

Т а б л и ц а 4

Потенциал	Дисбаланс от грузиков, Н·м×10 ⁴			Подрез лопатки, Н·м×10 ⁴	
	$\delta = 79$	$\delta = 158$	$\delta = 266$	$\delta = 107$	$\delta = 291$
Ф	0,653	0,292	преобразователь А1		
			0,013	0,109	0,089
Ф	0,671	0,617	преобразователь А2		
			0,0234	0,808	0,143

Как видно из табл. 4, значения потенциала Φ хорошо отражают развитие указанных дефектов.

Таким образом, изложенная методика распознавания позволяет надежно диагностировать все исследованные дефекты двигателя АИ-25.

ЛИТЕРАТУРА

1. Смирнов Н. В., Дунин-Барковский И. В. Курс теории вероятностей и математической статистики. М., «Наука», 1969.
2. Биргер И. А. К математической теории технической диагностики. В сб.: «Проблемы надежности в строительной механике». Вильнюс, 1968.

УДК 593.3:624.074.4

Г. Г. Карташов, И. Д. Степаненко

К УТОЧНЕННОЙ ТЕОРИИ АНИЗОТРОПНЫХ
МНОГОСЛОЙНЫХ ОБОЛОЧЕК

Обоснованию линейной теории упругих многослойных оболочек (как классической, так и уточненной) уделялось большое внимание [1]—[5], [7]. Данный материал является продолжением работы [5].

Рассматривается дискретно-однородная, многослойная оболочка произвольной формы и переменной толщины, причем отдельные слои оболочки имеют различную кривизну.

Материал обладает одной плоскостью упругой симметрии и подчиняется закону Гука. Учитываются деформации поперечного сдвига и обжатие нормального элемента. В уравнениях, описывающих собственные колебания оболочки, учитывается инерция вращения.

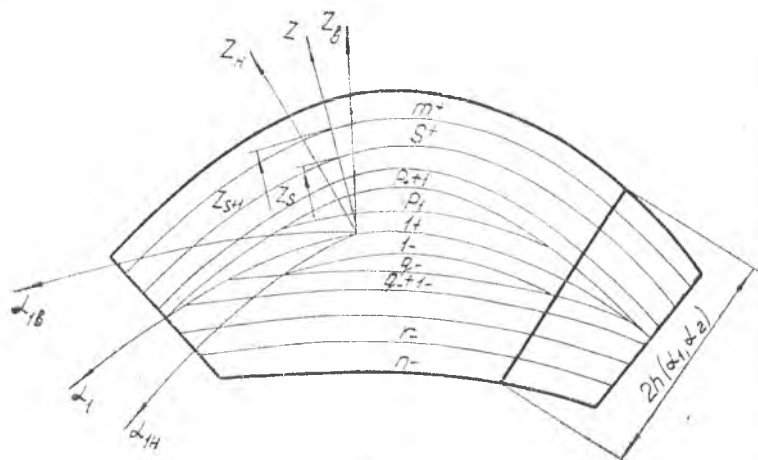


Рис. 1

На рис. 1 изображен элемент оболочки с тремя различными системами координат: (α_1, α_2, z) ; $(\alpha_{1n}, \alpha_{2n}, z_n)$ и $(\alpha_{1p}, \alpha_{2p}, z_p)$ — гауссовы системы координат поверхности, эквидистантных срединной, наружной и внутренней поверхностям оболочки соответственно; $p_+ + q_-$ — число слоев, срединная поверхность которых эквидистантна срединной поверхности оболочки; $m_+ - p_+$ и $n_- - q_-$ — число слоев, образующих наружную и внутреннюю часть оболочки соответственно; $2h(\alpha_1, \alpha_2)$ — толщина оболочки.

Пусть перемещение произвольной точки оболочки будет $U = U_1 e_1 + U_2 e_2 + W e_n$, (1)

где e_1, e_2, e_n — орты, образующие ортогональный триэдр в произвольной точке поверхности, отнесенный к линиям кривизны срединной поверхности. Компоненты вектора перемещения (1) задаются в виде:

$$\begin{aligned} U_1(\alpha_1, \alpha_2, z, t) &= u_1(\alpha_1, \alpha_2, t) + f_1(z) \gamma_1(\alpha_1, \alpha_2, t); \\ U_2(\alpha_1, \alpha_2, z, t) &= u_2(\alpha_1, \alpha_2, t) + f_2(z) \gamma_2(\alpha_1, \alpha_2, t); \\ W(\alpha_1, \alpha_2, z, t) &= \omega(\alpha_1, \alpha_2, t) + f_3(z) \omega'(\alpha_1, \alpha_2, t), \end{aligned} \quad (2)$$

где $u_1(a_1, a_2, t)$, $u_2(a_1, a_2, t)$, $\omega(a_1, a_2, t)$ — перемещения соответствующей точки срединной поверхности; $\gamma_1(a_1, a_2, t)$, $\gamma_2(a_1, a_2, t)$ — углы поворота «нормали» в плоскостях a_1, z и a_2, z в соответствующей точке срединной поверхности; $\omega'(a_1, a_2, t)$ — функция, характеризующая поперечные нормальные деформации; $f_1(z)$, $f_2(z)$ — заданные функции, характеризующие форму «нормали»; $f_3(z)$ — заданная функция, характеризующая сжимаемость «нормали» в зависимости от z .

Функции $f_{1,2}$ зависят от распределения касательных напряжений по толщине оболочки и от жесткости материала на межслойный сдвиг, а f_3 — от распределения нормальных напряжений σ_{33} и от нормальной жесткости материала. Распределение касательных напряжений может быть задано в виде непрерывной функции: либо кусочно-линейной, либо параболы для всего пакета [2], либо параболы для каждого слоя (рис. 2). При этом функции должны удовлетворять граничным условиям.

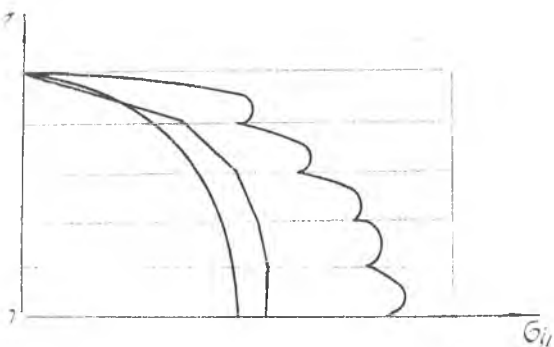


Рис. 2

Для кусочно-линейной «нормали» функции f_i имеют вид (рис. 3):

$$f_i(z) = \sum_{j=0}^{n-1} h_j r_{ij} + (z - \sum_{j=0}^{n-1} h_j) r_{in}, \quad (3)$$

где $i = 1, 2, 3$; $r_{i0} = 1$; r_{1j} , r_{2j} — характеризуют относительный угол сдвига j -го слоя в плоскостях a_1, z и a_2, z , соответственно; r_{3j} — характеризует относительную нормальную деформацию j -го слоя; n — номер слоя, расположенного на расстоянии z от срединной поверхности.

Проекции вектора перемещения в собственной системе гауссовых координат $(\alpha_{1n}, \alpha_{2n}, z_n)$ или $(\alpha_{1в}, \alpha_{2в}, z_n)$ определяются по формуле преобразования, записанной в тензорном виде:

$$U_{j(n,v)} = U_i l_{ji(n,v)}, \quad (4)$$

где $l_{ji}(n,v)$ — направляющие косинусы соответствующей системы координат относительно системы координат (α_1, α_2, z) .

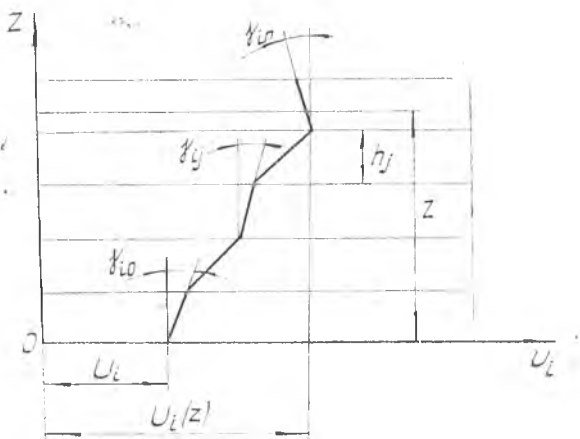


Рис. 3

На основании принятого закона изменения перемещений по толщине оболочки и, исходя из общих соотношений для компонент деформаций, записанных в криволинейных ортогональных координатах [6], выражения для компонент деформации оболочки можно записать:

$$\varepsilon_{11} = \frac{1}{1 + k_1 z} [\varepsilon_1 + \chi_1 f_1 + q_1 f_2 + \eta_1 f_3];$$

$$\varepsilon_{22} = \frac{1}{1 + k_2 z} [\varepsilon_2 + \chi_2 f_2 + q_2 f_1 + \eta_2 f_3];$$

$$\varepsilon_{12} = \frac{1}{1 + k_1 z} [\omega_1 + \nu_1 f_2 + \tau_1 f_1] + \frac{1}{1 + k_2 z} [\omega_2 + \nu_2 f_1 + \tau_2 f_2];$$

$$\varepsilon_{33} = \omega' \frac{df_3}{dz};$$

$$\varepsilon_{13} = \frac{1}{1 + k_1 z} [\varepsilon_{13}^0 + \gamma_1 \psi_1 + \Theta_1 f_3];$$

$$\varepsilon_{23}^0 = \frac{1}{1+k_2z} [\varepsilon_{23}^0 + \gamma_2 \psi_2 + \Theta_2 f_3], \quad (5)$$

где компоненты деформации срединной поверхности оболочки имеют вид:

$$\begin{aligned} u_1 &= \frac{1}{A_1} \frac{\partial u_1}{\partial \alpha_1} + \frac{u_2}{A_1 A_2} \frac{\partial A_1}{\partial \alpha_2} + k_1 w; \\ u_2 &= \frac{1}{A_2} \frac{\partial u_2}{\partial \alpha_2} + \frac{u_1}{A_1 A_2} \frac{\partial A_2}{\partial \alpha_1} + k_2 w; \\ w_1 &= \frac{1}{A_1} \frac{\partial w_1}{\partial \alpha_1} - \frac{u_1}{A_1 A_2} \frac{\partial A_1}{\partial \alpha_2}; \quad w_2 = \frac{1}{A_2} \frac{\partial w_2}{\partial \alpha_2} - \frac{u_2}{A_1 A_2} \frac{\partial A_2}{\partial \alpha_1}; \\ \varepsilon_{13}^0 &= \frac{1}{A_1} \frac{\partial w}{\partial \alpha_1} - k_1 u_1; \quad \varepsilon_{23}^0 = \frac{1}{A_2} \frac{\partial w}{\partial \alpha_2} - k_2 u_2; \\ \Theta_1 &= \frac{1}{A_1} \frac{\partial w'}{\partial \alpha_1}; \quad \Theta_2 = \frac{1}{A_2} \frac{\partial w'}{\partial \alpha_2}; \\ \eta_1 &= k_1 w'; \quad \eta_2 = k_2 w'; \\ \gamma_1 &= \frac{1}{A_1} \frac{\partial \gamma_1}{\partial \alpha_1}; \quad \gamma_2 = \frac{1}{A_2} \frac{\partial \gamma_2}{\partial \alpha_2}; \quad \nu_1 = \frac{1}{A_1} \frac{\partial \gamma_2}{\partial \alpha_1}; \quad \nu_2 = \frac{1}{A_2} \frac{\partial \gamma_1}{\partial \alpha_2}; \\ q_1 &= \frac{\gamma_2}{A_1 A_2} \frac{\partial A_1}{\partial \alpha_2}; \quad q_2 = \frac{\gamma_1}{A_1 A_2} \frac{\partial A_2}{\partial \alpha_1}; \quad \tau_1 = \frac{\gamma_1}{A_1 A_2} \frac{\partial A_1}{\partial \alpha_2}; \quad \tau_2 = \frac{\gamma_2}{A_1 A_2} \frac{\partial A_2}{\partial \alpha_1}; \\ \psi_1 &= r_1 (1 + k_1 z) - k_1 f_1; \quad \psi_2 = r_2 (1 + k_2 z) - k_2 f_2. \end{aligned} \quad (6)$$

Здесь и далее индексы n , в опущены.

В уравнениях (6) k_1 и k_2 — главные кривизны срединной поверхности; A_1 и A_2 — параметры Ляме.

Так как оболочка состоит из криволинейно-ортотропных слоев, оси упругой симметрии которых в общем случае не совпадают с направлениями главных кривизн, то для материала с одной плоскостью упругой симметрии, перпендикулярной к оси z , напряжения определяются с использованием закона Гука по формуле

$$\sigma_{ij} = A_{ij} \varepsilon_{ij}. \quad (7)$$

Здесь модули упругости A_{ij} находятся через технические постоянные ортотропного тела и угол армирования.

Условиям контакта по напряжениям можно удовлетворить, приняв одинаковыми упругие постоянные на границах слоев, либо задав соотношения упругости в интегральной форме [7].

При определении усилий и моментов, эквивалентных напряжениям, компоненты тензоров напряжений и деформаций в единой для всех слоев системе гауссовых координат, свя-

запной со срединной поверхностью лопатки, рассчитываются по формулам:

$$\sigma_{kl} = \sigma_{ij}(u, v) l_{ik}(u, v) l_{ji}(u, v); \quad \varepsilon_{kl} = \varepsilon_{ij}(u, v) l_{ik}(u, v) l_{ji}(u, v). \quad (8)$$

Приращение удельной энергии деформации лопатки dV_0 , определяемое как

$$dV_0 = \int_{-h}^h \sum_{k=1}^3 \sum_{l=1}^3 \sigma_{kl} d\varepsilon_{kl} (1 + k_1 z) (1 + k_2 z) dz,$$

где $k \leq l$,

с учетом уравнений (5), (7) имеет вид

$$\begin{aligned} dV_0 = & N_1 d\varepsilon_1 + N_2 d\varepsilon_2 + N_3 d\omega' + S_{12} d\omega_1 + S_{21} d\omega_2 + M_{11} d\chi_1 + \\ & + M_{22} d\chi_2 + M_{12} dq_1 + M_{21} dq_2 + M_{13} d\eta_1 + M_{23} d\eta_2 + \\ & + H_{11} d\tau_1 + H_{22} d\tau_2 + H_{12} d\nu_1 + H_{21} d\nu_2 + Q_1 d\varepsilon_{13}^0 + \\ & \Theta_2 d\varepsilon_{23}^0 + P_{11} d\gamma_1 + P_{22} d\gamma_2 + P_{13} d\Theta_1 + P_{23} d\Theta_2. \end{aligned} \quad (9)$$

Здесь поперечные N_i и тангенциальные S_{ij} , Θ_i усилия, изгибающие M_{ij} и крутящие H_{ij} моменты, а также силовые факторы (N_3 , P_{il}), вызывающие обжатие нормали, определяются по формулам:

$$\begin{aligned} N_i &= \sum_{s=m-z_s}^{s=m+z_s+1} \int \sigma_{ii}^{(s)} (1 + k_j z) dz; \\ Q_i &= \sum_{s=m-z_s}^{s=m+z_s+1} \int \sigma_{i3}^{(s)} (1 + k_j z) dz; & M_{il} &= \sum_{s=m-z_s}^{s=m+z_s+1} \int \sigma_{il}^{(s)} (1 + k_j z) l_j dz; \\ S_{ij} &= \sum_{s=m-z_s}^{s=m+z_s+1} \int \sigma_{ij}^{(s)} (1 + k_j z) dz; & H_{ij} &= \sum_{s=m-z_s}^{s=m+z_s+1} \int \sigma_{i2}^{(s)} (1 + k_i z) l_j dz; \\ N_3 &= \sum_{s=m-z_s}^{s=m+z_s+1} \int \sigma_{33}^{(s)} (1 + k_1 z) (1 + k_2 z) \frac{dl_3}{dz} dz; \\ P_{il} &= \sum_{s=m-z_s}^{s=m+z_s+1} \int \sigma_{i3}^{(s)} (1 + k_j z) l_j dz, \end{aligned} \quad (10)$$

где $ij = 1, 2; i \neq j; i = 1, 2, 3$.

Подставляя уравнения (5—8) в (10), получим связь между усилиями-моментами N_{ij} и компонентами деформации срединной поверхности оболочки ε_{ij}^0 :

$$N_{ij} = c_{ij} \varepsilon_{ij}^0. \quad (11)$$

Компоненты матрицы жесткости c_{ij} в общем случае определяются по формулам:

$$c_{ij}(a_1, a_2) = \sum_{s=m_-}^{s=m_+} \int_{z_s}^{z_{s+1}} A_{pq} \frac{(1+k_{nz})^a}{(1+k_{mz})^b} f_1^c f_2^d f_3^e f_1^i f_2^j r_i dz; \quad (12)$$

$$[m_-; m_+ = f(a_1, a_2)].$$

Уравнения движения получены на основе вариационного принципа Остроградского-Гамильтона и имеют вид:

$$\frac{\partial (A_2 N_1)}{\partial a_1} + \frac{\partial (A_1 S_{21})}{\partial a_2} + \frac{\partial A_1}{\partial a_2} S_{12} - N_2 \frac{\partial A_2}{\partial a_1} + A_1 A_2 k_1 Q_1 = A_1 A_2 \times$$

$$\times \left\{ \frac{d^2 u_1}{dt^2} [B_{00}^{(0)} + (k_1 + k_2) B_{00}^{(1)} + k_1 k_2 B_{00}^{(2)}] + \right.$$

$$\left. + \frac{d^2 \gamma_1}{dt^2} [B_{10}^{(0)} + (k_1 + k_2) B_{10}^{(1)} + k_1 k_2 B_{10}^{(2)}] \right\};$$

$$\frac{\partial (A_2 S_{12})}{\partial a_1} + \frac{\partial (A_1 N_2)}{\partial a_2} + S_{21} \frac{\partial A_2}{\partial a_1} - N_1 \frac{\partial A_1}{\partial a_2} + A_1 A_2 k_2 Q_2 = A_1 A_2 \times$$

$$\times \left\{ \frac{d^2 u_2}{dt^2} [B_{00}^{(0)} + (k_1 + k_2) B_{00}^{(1)} + k_1 k_2 B_{00}^{(2)}] + \frac{d^2 \gamma_2}{dt^2} \times \right.$$

$$\times [B_{20}^{(0)} + (k_1 + k_2) B_{20}^{(1)} + k_1 k_2 B_{20}^{(2)}] \left. \right\};$$

$$\frac{\partial (A_2 Q_1)}{\partial a_1} + \frac{\partial (A_1 Q_2)}{\partial a_2} - A_1 A_2 (k_1 N_1 + k_2 N_2) = A_1 A_2 \left\{ \frac{d^2 w}{dt^2} \times \right.$$

$$\times [B_{00}^{(0)} + (k_1 + k_2) B_{00}^{(1)} + k_1 k_2 B_{00}^{(2)}] + \frac{d^2 w'}{dt^2} \times$$

$$\times [B_{30}^{(0)} + (k_1 + k_2) B_{30}^{(1)} + k_1 k_2 B_{30}^{(2)}] \left. \right\};$$

$$\frac{\partial (A_2 M_{11})}{\partial a_1} + \frac{\partial (A_1 H_{21})}{\partial a_2} + H_{11} \frac{\partial A_1}{\partial a_2} - M_{21} \frac{\partial A_2}{\partial a_1} - A_1 A_2 P_{11} = A_1 A_2 \times$$

$$\left\{ \frac{d^2 u_1}{dt^2} [B_{10}^{(0)} + (k_1 + k_2) B_{10}^{(1)} + k_1 k_2 B_{12}^{(2)}] + \frac{d^2 \gamma_1}{dt^2} \times \right.$$

$$\times [B_{11}^{(0)} + (k_1 + k_2) B_{11}^{(1)} + k_1 k_2 B_{11}^{(2)}] \left. \right\};$$

$$\frac{\partial (A_2 H_{12})}{\partial a_1} + \frac{\partial (A_1 M_{22})}{\partial a_2} + H_{22} \frac{\partial A_2}{\partial a_1} - M_{12} \frac{\partial A_1}{\partial a_2} - A_1 A_2 P_{22} = A_1 A_2 \times$$

$$\times \left\{ \frac{d^2 u_2}{dt^2} [B_{20}^{(0)} + (k_1 + k_2) B_{20}^{(1)} + k_1 k_2 B_{20}^{(2)}] + \frac{d^2 \gamma_2}{dt^2} \times \right.$$

$$\times [B_{22}^{(0)} + (k_1 + k_2) B_{22}^{(1)} + k_1 k_2 B_{22}^{(2)}] \left. \right\};$$

$$\frac{\partial (A_2 P_{13})}{\partial a_1} + \frac{\partial (A_1 P_{23})}{\partial a_2} - A_1 A_2 (N_3 + k_1 M_{13} + k_2 M_{23}) = A_1 A_2 \times$$

$$\times \left\{ \frac{d^2 w}{dt^2} [B_{30}^{(0)} + (k_1 + k_2) B_{30}^{(1)} + k_1 k_2 B_{30}^{(2)}] + \frac{d^2 w'}{dt^2} \times \right. \\ \left. \times [B_{33}^{(0)} + (k_1 + k_2) B_{33}^{(1)} + k_1 k_2 B_{33}^{(2)}] \right\}, \quad (13)$$

$$\text{где } B_{ij}^{(k)}(a_1, a_2) = \sum_{m-z_s}^{m+z_s+1} \int \rho_s f_i f_j z^k dz;$$

$ij = 0, 1, 2, 3, 4; K = 0, 1, 2; f_c = 1;$

ρ_s — плотность материала s -го слоя.

Уравнения (5), (6), (7), (10), (13) учитывают специфику строения и свойства композиционных материалов. Их можно рассматривать как исходные при изучении прочности и колебаний оболочек, удовлетворяя граничным и начальным условиям.

ЛИТЕРАТУРА

1. Григорюк Э. П., Коган Ф. А. Современное состояние теории многослойных оболочек, т. 8, вып. 6. «Прикладная механика», 1972, № 3.
2. Амбарцумян С. А. Общая теория анизотропных оболочек. М., «Наука», 1974.
3. Либреску Л. К уточненной линейной теории упругих анизотропных многослойных оболочек, ч. 1. «Механика полимеров», 1975, № 6.
4. Пикуль В. В. К теории тонких неоднородных пластин и рологих оболочек. «Проблемы прочности», 1977, № 5.
5. Карташов Г. Г., Степаненко Н. Д. Основные уравнения напряженно-деформированного состояния оболочек, изготавливаемых из композиционных материалов. В сб.: «Вибрационная прочность и надежность двигателей и систем летательных аппаратов», вып. 3. КуАИ, 1976.
6. Новожилов В. В. Основы нелинейной теории уругости. М.-Л., Гостехиздат, 1948.
7. Рассказов А. О. К теории многослойных ортотропных пологих оболочек. «Прикладная механика», 1976, № 11.

УДК 621.438:620.17

В. И. Костин, В. А. Письменов, Т. Л. Семиврагови

К ВОПРОСУ О НАДЕЖНОСТИ ОПРЕДЕЛЕНИЯ
МАКСИМАЛЬНЫХ ЗНАЧЕНИИ НАПРЯЖЕНИИ
ПРИ ТЕНЗОМЕТРИРОВАНИИ ЛОПАТОК

В настоящее время основным критерием надежности при оценке вибропрочности лопаток является коэффициент запаса прочности, представляющий отношение предела усталости σ_{-1} к максимальному значению действующих переменных напряжений σ_v .