнения

Для решения задачи разорвем связь и взаимодействие трубки и оболочки заменим реакцией связи R_c . После этого будем отдельно рассматривать вынужденные колебания оболочки и трубки под действием силы R_c . На фиг. 2 показана система координат, принятая для трубки и оболочки. Будем полагать, что реакция связи R_c к трубке прикладывается в виде сосредоточенной силы, а к оболочке — в виде равномерно распределенной нагрузки q

$$q = \frac{R_c}{4ab}, \quad (1)$$

приложенной на площадке

$$-\frac{b}{R_0} < \varphi < \frac{b}{R_0}, \quad \frac{l_0}{2} - a < x_0 < \frac{l_0}{2} + a \quad (2)$$

Здесь x_0 и φ — осевая и угловая текущие координаты точек поверхности оболочки, отсчитываемые соответственно от левого конца и от центра площадки приложения нагрузки;

R_0, l_0 — радиус и длина оболочки;

$2a, 2b$ — длина и ширина приложения нагрузки.

Размеры площадки нагружения оболочки определяются конструкцией места установки хомута крепления трубопровода. Хотя равномерное распределение нагрузки на этой площадке является приближенным приемом, ввиду неоправданной в данном случае сложности точного решения рассматриваемой контактной задачи используем его для наших целей. Тем более, что на основании принципа Сен-Венана напряжения, определённые с помощью такого приема, могут отличаться от действительных только на площадке контакта и в непосредственной близости к ней. Поэтому, учитывая конструктивное оформление площадки в виде жесткого ядра, совершенно безразлично, как будет приложена нагрузка в пределах площадки. И только вблизи нее, вследствие концентрации, будем иметь отклонения напряжений от действительных значений. Вычисляемые здесь перемещения, по-видимому, будут незначительно отличаться от действительных и не могут повлиять на качественные выводы, вытекающие из рассматриваемой задачи. Погрешность, которая будет вноситься при этом, оценивается экспериментально.

Введем далее относительные координаты

$$\xi_0 = \frac{x_0}{R_0}, \quad \beta = \frac{b}{R_0}, \quad \gamma_1 = \frac{l_0}{2R_0}, \quad \alpha = \frac{a}{l_0}.$$

Движение оболочки описывается системой двух дифференциальных уравнений — уравнения Власова — Донелла [1]

$$\frac{1}{E_0 h} \nabla^4 \Psi^r - R_0 \frac{\partial^2 W}{\partial \xi_0^2} = 0.$$

$$R_0 \frac{\partial^3 \Psi^r}{\partial \xi_0^3} + D \nabla^4 W + \rho_0 h R_0^4 \frac{\partial^2 W}{\partial t^2} = R_0^4 q, \quad (3)$$

где $E_0 \rho_0$ — модуль упругости и плотность материала оболочки;

h — толщина стенки оболочки;

$D = \frac{E_0 h^3}{12(1-\nu^2)}$ — цилиндрическая жесткость оболочки;

t — время;

W — радиальное перемещение оболочки;

Ψ^r — потенциальная функция напряжений;

$\nabla^2 = \frac{\partial^2}{\partial \xi_0^2} + \frac{\partial^2}{\partial \varphi^2}$ — оператор Лапласа на поверхности в цилиндрических

координатах.

В уравнениях (3) не учитываются силы инерции при осевых и тангенциальных перемещениях, которые на низшие собственные частоты не оказывают существенного влияния.

Для гармонических колебаний нагрузки, перемещение и функцию напряжений запишем в виде

$$\begin{aligned} q &= q_0 \sin \omega t, \\ W &= w \sin \omega t, \\ \Psi &= \psi \sin \omega t, \end{aligned} \quad (4)$$

где ω — круговая частота колебательного движения.

Подставляя (4) в (3), исключим время, после чего система приобретает вид

$$\begin{aligned} \frac{1}{E_0 h} \nabla^4 \psi - R_0^2 \frac{\partial^2 w}{\partial \xi_0^2} &= 0, \\ R_0 \frac{\partial^2 \psi}{\partial \xi_0^2} + D \nabla^4 w - \rho_0 h R_0^4 \omega^2 w &= R_0^4 q_0. \end{aligned} \quad (5)$$

Дальше задачу будем решать методом разложения нагрузки в ряд по собственным формам радиальных перемещений. Представим нагрузку в виде двойного ряда

$$q_0 = \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} q_{mn} \sin \lambda_m \xi_0 \cos n\varphi. \quad (6)$$

Здесь

$$\lambda_m = \frac{\pi m R_0}{l_0}$$

m — количество полуволн по длине оболочки;

n — количество волн по окружности.

Коэффициенты разложения нагрузки в ряд с учетом (1), (2) определяются по формуле

$$q_{mn} = \frac{2R_0}{\pi^2 abmn} \sin n\beta \sin \pi m\chi \sin \lambda m\eta. \quad (7)$$

После подстановки прогиба и функции напряжений в виде двойных рядов

$$\psi = \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} \psi_{mn} \sin \lambda_m \xi_0 \cos n\varphi \quad (8)$$

$$w = \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} w_{mn} \sin \lambda_m \xi_0 \cos n\varphi$$

в систему уравнений (5) получим w_{mn} и ψ_{mn} — коэффициенты разложения, с учетом которых функции прогибов и напряжений запишем

$$\psi = -\frac{E_0 R_0}{\rho_0} \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\lambda_m^2}{(\lambda_m^2 + n^2)} \frac{q_{mn} \sin \lambda_m \xi_0 \cos n\varphi}{\Omega_{\min}^2 \left(\frac{\tilde{\Omega}_{\min}^2 mn}{\Omega_{\min}^2} - \frac{\omega}{\tilde{\Omega}_{\min}^2} \right)}, \quad (9)$$

$$\omega = \frac{1}{h\rho_0} \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{q_{mn} \sin \lambda_m \xi_0 \cos n \varphi}{\tilde{\Omega}_{\min}^2 \left(\frac{\tilde{\Omega}_{mn}^2}{\tilde{\Omega}_{\min}^2} - \frac{\omega}{\tilde{\Omega}_{\min}^2} \right)}$$

Здесь

$$\tilde{\Omega}_{mn}^2 = \frac{1}{\rho_0 h R_0^2} \left[\frac{D}{R_0^2} (\lambda_m^2 + n^2)^2 + \frac{E_0 h \lambda_m^4}{(\lambda_m^2 + n^2)^2} \right] - \text{квадрат собственной частоты } m, n\text{-ой формы колебания оболочки без присоединенного трубопровода;}$$

$$\tilde{\Omega}_{\min}^2 = \frac{\pi E_0 h}{\sqrt{3(1-\nu^2)} \rho_0 l_0^2 R_0} - \text{квадрат минимальной собственной частоты оболочки без присоединенного трубопровода.}$$

Радиальные перемещения оболочки в центре площадки приложения нагрузки определяются выражением

$$\omega_c = \frac{2R_c}{\pi^2 a b h f_0^2 \tilde{\Omega}_{\min}^2} \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin n \beta \sin \pi m \alpha \sin^2 \lambda_m \eta}{m n \left(\frac{\tilde{\Omega}_{mn}^2}{\tilde{\Omega}_{\min}^2} - \frac{\omega}{\tilde{\Omega}_{\min}^2} \right)} \quad (10)$$

Аналогичным образом, решая задачу для трубопровода (решение не приводится, оно известно) разложением внешней нагрузки в ряд по собственным формам жестко заземленной балки, получим для прогиба трубопровода выражение

$$y_c = - \sum_{k=1}^{\infty} \frac{R_c y_k^2(0,5 \tilde{x}_k)}{\pi l \rho R^2 (1-\bar{r}^2) \omega \left(\frac{\tilde{\Omega}_k^2}{\omega^2} - 1 \right)} \int_0^1 y_k(\tilde{x}_k \xi) d\xi \quad (11)$$

где $\tilde{\Omega}_k$, y_k , \tilde{x}_k — собственная частота, распределение прогибов и частотный коэффициент не связанного трубопровода при k -ой форме колебания;

l , R — длина и наружный радиус трубопровода;

\bar{r} — отношение наружного и внутреннего радиусов трубопровода;

ρ — плотность материала трубопровода;

$\xi = \frac{x}{l}$ — относительная координата.

Если частота возбуждающей реакции связи будет равна собственной частоте совместных колебаний, то перемещения оболочки и трубопровода в месте связи должны быть одинаковыми

$$\omega_c = y_c \quad (12)$$

Подставляя (10) и (11) в последнее равенство, получим частотное уравнение совместных колебаний оболочки с закрепленным на ней трубопроводом

$$\frac{2l\rho R^2(1-r^2)}{\pi abh\rho_0} \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin n\beta \sin \pi m\alpha \sin^2 \lambda_m \eta}{mn \left(\frac{\tilde{Q}_{mn}^2}{\tilde{Q}_{\min}^2} - \frac{a^2}{\tilde{Q}_{\min}^2} \right)} =$$

$$= - \sum_{k=1}^{\infty} \frac{y_k^2(0,5\tilde{\alpha}_k)}{\left(\frac{\tilde{Q}_k^2}{\tilde{Q}_{\min}^2} - \frac{\omega^2}{\tilde{\omega}_{\min}^2} \right) \int_0^1 y_k^2(\alpha_k \xi) d\xi} \quad (13)$$

Если размеры площадки приложения нагрузки малы по сравнению с размерами оболочки, то уравнение (13) упрощается

$$4 \frac{M_T}{M_0} \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin \lambda_m \eta}{\left(\frac{\tilde{Q}_{mn}^2}{\tilde{Q}_{\min}^2} - \frac{\omega^2}{\tilde{Q}_{\min}^2} \right)} = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{y_k^2(0,5\tilde{\alpha}_k)}{\left(\frac{\tilde{Q}_k^2}{\tilde{Q}_{\min}^2} - \frac{\omega^2}{\tilde{Q}_{\min}^2} \right) \int_0^1 y_k^2 d\xi} \quad (14)$$

где M_T — масса трубопровода;
 M_0 — масса оболочки.

Решение частотного уравнения

Полученные равенства (13) и (14) суть частотные уравнения совместных колебаний оболочки с закрепленным на ней трубопроводом.

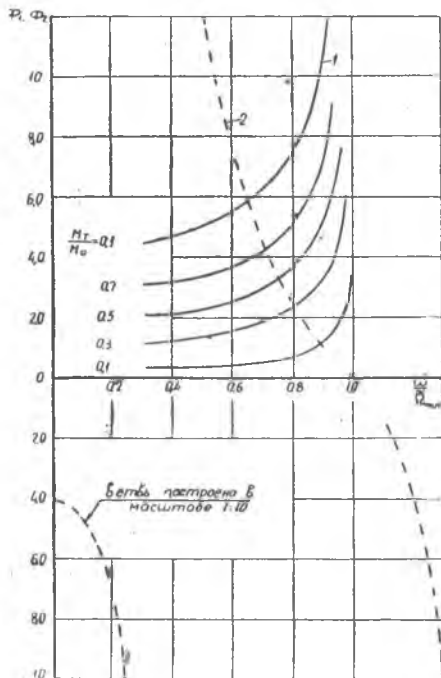
Из этих уравнений нельзя в явном виде вырывать собственную частоту совместных колебаний. Однако они сравнительно просто решаются графическим способом. Для этого функции, выражающие левую Φ_1 и правую Φ_2 части равенств (14), (13) необходимо построить в зависимости от $\frac{\omega^2}{\tilde{\omega}_{\min}^2}$. Точки пересечения функций Φ_1 и Φ_2 дадут

отношение $\frac{\omega^2}{\tilde{\omega}_{\min}^2}$, определяющее собственные частоты совместных колебаний рассматриваемой системы. На фиг. 3 приведено графическое решение уравнения (14). В зависимости от свойств оболочки и частоты отстройки ω_B при осуществлении частотной отстройки креплением трубопровода на оболочке могут встретиться два основных случая

$$\frac{\tilde{Q}_{\min}}{\omega_B} < 1 \quad \text{и} \quad \frac{\tilde{Q}_{\min}}{\omega_B} > 1.$$

В первом случае жесткой связью трубопровода с оболочкой невозможно обеспечить частоту трубопровода выше частоты возбуждения, т. е. невозможно осуществить частотную отстройку.

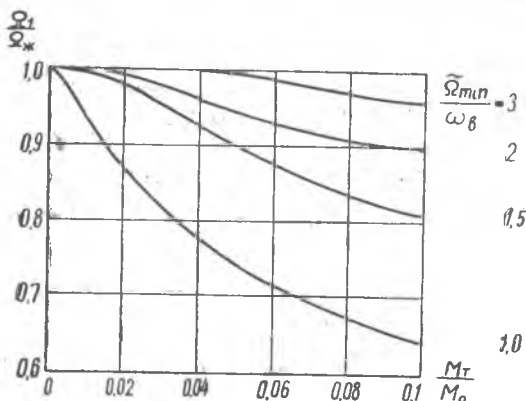
Действительно, несвязанные оболочка и трубопровод имеют минимальные собственные частоты Ω_{\min} и Ω_1 , частота совместных колебаний Ω будет иметь среднее между ними значение. Если $\tilde{\Omega}_{\min} > \tilde{\Omega}_1$, то $\Omega < \tilde{\Omega}_{\min}$. Если $\tilde{\Omega}_{\min} < \tilde{\Omega}_1$, то в силу особенностей частотного спектра оболочки, состоящей в том, что частота, следующая за минимальной, практически не отличается от минимальной, $\Omega \approx \Omega_{\min}$.



Фиг. 3. Пример графического решения частотного уравнения.

Следовательно, креплением трубопровода к оболочке в случае $\frac{\tilde{\Omega}_{\min}}{\omega_B} < 1$ нельзя поднять частоту совместных колебаний Ω выше $\tilde{\Omega}_{\min}$.

Если отношение $\frac{\tilde{\Omega}_{\min}}{\omega_B} > 1$, то креплением трубопровода на оболочечном корпусе возможно осуществить частотную отстройку. При этом, конечно, необходимо учитывать динамическую податливость оболочки. На фиг. 4. приведено отношение частот связанной системы к частоте трубопровода, закрепленного на абсолютно жестком корпусе, в зависимости от отношения масс $\frac{M_T}{M_0}$ для различных значений $\frac{\tilde{\Omega}_{\min}}{\omega_B}$. Значения рядов, входящих в частотное уравнение (14), вычислялось на ЭВМ «Минск-14». Из графиков видно, что



Фиг. 4. Зависимость коэффициента снижения частоты, закрепленного на оболочке, от отношения масс трубопровода и оболочки

для отношения $\frac{\tilde{\Omega}_{min}}{\omega_B} \geq 3$ корпус можно считать абсолютно жестким. Однако для реально существующих отношений $\frac{M_T}{M_0} < 0,05$ уже при $\frac{\tilde{\Omega}_{min}}{\omega_B} = 2$ корпус является практически жестким.

Таким образом, критерием оценки жесткости корпусов с точки зрения частотной отстройки трубопроводов является отношение $\frac{\tilde{\Omega}_{min}}{\omega_B}$.

Экспериментальное исследование колебаний оболочки с присоединенной системой

При выводе частотного уравнения совместных колебаний оболочки и закрепленного на ней трубопровода был сделан ряд допущений:

а) усилие от трубопровода к оболочке передается по прямоугольной площадке жесткого ядра в виде равномерно распределенной нагрузки;

б) влияние ужесточающего действия жесткого ядра и концентрации напряжений сочленения с оболочкой мало;

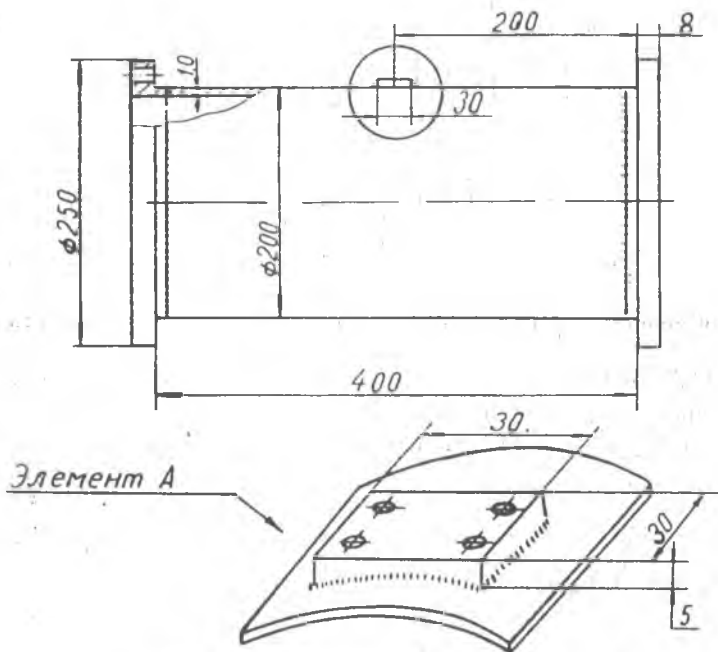
в) использовался упрощенный вариант технической теории оболочек — уравнения Власова — Донелла;

г) влияние инерционных членов от осевых и тангенциальных перемещений в уравнении движения оболочки мало.

Чтобы проверить возможность этих допущений, исследовалась оболочка с присоединенной системой. При этом в качестве присоединенной системы использовался не трубопровод, а масса в виде

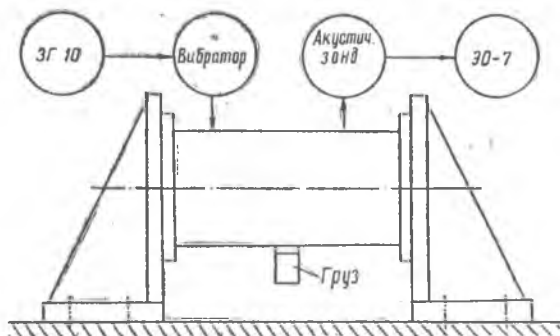
сосредоточенного груза. Такая замена существенно упрощает эксперимент, не сказываясь на точности оценки допущений.

Исследовалась оболочка из Х18Н10Т (фиг. 5) радиусом — 100 мм, длиной — 400 мм, толщиной стенки — 1 мм, размером площадки под груз — $2a=2b=30$ мм. Площадка под груз располагалась в середине оболочки. По концам оболочка имела фланцы с отверстиями под крепежные болты. Фланцами оболочка привертывалась к кронштейнам, которые, в свою очередь, устанавливались на массивной плите.



Фиг. 5. Экспериментальная оболочка.

Такое крепление оболочки было принято после того, как убедились, что ее собственные частоты без площадки для грузов практически не отличаются от частот, вычисленных по формуле для свободно опертой гладкой цилиндрической оболочки. Возбуждение оболочки производилось электродинамическим вибратором, который устанавливался на кронштейне и своей подвижной частью соединялся с оболочкой. Изменение частот колебания вибратора задавалось от звукового генератора ЗГ-10. Регистрировались перемещения оболочки акустическим зондом ЗА-4, сигнал которого через усилительное устройство УПУ-2 подавался на электронный осциллограф ЭО-7. Схема крепления оболочки и блок-схема применяемой для исследования аппаратуры показана на фиг. 6.



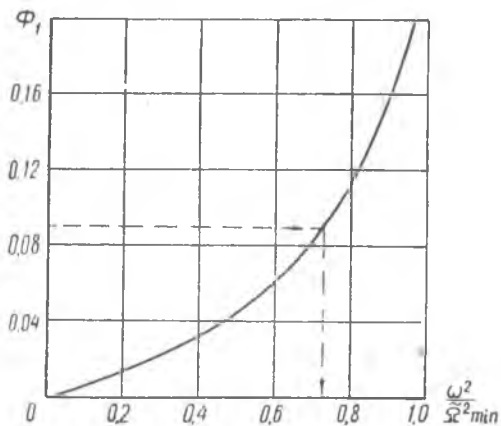
Фиг. 6. Схема экспериментальной установки.

Эксперимент заключался в определении нижней собственной частоты оболочки с грузом по моменту наступления резонанса. Оболочка исследовалась с восемью грузами: 55 (вес площадки для крепления груза), 180, 205, 315, 395, 576, 740, 1070 г. Минимальные измеренные собственные частоты составили соответственно: 415, 340, 300, 262, 235, 200, 180 и 157 гц.

Теоретическое значение собственных частот совместных колебаний груза и оболочки определялось по уравнению (15) графическим методом

$$\frac{\pi^2 abh\rho_0}{2M} = \frac{\omega^2}{\hat{\Omega}_{\min}^2} \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin n\beta \sin \pi m a \sin^2 \lambda m \eta}{mn \left(\frac{\hat{\Omega}_{mn}^2}{\hat{\Omega}_{\min}^2} - \frac{\omega^2}{\hat{\Omega}_{\min}^2} \right)}, \quad (15)$$

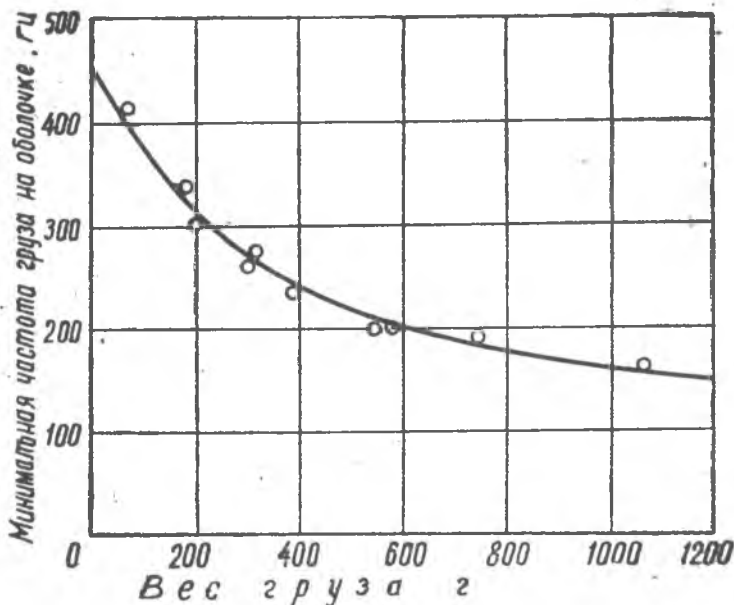
где M — масса груза.



Фиг. 7. К решению частотного уравнения колебаний груза на оболочке.

На фиг. 7 представлено значение функций Φ_1 , выражающей правую часть равенства (15), в зависимости от отношения $\frac{\omega^2}{\Omega_{\min}^2}$.

Вычисление Φ_1 производилось на ЭВМ «Минск-14». Левая часть равенства (15) выражается прямой линией, проходящей параллельно оси абсцисс, уровень которой меняется с изменением веса груза. На фиг. 7. показан пример определения $\frac{\Omega^2}{\Omega_{\min}^2}$ (точка пересечения горизонтальной линии с кривой определяет собственную частоту совместных колебаний $\omega = \Omega$). Для исследуемой оболочки $\tilde{\Omega}_{\min} = 2825$ 1/сек. По известному отношению $\frac{\Omega}{\tilde{\Omega}_{\min}}$ и $\tilde{\Omega}_{\min}$ находилась собственная частота совместных колебаний. На фиг. 8 пост-



Фиг. 8. Теоретическая и экспериментальная зависимость минимальной частоты колебания груза на оболочке от веса груза.

роена кривая зависимости этой частоты (в герцах) от веса присоединенного груза. На этой же фигуре нанесены экспериментальные точки. Из сравнения расчетных и экспериментальных частот следует, что в широком диапазоне присоединяемых грузов их расхождение составляет не более 6%. Это свидетельствует об удовлетворительной точности расчетного метода и о возможности тех допущений, которые были заложены в расчет.

ВЫВОДЫ

1. Анализ совместных колебаний трубопровода и оболочечного корпуса позволил выявить критерий жесткости оболочечных корпусов. Таким критерием является отношение минимальной собственной частоты несвязанного корпуса к частоте отстройки. Этот результат позволяет оценивать в дальнейшем жесткость корпусов без сложного анализа совместных колебаний системы корпус — трубопровод.

2. Совпадение расчетных и экспериментальных значений собственных частот колебания оболочки с присоединенной системой удовлетворительное. Допущения, которые были заложены в определение собственных частот совместных колебаний оболочки и трубопровода, приемлемы и не могут отразиться на полученных результатах.

3. Решение задачи о совместных колебаниях оболочки с присоединенной системой имеет и самостоятельное значение.

ЛИТЕРАТУРА

1. О. Д. О н и а ш в и л и. «Некоторые динамические задачи теории оболочек», изд. АН СССР, М., 1957.
-