

В. П. ИВАНОВ

КОЛЕБАНИЯ ЛОПАТОЧНОГО ВЕНЦА СО СВЯЗЬЮ МЕЖДУ ЛОПАТКАМИ ЧЕРЕЗ БАНДАЖНЫЕ ПОЛКИ

В газовых турбинах и компрессорах находят довольно широкое применение лопаточные венцы с лопатками, имеющими полки на конце или в средней части пера. Обычно венцы проектируются так, чтобы по полкам лопаток имелся надежный контакт, обеспечиваемый предварительным натягом либо действием центробежных и газовых сил.

Рассматривать в этом случае колебания лопаток изолированно, упуская связь между ними, как это иногда делается, нельзя, поскольку венец представляет собой единую упругую систему.

Насколько нам известно, теория колебаний таких систем разработана недостаточно и удовлетворительные методики расчета практически отсутствуют. В предлагаемой статье сделана попытка разработать схему расчета колебаний таких систем. При этом предполагается, что система обладает циклической симметрией с кратностью, равной числу лопаток, т. е. предполагается, что лопатки изготовлены и установлены в диск строго идентично.

Кинематика движения полок двух соседних лопаток

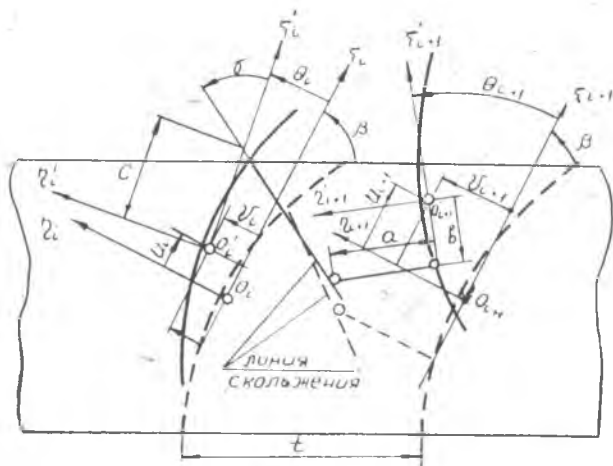
В зависимости от геометрии контактирующих поверхностей двух соседних полок на перемещение их должны накладываться определенные кинематические условия.

Наиболее естественным для существующих конструкций венцов было бы предположение, что контакт между полками осуществляется по линии, т. е. реализуется скользящее соединение. В этом случае, если считать полки абсолютно жесткими, поворот вершин лопаток невозможен и спектр собственных движений такой системы будет складываться из совокупности собственных движений, при которых вершины всех лопаток совершают одновременные пе-

ремещения с равными амплитудами и совокупностью собственных движений отдельных лопаток с граничными условиями, определяемыми направлением возможного скольжения.

И в том и в другом случае решается задача о колебаниях изолированной лопатки при определенных граничных условиях. Как показывает опыт, эта схема не дает удовлетворительных результатов.

Поскольку длина линии контакта по полкам в сравнении с шагом между лопатками обычно невелика, а обеспечить точное



Фиг. 1.

прилегание по линии трудно, сделано предположение о шарнирно-скользящем соединении между лопатками. Ниже определяются условия, накладываемые на перемещение полки при таком соединении, схема которого представлена на фиг. 1. Геометрические параметры полки, определяющие кинематику относительных смещений, могут быть заданы линейными величинами a , b , c и углом γ . Неподвижные системы координат ξ_i , η_i и ξ_{i+1} , η_{i+1} , расположенные в плоскостях полки, относятся к i и $i+1$ лопаткам и могут быть получены одна из другой путем переноса в окружном направлении на величину шага между лопатками t . Начала координат этих систем можно расположить, исходя из удобства расчета. Координатные оси ориентированы по главным осям профиля, угловое положение их задано углом установки профиля β . Подвижные системы координат ξ'_i , η'_i и ξ'_{i+1} , η'_{i+1} жестко связаны с полками; в положении равновесия оси ξ'_i , η'_i и ξ'_{i+1} , η'_{i+1} совпадают осями с ξ_i , η_i и ξ_{i+1} , η_{i+1} . Линейные смещения полки определяются величинами u_i , v_i и u_{i+1} , v_{i+1} по осям ξ_i , η_i и ξ_{i+1} , η_{i+1} соответственно. Угловые смещения определяются углами Θ_i и Θ_{i+1} .

Уравнение линии скольжения в координатах ξ_i, η_i может быть представлено через параметры полки $c, \operatorname{tg} \gamma$ и смещения u, v_i, Θ_i следующим выражением:

$$\xi_i - u_i = \frac{v_i - v_i - c \sin \Theta_i}{\cos \Theta_i + \operatorname{ctg} \gamma \cdot \sin \Theta_i} (-\sin \Theta_i) + \operatorname{ctg} \gamma \cos \Theta_i + c \cos \Theta_i. \quad (1.1)$$

С другой стороны, положение точки контакта в координатах ξ_i и η_i может быть определено через геометрические параметры полки a, b и смещения $u_{i+1}, v_{i+1}, \Theta_{i+1}$

$$\left. \begin{aligned} \xi_i &= -a \sin \Theta_{i+1} + b \cos \Theta_{i+1} + u_{i+1} + t \cos \beta \\ \eta_i &= 0 \cos \Theta_{i+1} + b \sin \Theta_{i+1} + v_{i+1} - t \sin \beta \end{aligned} \right\}. \quad (1.2)$$

Исключая из выражений (1.1) и (1.2) ξ_i и η_i , получим условие совместности перемещений полок, а полагая угловые смещения Θ_i и Θ_{i+1} малыми, будем иметь

$$\begin{aligned} \frac{a\Theta_i + b + t \cos \beta + u_{i+1} - u_i - c}{-\Theta_i \operatorname{tg} \gamma + 1} &= \\ = \frac{a + b\Theta_{i+1} - t \sin \beta + v_{i+1} - v_i - c\Theta_i}{\operatorname{tg} \gamma + \Theta_i} & \quad (1.3) \end{aligned}$$

или

$$\begin{aligned} \Theta_i [-\Theta_i c \cdot \operatorname{tg} \gamma - \Theta_{i+1} (a - b \operatorname{tg} \gamma) + (u_{i+1} - u_i) + (v_{i+1} - v_i) \operatorname{tg} \gamma] + \\ + \Theta_i [b + a \operatorname{tg} \gamma - t \sin \beta \operatorname{tg} \gamma + t \cos \beta] - \Theta_{i+1} [a \operatorname{tg} \gamma + b] + \\ + (u_{i+1} - u_i) \operatorname{tg} \gamma - (v_{i+1} - v_i) + \\ + b \operatorname{tg} \gamma + t \cos \beta \operatorname{tg} \gamma - c \operatorname{tg} \gamma - a + t \sin \beta = 0. \quad (1.4) \end{aligned}$$

В положении равновесия смещения отсутствуют ($u_i = u_{i+1} = v_i = v_{i+1} = \Theta_i = \Theta_{i+1} = 0$), тогда

$$b \operatorname{tg} \gamma + t \cos \beta \operatorname{tg} \gamma - c \operatorname{tg} \gamma - a + t \sin \beta = 0 \quad (1.5)$$

и условием совместности перемещений будет

$$\begin{aligned} \Theta_i [-\Theta_i c \operatorname{tg} \gamma - \Theta_{i+1} (a - b \operatorname{tg} \gamma) + (u_{i+1} - u_i) + (v_{i+1} - v_i) \operatorname{tg} \gamma] + \\ + \Theta_i [b + a \operatorname{tg} \gamma - t \sin \beta \operatorname{tg} \gamma + t \cos \beta] - \Theta_{i+1} [a \operatorname{tg} \gamma + b] + \\ + (u_{i+1} - u_i) \operatorname{tg} \gamma - (v_{i+1} - v_i) = 0. \quad (1.6) \end{aligned}$$

Распределение смещений по лопаткам

Рассматриваемая система является системой с циклической симметрией, поэтому распределение смещений сходственных точек системы по сходственным направлениям при свободных колебаниях на той или иной форме подчиняется, как это можно показать,

гармоническому закону [1]*. Тогда распределение смещений в общем случае может быть представлено в виде

$$\begin{aligned}\Theta_i &= \Theta \cos \alpha i, \\ u_i &= u \cos \alpha (i - q), \\ v_i &= v \cos \alpha (i - r),\end{aligned}\quad (2.1)$$

где i — номер лопатки;

Θ — максимальное по окружности колеса угловое смещение полки;

u — максимальное линейное смещение в направлении осей ξ ;

v — максимальное линейное смещение полки в направлении осей η ;

q и r — номера лопаток, на которых достигается соответствующий максимум смещений u и v (могут быть дробными числами).

$$\alpha = \frac{2\pi}{z} \lambda;$$

z — число лопаток в колесе;

λ — целые числа $0, 1, 2, 3 \dots \frac{z}{2}$ (при четном числе лопаток), и $0, 1, 2 \dots \frac{z-1}{2}$ (при нечетном числе лопаток),

определяющие число волн смещений.

Подставляя выражения (2.1) в (1.6) и учитывая, что

$$\Theta_{i+1} = \Theta [\cos \alpha i \cos \alpha - \sin \alpha i \sin \alpha];$$

$$u_{i+1} = u [\cos \alpha i \cos \alpha (q - 1) + \sin \alpha i \sin \alpha (q - 1)];$$

$$v_{i+1} = v [\cos \alpha i \cos \alpha (r - 1) + \sin \alpha i \sin \alpha (r - 1)]$$

получим

$$K \cos^2 \alpha i + L \cos \alpha i \sin \alpha i + M \cos \alpha i + N \sin \alpha i = 0,$$

где

$$K = -\Theta^2 [c \cdot \operatorname{tg} \gamma + \cos \alpha \cdot (a - b \operatorname{tg} \gamma)] + u\Theta [\cos \alpha (q - 1) - \cos \alpha q] + \\ + v\Theta [\cos \alpha (r - 1) - \cos \alpha r] \operatorname{tg} \gamma;$$

$$L = \Theta^2 (a - b \operatorname{tg} \gamma) \sin \alpha + u\Theta [\sin \alpha (q - 1) - \sin \alpha q] + \\ + v\Theta [\sin \alpha (r - 1) - \sin \alpha r];$$

$$M = -\Theta [(b + a \operatorname{tg} \gamma) (1 - \cos \alpha) - t \sin^2 \beta \operatorname{tg} \gamma + t \cos \beta] + \\ + u [\cos \alpha (q - 1) - \cos \alpha q] \operatorname{tg} \gamma - v [\cos \alpha (r - 1) - \cos \alpha r];$$

$$N = -\Theta (a \operatorname{tg} \gamma + b) \sin \alpha + u [\sin \alpha (q - 1) - \sin \alpha q] \operatorname{tg} \gamma - \\ - v [\sin \alpha (r - 1) - \sin \alpha r].$$

Очевидно, если смещения не равны нулю, это условие для любых i может выполняться лишь тогда, когда нулю равны коэффициенты K, L, M и N .

* Из работы [1] это положение вытекает применительно к замкнутой рамной системе с циклической симметрией.

Полагая коэффициенты равными нулю, получим систему уравнений.

$$\left. \begin{aligned} u^* \cos \rho + v^* \cos \delta \operatorname{tg} \gamma + D &= 0 \\ u^* \sin \rho + v^* \sin \delta \operatorname{tg} \gamma + F &= 0 \\ u^* \cos \rho \operatorname{tg} \gamma - v^* \cos \delta - A &= 0 \\ u^* \sin \rho \operatorname{tg} \gamma - v^* \sin \delta - B &= 0 \end{aligned} \right\} \quad (2.2)$$

где

$$D = - \frac{\bar{c} \operatorname{tg} \gamma + (\bar{a} - \bar{b} \operatorname{tg} \gamma) \cos \alpha}{\sqrt{2(1 - \cos \alpha)}}$$

$$F = - \frac{(\bar{a} - \bar{b} \operatorname{tg} \gamma) \sin \alpha}{\sqrt{2(1 - \cos \alpha)}}$$

$$A = \frac{\bar{b} + a \operatorname{tg} \gamma - \sin \beta \operatorname{tg} \gamma + \cos \beta - (\bar{a} \operatorname{tg} \gamma + \bar{b}) \cos \alpha}{\sqrt{2(1 - \cos \alpha)}}$$

$$B = \frac{(\bar{a} \operatorname{tg} \gamma + \bar{b}) \sin \alpha}{\sqrt{2(1 - \cos \alpha)}}$$

$$u^* = \frac{u}{\theta t}, \quad v^* = \frac{v}{\theta t}, \quad \bar{c} = \frac{c}{t}, \quad \bar{a} = \frac{a}{t}, \quad \bar{b} = \frac{b}{t},$$

$$\rho = \alpha q + \mu, \quad \delta = dr + \mu, \quad \operatorname{tg} \mu = \frac{\sin \alpha}{1 - \cos \alpha}.$$

Из (2.2) уравнений можно определить соотношение максимальных смещений и их относительный сдвиг по окружности колеса.

$$\left. \begin{aligned} u^{*2} &= \frac{\left(A - \frac{D}{\operatorname{tg} \gamma} \right)^2 + \left(B - \frac{F}{\operatorname{tg} \gamma} \right)^2}{\left(\frac{1}{\operatorname{tg} \gamma} + \operatorname{tg} \gamma \right)^2} \\ v^{*2} &= \frac{\left(D + \frac{A}{\operatorname{tg} \gamma} \right)^2 + \left(F + \frac{B}{\operatorname{tg} \gamma} \right)^2}{\left(\frac{1}{\operatorname{tg} \gamma} + \operatorname{tg} \gamma \right)^2} \end{aligned} \right\} \quad (2.3)$$

$$\operatorname{tg} \delta = \frac{F + \frac{B}{\operatorname{tg} \gamma}}{D + \frac{A}{\operatorname{tg} \gamma}},$$

$$\operatorname{tg} \rho = \frac{B - \frac{F}{\operatorname{tg} \gamma}}{A - \frac{D}{\operatorname{tg} \gamma}},$$

или

$$\left. \begin{aligned} \operatorname{tg} \alpha r &= \frac{F \operatorname{tg} \gamma + B}{D \operatorname{tg} \gamma + A} \frac{\sin \alpha}{1 - \cos \alpha} \\ \operatorname{tg} \alpha q &= \frac{B \operatorname{tg} \gamma - F}{A \operatorname{tg} \gamma - D} \frac{\sin \alpha}{1 - \cos \alpha} \end{aligned} \right\} \quad (2,4)$$

Определив соотношения максимальных амплитуд смещений U^* , v^* , а также их относительный разовый сдвиг по окружности колеса, можно определить кинематику движения любой из лопаток

$$\left. \begin{aligned} \Theta_i &= \Theta \cos \alpha i \\ u_i &= u^* \Theta t \cos \alpha (i - q) \\ v_i &= v^* \Theta t \cos \alpha (i - r) \end{aligned} \right\} \quad (2.5)$$

Динамическая жесткость и частное уравнение лопаточного венца

Динамические характеристики изолированной лопатки, отнесенные к принятой системе координат, зададим через динамические жесткости*

$$\left\| \begin{array}{ccc} D_{uu} & D_{uv} & D_{u\Theta} \\ D_{vu} & D_{vv} & D_{v\Theta} \\ D_{\Theta u} & D_{\Theta v} & D_{\Theta\Theta} \end{array} \right\|.$$

Определим энергию деформации изолированной лопатки при заданных перемещениях Θ_i , u_i , v_i

$$\begin{aligned} \Pi_i &= \frac{\Theta_i^2 D_{\Theta\Theta}}{2} + \frac{u_i^2 D_{uu}}{2} + \frac{v_i^2 D_{vv}}{2} + \\ &+ \Theta_i u_i D_{\Theta u} + \Theta_i v_i D_{\Theta v} + u_i v_i D_{uv}. \end{aligned}$$

Энергия деформации всего венца будет

$$\Pi_{\Sigma} = \sum_0^n \Pi_i, \quad \text{где } n = z - 1.$$

Имея в виду (2.5), получим

$$\begin{aligned} \Pi_{\Sigma} &= \frac{\Theta^2 z}{2} \left[\frac{D_{\Theta\Theta}}{2} + \frac{t^2 u^{*2} D_{uu}}{2} + \frac{t^2 v^{*2} D_{vv}}{2} + \right. \\ &\left. + t u^* \cos \alpha q D_{\Theta u} + t v^* \cos \alpha r D_{\Theta v} + t^2 u^* v^* \cos \alpha (q - r) D_{uv} \right]. \end{aligned}$$

* Продольными колебаниями лопатки пренебрегаем. Считаем также, что взаимодействие полок между собой не вызывает появления моментов относительно осей ξ и η .

Здесь учтено, что при $\alpha = \frac{2\pi}{z} \lambda$

$$\sum_{i=0}^n \cos^2 \alpha i = \sum_{i=0}^n \cos^2 \alpha (i - q) = \sum_{i=0}^n \cos^2 \alpha (i - r) = \frac{z}{2} \text{ и}$$

$$\sum_{i=0}^n \cos \alpha_i \sin \alpha_i = 0.$$

Тогда динамическая жесткость лопаточного венца, нагруженного крутящим моментом через нулевую лопатку, определится из выражения

$$D_{\Theta\Sigma} = z \left[\frac{D_{\Theta\Theta}}{2} + \frac{t^2 u^{*2} D_{uu}}{2} + \frac{t^2 v^{*2} D_{vv}}{2} + tu^* \cos \alpha q D_{\Theta u} + \right. \\ \left. + tv^* \cos \alpha r D_{\Theta v} + t^2 u^* v^* \cos \alpha (q - r) D_{uv} \right]. \quad (3.1)$$

Аналогично могут быть определены динамические жесткости $D_{u\Sigma}$ и $D_{v\Sigma}$. Положив $D_{\Theta\Sigma} = 0$, получим частное уравнение лопаточного венца

$$D_{\Theta\Theta} + t^2 u^{*2} D_{uu} + t^2 v^{*2} D_{vv} + 2tu^* \cos \alpha q D_{\Theta u} + 2tv^* \cos \alpha r D_{\Theta v} + \\ + 2t^2 u^* v^* \cos \alpha (q - r) D_{uv} = 0. \quad (3.2)$$

В частности, если у изолированной лопатки изгибно-крутильная связанность отсутствует и положение системы координат ξ, η выбрано таким образом, что ее начало совмещено с центром жесткости, а оси ξ и η ориентированы по главным осям сечения, частотное уравнение примет вид

$$D_{\Theta\Theta} + t^2 u^{*2} D_{uu} + t^2 v^{*2} D_{vv} = 0. \quad (3.3)$$

Для определения совокупности собственных частот, соответствующих тому или иному числу волн деформации, $u^*, v^*, \alpha q, \alpha r$ определяются из (2.3) и (2.4) подстановкой нужного значения $\alpha = \frac{2\pi}{z} \lambda$, где λ — число волн деформации.

После определения собственных частот могут быть найдены формы колебаний отдельных лопаток, для чего необходимо учесть соотношение (2.5).

Краевые интегральные уравнения лопаточного венца

Иногда, когда динамические жесткости изолированной лопатки неизвестны, имеет смысл прибегнуть к прямому решению краевых интегральных уравнений венца.

В качестве примера составим краевые интегральные уравнения лопаточного венца для случая, когда полки расположены на концах лопаток. Положим также, что каждая лопатка имеет прямую ось центров тяжести сечений, включая центр тяжести полки, совпадающую с осью центров кручения; естественная закрутка ее от-

существует. Координатные оси ξ и η направим по главным осям сечения, расположив начало координат в центре тяжести корневого сечения лопатки.

Для этого случая могут быть записаны выражения

$$\left. \begin{aligned} u(x) &= \rho^2 \Phi_u(x) + P_u(l) A_u(x) \\ v(x) &= \rho^2 \Phi_v(x) + P_v(l) A_v(x) \\ \Theta(x) &= \rho^2 \Phi_\Theta(x) + M_\Theta(l) A_\Theta(x) \end{aligned} \right\}, \quad (4.1)$$

где ρ — частота колебаний;

$P_u(l)$, $P_v(l)$, $M_\Theta(l)$ — силовые факторы, приложенные к полке данной лопатки со стороны соседних лопаток,

$$A_u(x) = \int_0^x \int_0^x \frac{(x-l)}{EI_\eta(x)} dx^2;$$

$$A_v(x) = \int_0^x \int_0^x \frac{(x-l)}{EI_\xi(x)} dx^2;$$

$$A_\Theta(x) = \int_0^x \frac{dx}{GI_k(x)};$$

$$\Phi_u(x) = \int_0^x \int_0^x \frac{1}{EI_\eta(x)} \left\{ \int_x^l \left[\int_x^l \frac{\gamma}{g} F(x) u(x) dx + mu(l) \right] dx - I_{\eta l} u'(l) \right\} dx^2;$$

$$\Phi_v(x) = \int_0^x \int_0^x \frac{1}{EI_\xi(x)} \left\{ \int_x^l \left[\int_x^l \frac{\gamma}{g} F(x) v(x) dx + mv(l) \right] dx - I_{\xi l} v'(l) \right\} dx^2;$$

$$\Phi_\Theta(x) = \int_0^x \frac{1}{GI_k(x)} \left[\int_x^l \frac{\gamma}{g} I_p(x) \Theta(x) dx + I_{\text{пр}} \Theta(l) \right] dx;$$

l — длина лопатки;

E , G — модули упругости первого и второго рода материала лопатки;

$I_\eta(x)$, $I_\xi(x)$ — моменты инерции сечений лопатки относительно осей η и ξ ;

$I_k(x)$ — геометрическая характеристика жесткости сечений лопатки на кручение;

γ — весовая плотность материала лопатки;

m — масса полки;

$I_{\eta\eta}$, $I_{\xi\xi}$ — массовые моменты инерции полки относительно осей ξ и η ;

$I_{\text{пр}}$ — полярный массовый момент инерции полки относительно оси центров тяжести;

$u(x)$, $v(x)$ — смещения сечений в направлении осей ξ и η соответственно;

$u'(l)$, $v'(l)$ — углы поворота полки относительно осей η и ξ соответственно.

Положив $x = l$ и учтя (3.3), где $D_{\Theta\Theta} = \frac{M_{\Theta}(l)}{\Theta(l)}$, $D_{uu} = \frac{P_u(l)}{h(l)}$, $D_{vv} = \frac{P_v(l)}{u(l)}$ получим систему уравнений

$$\left. \begin{aligned} u(l) &= p^2 \Phi_u(l) + P_u(l) A_u(l); \\ v(l) &= p^2 \Phi_v(l) + P_v(l) A_v(l); \\ \Theta(l) &= p^2 \Phi_{\Theta}(l) + M_{\Theta}(l) A_{\Theta}(l); \\ M_{\Theta}(l) \Theta(l) + P_u(l) u(l) + P_v(l) v(l) &= 0. \end{aligned} \right\} \quad (4.2)$$

Используя ее, исключим из (4.1) $P_u(l)$, $P_v(l)$, $M_{\Theta}(l)$ и получим систему интегральных уравнений

$$\left. \begin{aligned} \bar{u}(x) &= p^2 \left[\Phi_{\bar{u}}(x) - \frac{A_u(x)}{A_u(l)} \Phi_{\bar{u}}(l) + \frac{A_u(x)}{A_u(l)} R \right] \\ \bar{v}(x) &= p^2 \left[\Phi_{\bar{v}}(x) - \frac{A_v(x)}{A_v(l)} \Phi_{\bar{v}}(l) + \frac{A_v(x)}{A_v(l)} R \right] \\ \bar{\Theta}(x) &= p^2 \left[\Phi_{\bar{\Theta}}(x) - \frac{A_{\Theta}(x)}{A_{\Theta}(l)} \Phi_{\bar{\Theta}}(l) + \frac{A_{\Theta}(x)}{A_{\Theta}(l)} R \right], \end{aligned} \right\} \quad (4.3)$$

$$\text{где } \bar{u}(x) = \frac{u(x)}{u(l)};$$

$$\bar{v}(x) = \frac{v(x)}{v(l)};$$

$$\bar{\Theta}(x) = \frac{\Theta(x)}{\Theta(l)};$$

$$R = \frac{\Phi_{\bar{\Theta}}(l) + u^{*2} l^2 \Phi_{\bar{u}}(l) \frac{A_{\Theta}(l)}{A_u(l)} + v^{*2} l^2 \Phi_{\bar{v}}(l) \frac{A_{\Theta}(l)}{A_v(l)}}{1 + u^{*2} l^2 \frac{A_{\Theta}(l)}{A_u(l)} + v^{*2} l^2 \frac{A_{\Theta}(l)}{A_v(l)}}$$

Система уравнений (4.3) позволяет определить собственные частоты и распределение отклонений по высоте лопаток. Для этого необходимо знать U^* и v^* , которые определяются формулами (2, 3) и зависят, помимо геометрии полки, от числа волн деформации.

Каждому числу волн деформации соответствует своя конкретная система (4.3). Вся совокупность возможных собственных движений определяется $\frac{3}{2}$ системами уравнений типа (4.3) при четном числе

лопаток и $\frac{z-1}{2}$ при нечетном, где z — кратность симметрии системы (число лопаток).

Каждая из $\frac{z}{2}$ (из $\frac{z-1}{2}$) систем решается изолированно известными методами [2].

Форма колебаний венца может быть найдена через формы колебаний каждой из лопаток с помощью выражений.

$$\left. \begin{aligned} \Theta_i(x) &= \Theta(l) \bar{\Theta}(x) \cos xi; \\ u_i(x) &= \Theta(l) t u^* \bar{u}(x) \cos x(i-q); \\ v_i(x) &= \Theta(l) tv^* \bar{v}(x) \cos x(i-r) \end{aligned} \right\} \quad (4.4)$$

Здесь $\bar{Q}(x)$, $\bar{u}(x)$, $\bar{v}(x)$ определяются при решении системы интегральных уравнений, а σq и σr вычисляются по формулам (2.4) в зависимости от заданного числа волн.

Из соотношений (4, 4) следует, что в общем случае максимумы амплитуд отклонений по различным направлениям (Θ , U , v) сдвинуты относительно друг друга по фазе. Как следствие этого, рисунки узловых линий на различных лопатках в пределах одной волны деформации могут быть не идентичными, что подтверждается экспериментальными наблюдениями.

ЛИТЕРАТУРА

1. Б. А. Смольников. Расчет свободных колебаний замкнутой рамной системы с циклической симметрией. Труды ЛПИ, № 210, 1960.

2. И. А. Биргер. Некоторые математические методы решения инженерных задач. Оборонгиз, 1956.