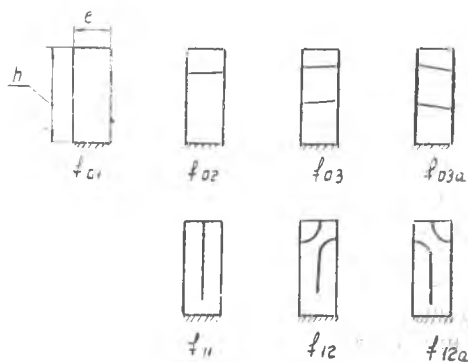


С. М. ГРИНБЕРГ

К ВОПРОСУ ОБ ИЗГИБНО-КРУТИЛЬНЫХ КОЛЕБАНИЯХ ЛОПАТОК КОМПРЕССОРОВ

Многочисленные экспериментальные данные свидетельствуют о том, что при вибрациях закрученных компрессорных лопаток возникает ряд явлений, необъяснимых с точки зрения теории колебаний призматических стержней. Отметим некоторые из них.

1. При исследовании простейших форм колебаний наблюдается появление «дублей» — двух форм с близким характером рисунка узловых линий, но с разными частотами. Обычно у лопаток компрессоров эти «дубли» имеют место либо по III изгибной форме, либо по II крутильной (формы 03 или 12, фиг. 1). Этот факт противоречит теории призматических стержней. Согласно последней каждый рисунок узловых линий соответствует определенной частоте.



Фиг. 1.

2. При колебаниях закрученных лопаток часто наблюдается смена порядка простейших обертонов. Для плоской пластинки постоянного сечения частота II-й изгибной формы $f_{0,2} = 6,25f_{0,1}$; частота I крутильной формы $f_{11} \approx 1,9 \frac{h}{l} f_{01}$ (для изогнутых компрессорных профилей этот числовой коэффициент обычно лежит в интервале $1,3 \div 1,7$). Таким образом, для обычного диапазона удлинений $\frac{h}{l} = 1,5 \div 3,5$ получаем, что частота II изгибной формы должна

быть выше, чем частота I крутильной формы. У сильно закрученных лопаток имеет место обратное явление: $f_{02} < f_{01}$. Соответствующие данные для двух лопаток приведены в таблице 1.

Таблица 1

$N_{\text{лоп.}}$	$\frac{h}{l}$	f_{01}	f_{02}	f_{11}
1	2,6	150	440	950
2	3,6	80	270	500

3. Частоты колебаний по первому тону для закрученных лопаток, образованных сильноизогнутыми профилями, оказываются существенно ниже расчетных значений. Даже с применением разработанных И. И. Меерович [1] методов, базирующихся на теории оболочек, частоты I-го тона завышаются на 10÷20%.

Поскольку все указанные особенности спектра частот компрессорных лопаток не описываются существующими методиками расчета — была разработана приближенная теория, описывающая эти явления.

В настоящей статье освещаются три вопроса: 1) построение теории закрученных тонкостенных стержней; 2) особенности спектра частот закрученного стержня, сечение которого обладает двумя осями симметрии; 3) особенности спектра частот закрученного стержня, сечение которого имеет одну ось симметрии.

Основные особенности теории деформаций закрученного стержня. Разработана теория деформаций закрученного стержня. Схема построения теории подобна принятой в работе Г. Ю. Джанелидзе [2]. Используя выражения для коэффициентов I и II квадратичных форм закрученной оболочки (в недеформированном и деформированном состоянии), мы получили соотношения, связывающие перемещения с деформациями. Упрощение этих соотношений было достигнуто на основе гипотезы об отсутствии деформаций контура поперечного сечения. Далее была составлена потенциальная энергия деформации оболочки:

$$\begin{aligned} \Pi = \frac{1}{2} \int_{(\Omega)} \frac{E}{1-\mu^2} \left[\varepsilon_0 - \chi_{\xi, \eta} - \chi_{\eta} \cdot \xi - \frac{d^2\theta}{dz^2} \cdot \omega_1 + \right. \\ \left. + \alpha' \frac{d\theta}{dz} (\xi^2 + \eta^2) + \frac{\partial u}{\partial s} \right]^2 d\Omega + \\ + \frac{1}{2} \int_{F_c} G \left[\frac{c^2}{3} \left(\frac{d\theta}{dz} \right)^2 + \left(\frac{\partial u}{\partial s} \right)^2 \right] dF_c. \end{aligned} \quad (1)$$

Здесь Ω — объем оболочки; F_c — площадь срединной поверхности; s — толщина; E и G — модули упругости; ξ и η — главные координаты сечения; ω_1 — главная секториальная площадь; α' — угол

естественной закрутки на единицу длины; z — координата вдоль образующей; s — вдоль средней линии профиля; ϵ_0 — средняя деформация растяжения; χ_ξ и χ_η — компоненты кривизны в центре жесткости; Θ — угол упругой закрутки; перемещение \bar{u} описывает деформацию, возникающую при нарушении закона плоских сечений.

Из выражения (1) можно получить различные варианты теории тонкостенных стержней; при $\alpha' = 0$ (незакрученный стержень) мы получаем либо классическую теорию стержней ($\omega_1 = 0$, $\bar{u} = 0$), либо теории В. З. Власова [3] ($\bar{u} = 0$) и Р. А. Ададунова [4] ($\bar{u} \neq 0$). При $\alpha' \neq 0$ и $\bar{u} = 0$ получается современная теория закрученных стержней, начало в разработке которой было положено Б. Ф. Шорром [5].

Преимущества метода, избранного нами для построения теории закрученных стержней, заключаются как в возможности анализировать погрешность, вносимую исходными гипотезами, так и в автоматической постановке граничных условий. Соответствующий анализ показывает, что при решении задачи о крутильных колебаниях теория, основанная на гипотезе отсутствия сдвига срединной поверхности, оказывается слишком грубой: на свободном конце возникает самоуравновешенная система напряжений, величина которых может составлять до 30–50% от максимальных уже при колебаниях по I крутильной форме. Этот дефект теории можно исправить, если учесть деформацию сдвига срединной поверхности. Соответствующие расчеты, выполненные применительно к закрученной пластине постоянной толщины, показывают следующее: при учете деформации сдвига на концах стержня возникают самоуравновешенные системы напряжений (на свободном конце в первом приближении нормальные напряжения уменьшаются до 40% исходных). Эти системы нормальных напряжений «затухают» примерно вдвое медленнее, чем нормальные напряжения при «стесненном» кручении, и поэтому влияние их сказывается на сравнительно большей части стержня. В то же время значение частот колебаний при учете деформации сдвига меняется мало.

Таким образом, проведенные расчеты позволяют сделать следующие выводы: при определении статических напряжений и тех форм изгибно-крутильных колебаний, при которых основная доля энергии создается изгибом, существующая теория обладает достаточной точностью. Расчет же тех форм колебаний, где основная доля энергии деформации возникает при кручении, необходимо проводить по более точной теории, учитывающей деформацию сдвига срединной поверхности.

Особенности спектра частот при изгибных колебаниях закрученного стержня, сечение которого имеет две оси симметрии. В этом случае нет упругой связи между деформациями, возникающими при изгибе и кручении, поэтому изгибные и крутильные колебания происходят раздельно. Расчеты, выполненные без учета энергии деформации в плоскости наибольшей жесткости [1],

показывают, что частоты форм 02 и 03 при этом снижаются на $15 \div 25\%$ по сравнению со стержнем постоянного сечения. С учетом энергии колебаний в плоскости наибольшей жесткости анализ несколько усложняется.

В закрученном стержне нагрузка, действующая по направлению одной из главных осей сечения, вызывает прогибы, дающие проекции на обе оси. Предположим, что у незакрученного стержня две формы колебаний (в двух плоскостях) имели близкие частоты. Если теперь рассматривать закрученный стержень с теми же сечениями, то вследствие возникшей между этими двумя формами связи меньшая частота уменьшится, а большая — увеличится. Обе формы колебаний при этом образуются, в основном, путем наложения близких по частоте форм незакрученного стержня и будут близки по характеру узловых линий, т. е. возникнут «дубли».

Приводим результаты расчета для равномерно закрученного стержня постоянного сечения. Расчет проводился по методу Ритца в следующей форме:

а) задавались системой функций для изгибных моментов, действующих по главным осям сечений:

$$M_x = \sum_{(n)} a_n M_n; \quad M_y = \sum_{(n)} b_n M_n. \quad (2)$$

В качестве функций M_n брались первые три функции для стержня постоянного сечения;

б) определялись проекции прогибов на неподвижные оси (x, y)

$$u = \sum_{(n)} (a_n u_{1n} + b_n u_{2n}), \quad V = \sum_{(n)} (a_n V_{1n} + b_n V_{2n}). \quad (3)$$

$$\left. \begin{aligned} u_{1n} &= \int_0^z dz \int_0^z \frac{M_n \sin \alpha}{EI_{\min}} dz, & u_{2n} &= \int_0^z dz \int_0^z \frac{M_n \cos \alpha}{EI_{\max}} dz; \\ V_{1n} &= - \int_0^z dz \int_0^z \frac{M_n \cos \alpha}{EI_{\min}} dz, & V_{2n} &= \int_0^z dz \int_0^z \frac{M_n \sin \alpha}{EI_{\max}} dz. \end{aligned} \right\} \quad (4)$$

Ось Z направлена от заделки по оси стержня;

в) уравнения для определения частот и форм колебаний строились по методу Ритца:

$$\frac{\partial}{\partial a_n} (\Pi - T) = 0; \quad \frac{\partial}{\partial b_n} (\Pi - T) = 0, \quad (5)$$

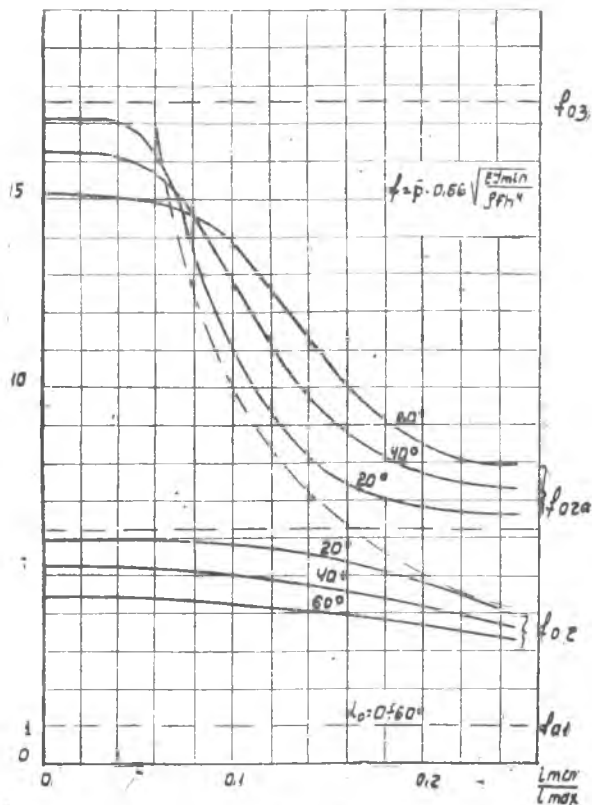
где потенциальная энергия Π и кинетическая T даются соотношениями

$$\Pi = \frac{1}{2} \int_0^h \left(\frac{M_x^2}{EI_{\max}} + \frac{M_y^2}{EI_{\max}} \right) dz; \quad T = \frac{1}{8} \rho p^2 \int_0^h F (U^2 + V^2) dz. \quad (6)$$

Избранная форма применения метода Ритца дает наименьшие значения побочных коэффициентов в частотном определителе.

Результаты расчета приводятся на фиг. 2, где даны отношения частот первых трех изгибных форм колебаний к частоте I тона не-

завораченного стержня в зависимости от отношения радиусов инерции относительно главных осей $\frac{I_{\min}}{I_{\max}}$ при нескольких значениях угла закрутки α_0 . Пунктирные прямые — частота колебаний в плоскости наименьшей жесткости, пунктирная гипербола — частота I тона колебаний в плоскости наибольшей жесткости — для не закрученного стержня ($\alpha_0=0$). Точки, лежащие на оси ординат, соответствуют решению И. И. Меерович ($I_{\max} = \infty$) [1].



Фиг. 2.

Из фиг. 2 видно, что наиболее резко вышеуказанный эффект раздвоения форм колебаний проявляется у стержня постоянного сечения с $\frac{I_{\min}}{I_{\max}}=0,16$, где появляются две формы, каждая из которых имеет по одной узловой линии. Для реальных лопаток — стержней переменного сечения — частоты обертонов в плоскости наименьшей жесткости понижаются, а частота I тона в плоскости наибольшей жесткости — повышается (сравнительно со стержнем постоянного сечения). Поэтому для компрессорных лопаток с $\frac{I_{\min}}{I_{\max}} \leq 0,15 \div 0,20$

основное значение имеет связь между III изгибной формой (или II крутильной) и I тоном в плоскости наибольшей жесткости. Эта связь и вызывает «дубли» по указанным формам.

Приведенные числовые результаты показывают также, что при $\frac{i_{\min}}{i_{\max}} \leq 0,01$ (т. е. при $I_{\min} \leq 0,01 I_{\max}$) можно пренебрегать упругостью стержня в плоскости наибольшей жесткости при расчете частоты II изгибной формы — погрешность при этом не превышает 5%. Расчет частот III и более высоких форм изгибных колебаний должен проводиться с обязательным учетом деформаций изгиба в плоскости наибольшей жесткости.

Особенности спектра частот закрученных лопаток, сечения которых имеют одну ось симметрии, перпендикулярную хорде. В этом случае большое значение имеет связь, существующая между деформациями изгиба и кручения. Имея в виду в дальнейшем ограничиться лишь частотами первых трех форм изгибно-крутильных колебаний, мы дадим здесь решение задачи без учета вторичных факторов: энергии «стесненного» кручения и изгиба в плоскости наибольшей жесткости. При этих предположениях потенциальная энергия деформации, выраженная через изгибающие M_{ξ} и крутящие M_z моменты, имеет вид:

$$\Pi = \frac{1}{2} \int_0^h (\delta_{11} M_{\xi}^2 + 2\delta_{12} M_{\xi} M_z + \delta_{22} M_z^2) dz, \quad (7)$$

а соотношения между деформациями и нагрузками:

$$\begin{aligned} U'' \cos \alpha = V'' \sin \alpha = 0; \quad U'' \sin \alpha - V'' \cos \alpha &= \delta_{11} M_{\xi} + \delta_{12} M_z; \\ \Theta' &= \delta_{12} M_{\xi} + \delta_{22} M_z. \end{aligned} \quad (8)$$

Для расчета частот в данном случае оказывается плодотворным ввести понятия об «эффективных» моментах L_{ξ} , L_z и об «эффективных» податливостях δ_{11}^* , δ_{22}^* . Определим их следующим образом:

$$\left. \begin{aligned} L_{\xi} &= M_{\xi} + \frac{\delta_{12}}{\delta_{11}} M_z, \quad \delta_{11}^* = \delta_{11}, \\ L_z &= M_z, \quad \delta_{22}^* = \delta_{22} - \frac{\delta_{12}^2}{\delta_{11}}. \end{aligned} \right\} \quad (9)$$

Тогда соотношения (7) и (8) переписуются:

$$\left. \begin{aligned} \Pi &= \frac{1}{2} \int_0^h (\delta_{11}^* L_{\xi}^2 + \delta_{22}^* L_z^2) dz; \\ U'' \cos \alpha + V'' \sin \alpha &= 0; \quad U'' \sin \alpha - T'' \cos \alpha = \delta_{11}^* L_{\xi}; \\ \Theta' &= \delta_{12} L_{\xi} + \delta_{22}^* L_z. \end{aligned} \right\} \quad (10)$$

Из формул (10) следует, что при введении «эффективных» изгибающих моментов резко упрощается задача об изгибе: возможно определить прогибы U и V только по заданным нагрузкам $L_{\xi}(z)$,

ибо от момента $L_z(z)$ прогибы не зависят. Это существенно упрощает расчет изгибных колебаний.

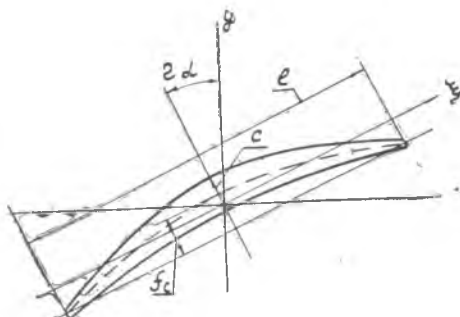
Результаты расчета первых трех частот для лопатки постоянного сечения $\frac{c}{l} = 0,05$, $\frac{f_c}{l} = 0,05$, $\frac{h}{l} = 1 \div 4$, $\alpha_0 = 0 \div 60^\circ$ (фиг. 3), приводятся на фиг. 4. Здесь же для сравнения нанесены частоты, вычисленные без учета связанности деформаций (т. е. при $\delta_{12} = 0$, пунктирные кривые на фиг. 4).

Анализ результатов расчета показывает, что в основном зависимости частот от угла закрутки определяются эффективными податливостями (штрих—пунктирные кривые на фиг. 4 для $\frac{h}{l} = 2$ учитывают только этот эффект):

$$\left. \begin{aligned} \delta_{11}^* &= \frac{1}{EI_{\min}} \left[1 + \frac{EI_{\min}}{GI\alpha} \cdot \frac{4\tau_0^2 \tau_p^2}{(1 + \beta^2) h^2} \right]; \\ \delta_{22}^* &= \frac{1}{GId(1 + \beta^2)} \times \frac{1}{1 + \frac{EI_{\min}}{GId} \cdot \frac{4\tau_0^2 \tau_p^2}{(1 + \beta^2) h^2}} \end{aligned} \right\} \quad (11)$$

Здесь I_d — геометрическая жесткость на кручение; β^2 — параметр закрутки; τ_p — координата полюса параболической деформации [5].

С ростом угла закрутки α_0 податливость на изгиб δ_{11}^* растет — это свидетельствует о снижении частот «изгибных» колебаний. Уменьшение «эффективной» податливости при кручении δ_{22}^* указывает на рост частот «крутильных» колебаний с увеличением угла закрутки.



Фиг. 3.

Для лопаток постоянного сечения можно с погрешностью не более 5% для f_{02} (при $\frac{h}{l} = 1$) рекомендовать приближенные формулы.

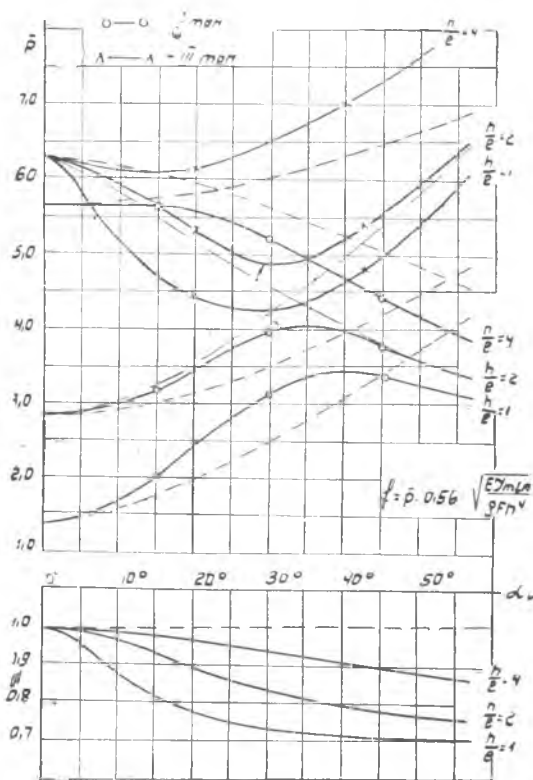
$$\left. \begin{aligned} f_{01} &= \frac{0,56}{h^2 \sqrt{\rho F \delta_{11}^*}} \frac{1}{1 - 0,01 \alpha^2}; \\ f_{02} &= \frac{3,51}{h^2 \sqrt{\rho F \delta_{11}^*}} \frac{1}{\sqrt{1 + 0,890 \alpha^2}}; \\ f_{11} &= \frac{0,25}{h \sqrt{\rho I \gamma \delta_{22}^*}} \end{aligned} \right\} \quad (12)$$

При близких значениях частот II изгибной и I крутильной форм (f_{02} и f_{11}) необходимо учитывать динамическую связь между ними.

Изменение «эффективных» геометрических характеристик с углом закрутки, а также имеющаяся динамическая связь существующими приближенными методиками расчета не учитываются. Как видно из фиг. 4, оба этих фактора могут заметно влиять на результаты расчета.

Анализ расчета позволяет рекомендовать для определения частот первых трех форм колебаний метод Ритца в следующей форме: задавшись «эффективными» моментами $L_{z1} = \sum a_n L_{zn}$, $L_{z2} = \sum b_n L_{zn}$, находим по формулам (10) перемещения U , V и Θ и потенциальную энергию деформации Π . Кинетическая энергия колебаний

$$T = \frac{1}{2} \rho \cdot \rho^2 \int_0^h [F(U^2 + V^2) + I_p \Theta^2] dz. \quad (13)$$



Фиг. 4.

В качестве функций L_{zn} и L_{zn} можно брать соответствующие формы колебаний стержня переменного сечения (проводя ортогонализацию при расчете высших форм).

В таблице 2 даны результаты расчета, выполненного по такой методике для лопатки I ступени (определялись только коэффициенты матриц, стоящие на главной диагонали). Здесь же приводятся результаты расчета, выполненного по методике работы [1] с использованием «наклонных» сечений. В скобках указан процент погрешностей расчетных величин по сравнению со средними экспериментальными значениями.

Данные таблицы 2 свидетельствуют о необходимости проводить расчет низших частот компрессорных лопаток, обладающих боль-

Частоты колебаний лопатки, гц

	f_{01}	f_{02}	f_{11}
Экспериментальные	150 ÷ 160	580—600	1050 ÷ 1100
Расчет	159 (3)	630 (7)	1050 (2)
Расчет по методике работы [1]	175 (13)	750 (27)	950 (12)

ной естественной закруткой, используя при этом «эффективные» усилия и податливости, ибо введение этих понятий позволяет резко снизить погрешность расчета.

ЛИТЕРАТУРА

1. И. И. Меерович. Колебания слабоизогнутых и закрученных лопаток. Оборонгиз, 1956.
2. Г. Ю. Джанелидзе. Вариационная формулировка теории тонкостенных стержней В. З. Власова, ПММ, т. VII, в. 6, 1943.
3. В. З. Власов. Тонкостенные упругие стержни. Стройиздат, 1940.
4. Р. А. Ададуров. Напряжения и деформации в цилиндрической оболочке с жесткими поперечными сечениями. ДАН, 62, № 2, 1948.
5. Б. Ф. Шоэр. Расчет на прочность естественно закрученных лопаток. Оборонгиз, 1954.