В. П. Иванов, А. С. Сердотецкий

КОЛЕБАНИЯ СО СТОЯЧИМИ И БЕГУЩИМИ ВОЛНАМИ УПРУГИХ ТЕЛ И СИСТЕМ, ОБЛАДАЮЩИХ ЦИКЛИЧЕСКОЙ СИММЕТРИЕЙ

Введение

В технике широко используются детали и узлы, обладающие конструктивной циклической симметрией: рабочие колеса компрессоров и турбин, шнеки, шестерни и т. п. Ею обладают также и любые тела вращения.

Линейно-упругим телам и системам, обладающим циклической симметрией, присущи некоторые общие свойства их спектров собственных форм и частот [2, 3, 4]. В частности, их спектры всегда содержат собственные частоты с кратностью, равной двум, т. е. одной собственной частоте соответствуют две линейно-независимые собственные формы.

В настоящей работе показывается, что именно с кратностью собственных частот связана возможность произвола в проявлении форм свободных и вынужденных колебаний циклически симметричных тел и систем. Они могут совершать стационарные колебания и со стоячими, и с бегущими волнами, и с суперпозицией тех и других.

В отличие от широкопринятой, но физически не достаточно четко обоснованной концепции Кэмпбелла [I], показано, что образование бегущих волн является частным случаем суперпозиции колебаний по двум независимым собственным формам, имеющим совпадающие собственные частоты.

Циклическая симметрия

Тело обладает циклической (поворотной) симметрией порядка s, если оно, будучи повернутым вокруг оси симметрии на любой угол, кратный величине $2\pi/s$, сохранит неизменность своих геометрических, массовых и упругих характеристик по отношению к неподвижной системе координат.

Порядок симметрии s — всегда целое число. Для рабочих колес турбомашин порядок симметрии обычно совпадает с числом лопаток. Для осесимметричных тел (тел вращения) $s=\infty$.

Типовым элементом циклически симметричного тела является его период, т. е. та часть тела, которая заключена между двумя любыми полуплоскостями, опирающимися на ось симметрии и отстоящими друг от друга на угол $2\pi/s$. Различные периоды данного циклически симметричного тела могут быть мысленно совмещены. Точки и направления, принадлежащие различным периодам и совпадающие при этой операции мысленного совмещения, именуются сходственными точками и направлениями.

Особенности спектров собственных форм и частот линейно-упругих тел и систем, обладающих циклической симметрией

В [2, 3, 4] определены общие свойства спектров собственных форм и частот, присущие любым линейно-упругим телам, обладающим циклической симметрией. Перечислим те из них, которые используются в данной работе.

1. Весь спектр собственных форм циклически симметричного тела (системы) распадается на группы. К каждой из групп принадлежат собственные формы с одним и тем же целым числом волн амплитуд перемещений, укладывающихся по окружности тела.

Число групп зависит от порядка симметрии и определяется условием

$$0\leqslant m\leqslant \frac{s}{2}, \tag{1}$$

где m — положительные целые числа, указывающие на числа волн, укладывающихся по окружности тела.

2. При свободных колебаниях циклически-симметричного тела по одной из его собственных форм окружное распределение амплитуд отклонений произвольно выбранных сходственных точек по произвольным сходственным направлениям подчинено равномернодискретному гармоническому закону с числом волн m, присущим данной форме колебаний. Это может быть выражено в виде

$$q_k=\tilde{q}\cos\frac{2\pi}{s}mk\cos pt, \tag{2}$$

где k — номер периода по окружности тела ($k=0, 1, 2,..., s-1$); $q_к$ — отклонение выбранной сходственной точки, принадлежащей к k-му периоду, по выбранному сходственному направлению; $\tilde{q}$ — амплитуда окружной волны; p — собственная частота, соответствующая данной форме.

Примечательно, что окружная гармоничность распределения амплитуд выдерживается лишь дискретно только в сходственных точках и по сходственным направлениям (2). Это справедливо по отношению к любым произвольно выбранным сходственным точкам и направлениям.

Для осесимметричных тел равномерно-дискретный закон окружного распределения амплитуд переходит в непрерывный, поскольку для них $s=\infty$, и сходственные точки по окружности тела образуют непрерывную последовательность. В этом частном случае выражение (2) принимает вид

$$q(\varphi,\ t)=\tilde{q}\cos m\varphi\cos pt, \tag{3}$$

где φ — текущий центральный угол.

3. Группы собственных форм, для которых

$$0<m<\frac{s}{2}, \tag{4}$$

состоят из множества пар форм с совпадающими собственными частотами, т. е. собственные частоты указанных групп имеют кратность не менее двух. Здесь каждой из форм

$$q_{k1}=\tilde{q}_1\cos\frac{2\pi}{s}mk\cos pt \tag{5а}$$

соответствует другая, ортогональная к ней, форма

$$q_{k2}=\tilde{q}_2\sin\frac{2\pi}{s}mk\cos(pt+\gamma), \tag{5б}$$

имеющая ту же собственную частоту. $\tilde{q}_1$ и $\tilde{q}_2$ — амплитуды волн первой и второй форм, γ — относительный сдвиг фаз колебаний.

Соотношения амплитуд волн, так же как и соотношения фаз этих двух колебаний, произвольны и зависят от конкретных начальных условий.

Свободные колебания

Из (4) следует, что при $m\neq 0$ и $m\neq\frac{s}{2}$ каждому свободному колебанию, совершающемуся с одной из собственных частот, присущи две степени свободы, поскольку формы, определяемые выражениями типа (5а) и (5б), взаимно ортогональны и линейно независимы. В зависимости от того, каковы начальные условия, формы в паре могут накладываться друг на друга в любом соотношении. В этом заключается специфичность свободных колебаний циклически симметричных тел и систем. Проявляется она в определенном произволе форм свободных колебаний.

Суперпозиция независимых колебаний (5а) и (5б) дает

$$q_{k\Sigma}=q_{k1}+q_{k2}=\widetilde{q}_1\cos\frac{2\pi}{s}\,mk\cos pt+\widetilde{q}_2\sin\,\frac{2\pi}{s}\,mk\cos(pt+\gamma) \qquad (6)$$

или

$$q=B\cos m\left(\frac{2\pi}{s}\,k+\frac{p}{m}\,t\right)+C\cos m\left(\frac{2\pi}{s}\,k-\frac{\rho}{m}\right)\,\cos pt, \quad (7)$$

где $B=\widetilde{q}_2\sin\gamma$, $C=\sqrt{\widetilde{q}_1^2-2\widetilde{q}_1\widetilde{q}_2\sin\gamma+\widetilde{q}_2^2}$,

$$\operatorname{tg}\rho=\frac{\widetilde{q}_2\cos\gamma}{\widetilde{q}_1-\widetilde{q}_2\sin\gamma}.$$

В общем случае, как видно из (7), свободное колебание данной частоты может быть представлено как суперпозиция бегущей и стоячей волн.

В частности, если начальные условия таковы, что $\gamma=0$,

то $$q_{k\Sigma}=\sqrt{\widetilde{q}_1^2+\widetilde{q}_2^2}\cos m\left(\frac{2\pi}{s}\,k+\frac{\rho}{m}\right)\cos pt, \qquad (8)$$

где $\operatorname{tg}\rho=\frac{q_2}{q_1}$, и свободные колебания совершаются со стоячей волной. В окружном направлении форма не «привязана» к телу, и окружная ориентация волны зависит от соотношения $\widetilde{q}_1$ и $\widetilde{q}_2$, т. е. от начальных условий.

В другом частном случае, когда $\widetilde{q}_1=\widetilde{q}_2=\widetilde{q}$ и $\gamma=\pm\frac{\pi}{2}$, колебания совершаются с бегущей волной

$$q_{k\Sigma}=\widetilde{q}\cos m\,\left(\frac{2\pi}{s}\,k\pm\frac{p}{m}\,t\right). \qquad (9)$$

Таким образом, в конкретном проявлении форм свободных колебаний циклически симметричных тел возможен произвол, который для линейно-упругих тел был бы невозможен при отсутствии в их спектре кратных собственных частот.

Возбуждающие нагрузки

При рассмотрении специфики вынужденных колебаний, присущей циклически симметричным системам, существенным является характер распределения возбуждающих нагрузок в окружном направлении. Поэтому распределение их в радиальном и осевом направлениях здесь не конкретизируется.

Представим окружное распределение удельных нагрузок на любой окружности, концентричной оси симметрии, в виде разложения в ряд Фурье

$$Q\,(\varphi)=Q^{(0)}+\sum_{n=1}^{\infty}\widetilde{Q}^{(n)}\cos n\,(\varphi+\gamma^{(n)}). \qquad (10)$$

Если эта нагрузка, будучи стационарной, вращается относительно тела с угловой скоростью Ω, то силовое воздействие на него от любой из гармоник представится выражением

$$Q^{(n)}=\widetilde{Q}^{(n)}\cos n(\varphi+\Omega t)^{*} \tag{11}$$

или

$$Q^{(n)}=Q_1^{(n)}+Q_2^{(n)}, \tag{12}$$

где

$$Q_1^{(n)}=\widetilde{Q}^{(n)}\cos n\varphi\cos n\Omega t, \tag{13а}$$

$$Q_2^{(n)}=-\widetilde{Q}^{(n)}\sin n\varphi\sin n\Omega t. \tag{13б}$$

Таким образом, воздействие на объект возбуждения бегущей силовой волной эквивалентно воздействию на него двух динамических нагрузок. В окружном направлении эти нагрузки, имея гармоническое распределение амплитуд с одинаковым числом волн, «привязаны» к объекту возбуждения и имеют относительный окружной сдвиг на четверть волны. Частота их одинакова $\omega=n\Omega$, но действуют они со сдвигом во времени на четверть периода колебаний.

В более общем случае, когда нагрузка вращается относительно объекта возбуждения и одновременно изменяет свою величину во времени по гармоническому закону с частотой ν, получим

$$\widetilde{Q}^{(n)}\cos n(\varphi+\Omega t)\cos\nu t=\frac{1}{2}\widetilde{Q}^{(n)}\cos n\left[\varphi+\left(\Omega-\frac{\nu}{n}\right)t\right]+$$
$$+\frac{1}{2}\widetilde{Q}_2^{(n)}\cos n\left[\varphi+\left(\Omega+\frac{\nu}{n}\right)t\right]. \tag{14}$$

Такой случай возбуждения эквивалентен одновременному воздействию на объект двух бегущих силовых волн, вращающихся с угловыми скоростями $\Omega-\frac{\nu}{n}$ и $\Omega+\frac{\nu}{n}$. Как и в предыдущем случае, каждая из этих бегущих волн может быть представлена в виде пары динамических нагрузок с распределениями амплитуд, «привязанными» к объекту возбуждения. Одна из пар дает частоту воздействия $\omega_1=\Omega n-\nu$, а другая $\omega_2=\Omega n+\nu$.

Вынужденные колебания

Вначале рассмотрим специфику возбуждения колебаний осесимметричных тел ($s=\infty$). Возбуждающая нагрузка

$$Q=\widetilde{Q}\cos n(\varphi+\rho)\cos(\omega t+\lambda), \tag{15}$$

---

* Здесь $\gamma^{(n)}=0$.

где ρ и λ — произвольны, способна вызывать вынужденные колебания осесимметричных тел лишь по собственным формам, для которых $m=n$. По отношению к другим формам она будет ортогональна.

Поскольку при $m \neq 0$, каждой из собственных частот соответствует пара линейно независимых собственных форм, определяемых в соответствии с (5а) и (5б), то вынужденные колебания по каждой из них могут быть вызваны независимо друг от друга.

Допустим, что осесимметричное тело находится под одновременным воздействием двух равночастотных динамических нагрузок

$$\overline{Q}_1 = \overline{Q}_1 \cos n\varphi \cos \omega t \tag{16а}$$

и

$$Q_2 = \overline{Q}_2 \sin n\varphi \cos (\omega t + \lambda). \tag{16б}$$

Первая из них вызовет вынужденные колебания по собственной форме (5а), а вторая — по (5б), т. е.

$$q_1(\varphi, t) = \frac{\overline{q}_1^*}{\sigma} \cos m\varphi \cos (\omega t - \gamma), \tag{17а}$$

$$q_2(\varphi, t) = \frac{\overline{q}_2^*}{\sigma} \sin m\varphi \cos (\omega t + \lambda - \gamma), \tag{17б}$$

где $\overline{q}_1^*$ и $\overline{q}_2^*$ — величины, характеризующие уровень возбуждающих сил, вызывающих колебания по первой и второй формам;

$\sigma = \sqrt{\left(1 - \frac{\omega^2}{p^2}\right)^2 + \frac{\delta^2}{\pi^2}}$ — величина, обратная коэффициенту динамического усиления;

$\gamma = \operatorname{arctg} \dfrac{\frac{\delta}{\pi}}{1 - \frac{\omega^2}{p^2}}$ — фаза вынужденных колебаний;

p — собственная частота обеих форм;

δ — логарифмический декремент колебаний.

Суперпозиция этих двух вынужденных колебаний дает

$$q_\Sigma(\varphi, t) = q_1(\varphi, t) + q_2(\varphi, t) = \frac{B}{\sigma} \cos (m\varphi + \omega t - \gamma) + \\ + \frac{C}{\sigma} \cos m \left(\varphi - \frac{\rho}{m}\right) \cos (\omega t - \gamma), \tag{18}$$

где $B = \overline{q}_2^* \sin \lambda$,

$C \quad \sqrt{(\overline{q}_1^*)^2 - 2\overline{q}_1^* \overline{q}_2^* \sin \lambda + (\overline{q}_2^*)^2}$,

$\operatorname{tg} \rho = \dfrac{\overline{q}_2^* \cos \lambda}{\overline{q}_1^* - \overline{q}_2^* \sin \lambda}$.

В общем случае такое силовое воздействие, как видно из (18), способно вызвать одновременное колебание тела как с бегущей, так и со стоячей относительно него волнами.

Если, в частности, $\lambda=0$, то тело будет совершать вынужденные колебания со стоячей волной, окружная ориентация которой определяется соотношением $\widetilde{q}_1^*$ и $\widetilde{q}_2^*$,

$$q_\Sigma = \frac{\sqrt{(\widetilde{q}_1^*)^2+(\widetilde{q}_2^*)^2}}{\sigma}\cos m\left(\varphi-\frac{\rho}{m}\right), \tag{19}$$

где $\operatorname{tg}\rho = \dfrac{\widetilde{q}_2^*}{\widetilde{q}_1^*}$.

В другом частном случае, когда $\lambda=\pm\frac{\pi}{2}$ и $\widetilde{Q}_1=\widetilde{Q}_2$ (а, следовательно, и $\widetilde{q}_1^*=\widetilde{q}_2^*=q^*$), реализуются вынужденные колебания с бегущей волной

$$q_\Sigma = \frac{\widetilde{q}^*}{\sigma}\cos\left[m\varphi\pm(\omega t-\gamma)\right]. \tag{20}$$

Такой вид колебаний может быть вызван и бегущей силовой волной, поскольку, как было показано, действие ее эквивалентно одновременному действию двух динамических нагрузок (13а) и (13б). Когда угловая скорость вращения силовой волны относительно тела достигает $\Omega=\pm\frac{p}{m}$, наблюдается одновременный резонанс по двум собственным формам, имеющим совпадающие собственные частоты. При этом на теле образуется бегущая резонансная волна.

Резонансная волна вращается относительно тела с той же угловой скоростью, что и силовая волна, но отстает от нее на четверть волны, поскольку на резонансе $\gamma=\frac{\pi}{2}$.

Таким образом, линейно-упругие циклически симметричные тела способны совершать стационарные вынужденные, в частности, резонансные колебания как со стоячими, так и с бегущими волнами. Возможна также одновременная суперпозиция их. Конкретный вид вынужденных колебаний зависит от характера приложения возбуждающей нагрузки.

Применительно к линейно-упругим телам, обладающим циклической симметрией, когда $s\neq\infty$, общая качественная картина возбуждения вынужденных колебаний останется прежней. Однако при $s=\infty$ резонансные колебания по собственным формам с числом волн m поддерживались только теми гармониками возбуждающих сил, для которых $n=m$. При $s\neq\infty$ они потенциально могут поддерживаться также и некоторыми другими гармониками.

Если циклически симметричное тело совершает колебания по одной из собственных форм с числом волн m, окружное распределение амплитуд отклонений на том или ином радиусе его может быть представлено в виде

$$q(\varphi)=\left\{\frac{a_0}{2}+\sum_{i=1}^{\infty}[a_i\cos is\varphi+b_i\sin is\varphi]\right\}\cos m\varphi. \qquad (21)$$

Это выражение отражает отмечавшийся уже факт равномерно дискретного окружного распределения амплитуд при колебаниях циклически симметричных тел по тем или иным собственным формам.

Представим выражение (21) следующим образом:

$$q(\varphi)=\frac{a_0}{2}\cos m\varphi+\sum_{i=1}^{\infty}\left\{\left[\frac{a_i}{2}\cos(is+m)\varphi+\frac{b_i}{2}\sin(is+m)\varphi\right]+\right.$$

$$\left.+\left[\frac{a_i}{2}\cos(is-m)\varphi+\frac{b_i}{2}\sin(is-m)\varphi\right]\right\}. \qquad (22)$$

Отсюда видно, что резонансные колебания по любой из форм с числом волн m могут поддерживаться не только гармоникой $n=m$, но и гармониками $n=is-m$ и $n=is+m$, где $i=1, 2, 3, \ldots\ldots, \infty$ и $0\leqslant m<\frac{s}{2}$, поскольку эти формы уже могут и не быть ортогональными к указанным гармоникам. Так, например, для тела, у которого $s=11$, форма колебаний с $m=3$ потенциально может поддерживаться гармониками $n=3$, 8, 14, 19, 25, 30, 36...

Вышесказанное относится к телам со строгой циклической симметрией. При наличии некоторой асимметрии, как это имеет место в реальных телах, возможно явление расслоения спектров собственных форм и частот. Особенности колебаний тел при расслоении спектров рассмотрены в работах [2, 3].

ВЫВОДЫ

1. В проявлении форм свободных и вынужденных колебаний линейно-упругих тел и систем, обладающих циклической симметрией, возможен определенный произвол, связанный с наличием в их спектрах кратных собственных частот.

2. Циклически симметричные тела и системы способны совершать стационарные колебания различных типов. Они могут колебаться и со стоячими, и с бегущими волнами, и с суперпозицией тех и других.

3. Конкретное проявление того или иного типа колебаний зависит от начальных условий при свободных колебаниях или типа возбуждающей нагрузки при вынужденных.

4. Образование бегущих волн является частным случаем суперпозиции независимых колебаний, совершающихся по двум собственным формам, имеющим совпадающие собственные частоты.

ЛИТЕРАТУРА

1. Кемпбелл В. Аксиальная вибрация дисков паровых турбин и меры защиты от нее, ОНТИ, 1937.

2. Иванов В. П. Исследование колебаний лопаточных венцов авиационных турбомашин. Автореферат диссертации, КуАИ, Куйбышев, 1969.

3. Иванов В. П. Некоторые вопросы колебаний лопаточных венцов и других упругих тел, обладающих циклической симметрией. Сб. «Прочность и динамика авиационных двигателей», вып. 6, «Машиностроение», 1971.

4. Иванов В. П. Общие свойства спектра собственных движений линейно-упругих тел, обладающих циклической симметрией. Труды КуАИ, выпуск 48, 1971.

В. П. Иванов, А. С. Сердотецкий

РАСЧЕТ КОЛЕБАНИЙ ЛОПАТОЧНЫХ ВЕНЦОВ СО СЛОЖНЫМ ПЕРИОДОМ ЦИКЛИЧЕСКОЙ СИММЕТРИИ МЕТОДОМ ВОЛНОВЫХ ДИНАМИЧЕСКИХ ЖИДКОСТЕЙ

Лопаточные венцы турбомашин являются типичными представителями циклически симметричных тел или, иначе, тел с поворотной симметрией. За главный период венца можно принять лопатку с соответствующим сектором диска. В настоящей работе для решения задачи о колебаниях циклически симметричного тела используется метод волновых динамических жесткостей и податливостей [1].

Известны конструкции лопаточных венцов со сложным периодом циклической симметрии. Период будем называть сложным, если в нем можно обособить два и более однотипных элементов (например, лопатки) с разнящимися динамическими характеристиками (рис. 1а, б).

Ниже приводится решение задачи о колебаниях циклически симметричного тела со сложным периодом применительно к лопаточному венцу с чередующимися лопатками. Однако решение может быть отнесено к любым телам со сложным периодом.

Укажем основные допущения, сделанные при решении задачи. Диск считаем обладающим конечной упругостью, поэтому рассматриваем связанные колебания системы «диск — серии лопаток» в целом. Для упрощения решения принимаем аэродинамическое демпфирование и аэродинамическое взаимодействие несущественными.

Пусть в венце имеется S лопаток каждого типа, тогда можно выделить S периодов, и порядок симметрии будет также S.

Предположим, что в порядок симметрии S достаточно велик. Это позволяет системы дискретных усилий, действующих