Выводы

1. Демпфирующее устройство из троса способно интенсивно поглощать энергию колебаний. Введение тросовых элементов в замок увеличивает демпфирующие свойства лопаток.
2. С точки зрения получения высоких демпфирующих свойств лопатки наиболее перспективен замок со скругленными опорными поверхностями. Сочетание такого замка с тросовым демпфирующим элементом способствует увеличению демпфирования лопаток за счет подвижки замка и высоких демпфирующих свойств элемента троса.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Фролов В. А.* О замковом демпфировании компрессорных лопаток. Труды КуАИ, вып. 51, 1972.
2. *Иванов В. П., Огородов В. Т.* Высокочастотный воздушный вибростенд. Труды КуАИ, вып. XIX, 1965.

УДК 621.886:4.001.24

В. М. Чернышев

ИССЛЕДОВАНИЕ ВИБРОПОГЛОЩАЮЩИХ СВОЙСТВ ПЛАСТИН, ДЕМПФИРОВАННЫХ ЖЕСТКИМИ ПОЛИМЕРНЫМИ ПОКРЫТИЯМИ, И СТЕРЖНЕЙ С МЯГКИМИ ПОКРЫТИЯМИ

Динамическая напряженность тонколистовых металлических конструкций, подверженных интенсивным вибрационным и ударным нагрузкам, может быть существенно снижена путем применения демпфирующих покрытий из пластмасс или специальных вибропоглощающих материалов.

Поскольку эффект покрытий определяется, главным образом, степенью вызываемого ими увеличения рассеяния энергии колебаний, далее решается задача определения вибропоглощающих свойств систем с демпфирующими покрытиями (коэффициента поглощения ψ и рассеянной за цикл энергии Ψ). Рассматриваются пластины с жесткими полимерными покрытиями и стержни, демпфированные слоем мягкого материала с высокими вибропоглощающими свойствами и скрепленной с ним жесткой на растяжение, но весьма гибкой, по сравнению с демпфируемым стержнем, стесняющей полосой. Задачи решаются энергетическим методом.

Пластины с жесткими полимерными покрытиями. В общем случае демпфирующих слоев может быть несколько, поэтому рассматривается многослойная пластина с суммарным количеством слоев, включая пластину $n \geqslant 2$ (многослойные демпфирующие покрытия применяются, например, для улучшения частотных и температурных характеристик вибропоглощающих свойств систем).

Считается, что материалы слоев изотропны, слои имеют постоянную толщину и прочно соединены (склеены) друг с другом по поверхности соприкосновения, так что при поперечном изгибе они работают совместно, а для многослойной пластины в целом справедлива гипотеза Кирхгофа-Лява.

Вводятся, кроме того, и другие допущения, обычно используемые в теории изгиба тонких пластин из однородных материалов при небольших поперечных деформациях [1].

На основании принятых допущений относительные и сдвиговые деформации многослойной пластины выражаются через ее прогибы такими же соотношениями, как и для однородных пластин:

$$\varepsilon_x = -z\frac{\partial^2 w}{\partial x^2};\ \varepsilon_y = -z\frac{\partial^2 w}{\partial y^2};\ \gamma_{xy} = -2z\frac{\partial^2 w}{\partial x\,\partial y}. \qquad (1)$$

где z — расстояние от нейтральной плоскости до волокна.

При выводе уравнения колебаний многослойной пластины взаимное влияние слоев друг на друга, вызванное неодинаковостью коэффициентов Пуассона их материалов, учитывалось приближенно введением приведенного коэффициента поперечной деформации. Уравнения свободных и вынужденных колебаний многослойной пластины принимают при этом вид соответствующих уравнений для однородной пластины с приведенной цилиндрической жесткостью:

$$D = \sum_{k=1}^{n} D_k = \sum_{k=1}^{n} \frac{E_k h_k^3}{12(1-\mu_k^2)}\left(1 + 12\frac{z_k^2}{h_k^2}\right), \qquad (2)$$

где h_k, D_k — высота и цилиндрическая жесткость k-го слоя; E_k; μ_k — модуль упругости и коэффициент Пуассона его материала;

z_k — расстояние от срединной плоскости k-го слоя до нейтральной плоскости пластины, положение которой определяется из условия

$$\sum_{k=1}^{n} \frac{E_k h_k z_k}{1-\mu_k^2} = 0. \qquad (3)$$

Вибропоглощающие свойства многослойных пластин определялись для случая моногармонических колебаний на одной из собственных форм. Прогибы в этом случае можно представить в виде произведения

$$w(x, y, t) = A w_0 (x, y) \cos (\omega t - \delta), \qquad (4)$$

где A — амплитуда колебаний какой-либо характерной точки (x_0, y_0) пластины; $w_0(x, y)$ — форма колебаний, нормированная так, чтобы выполнялось условие $w_0(x_0, y_0) = 1$.

При вычислении потенциальной энергии пластины и энергии, рассеиваемой ею за цикл, напряжения в слоях определялись с использованием действительных значений упругих постоянных материалов соответствующих слоев E_k, μ_k ($k = 1, 2, ..., n$). При этом максимальная потенциальная энергия цикла составляла

$$\Pi = \frac{A^2}{2} \left\{ D \iint_{(s)} \left(\frac{\partial^2 w_0}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 w_0}{\partial y^2} \right)^2 ds + \sum_{k=1}^{n} (1-\mu_k) D_k \iint_{(s)} \times \right.$$

$$\left. \left[\frac{\partial^2 w_0}{\partial x^2} \frac{\partial^2 w_0}{\partial y^2} - \left(\frac{\partial^2 w_0}{\partial x \partial y} \right)^2 \right] ds \right\} = \Pi_0 A^2. \qquad (5)$$

где Π_0 — потенциальная энергия многослойной пластины при $A = 1$.

Энергия, рассеиваемая материалом при плоском напряженном состоянии, часто рассчитывается по принципу суперпозиции. Однако применимость его к такого рода задачам экспериментально не подтверждена. Гораздо более согласованы с опытом значения энергии, вычисленные через эквивалентные напряжения.

При этом энергия, рассеиваемая единицей объема k-го материала, имеет вид

$$\Delta \Psi_k (\sigma_x, \sigma_y, \tau_{xy}) = \sum_{i=0}^{m} \lambda_{ik} \sigma_{эk}^{i+2}, \qquad (6)$$

где $\sigma_{эk}$ — одноосное напряжение, эквивалентное по рассеиваемой k-м материалом за цикл энергии рассматриваемому плоскому напряженному состоянию; λ_{ik} — константы материала k-го слоя.

Экспериментально доказано, что у металлов с микропластическим механизмом рассеяния энергии при амплитудах напряжений меньших $(0,6—0,8)\ \sigma_{-1}$ таким эквивалентом является напряжение, обеспечивающее тот же уровень энергии формоизменения, что и заданное плоское напряженное состояние.

В этом случае

$$\sigma_{эk} = \frac{E_k |z| A}{1-\mu_k^2} \Phi_k (w_0), \tag{7}$$

где

$$\Phi_k (w_0) = \left\{ (1-\mu_k+\mu_k^2)\left(\frac{\partial^2 w_0}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 w_0}{\partial y^2}\right)^2 - 3(1-\mu_k^2)\left[\frac{\partial^2 w_0}{\partial x^2} \times \right.\right.$$
$$\left.\left. \times \frac{\partial^2 w_0}{\partial y^2} - \left(\frac{\partial^2 w_0}{\partial x\, \partial y}\right)^2\right]\right\}^{1/2}. \tag{8}$$

У других материалов, и особенно у материалов с иным механизмом рассеяния энергии, функция $\Phi\ (w_0)$ может быть иной, поэтому вид ее для каждого конкретного материала следует устанавливать экспериментально.

Величину энергии $\psi\ (A)$, рассеиваемой всей многослойной пластиной за цикл, можно получить интегрированием уравнения (6) с учетом равенства (7) по объему k-го слоя с последующим суммированием полученных выражений по «k» $(k = 1,\ 2,\ ...,)$, а коэффициент поглощения $\psi\ (A)$ — делением $\Psi\ (A)$ на П.

Выполняя эти операции, найдем

$$\Psi (A) = \sum_{i=0}^{m} \alpha_i A^{i+2};\quad \psi (A) = \sum_{i=0}^{m} \beta_i A^i, \tag{9}$$

где

$$\alpha_i = \beta_i \Pi_0 = \sum_{k=1}^{n} \lambda_{ik} D_{ik} \left(\frac{E_k}{1-\mu_k^2}\right)^{i+1} \iint\limits_{(s)} [\Phi_k (w_0)]^{i+2} ds\ ; \tag{10}$$

$$D_{ik} = \frac{E_k}{1-\mu_k^2} \int\limits_{hk} |z|^{i+2} dz\,. \tag{11}$$

При $i = 0$ коэффициенты D_{ik} совпадают с цилиндрической жесткостью соответствующего слоя относительно нейтрали $D_{0k} = D_k$.

Выражения для $\Psi\ (A)$ и $\psi\ (A)$ справедливы и для однородных пластин. В этом случае от сумм по «k» в выражениях для коэффициентов α_i и β_i остается только по одному члену.

Поскольку вибропоглощающие свойства определены для конкретной формы моногармонических колебаний многослойной пластины, то после определения зависимостей $\Psi(A)$ или $\psi(A)$ задача сводится к рассмотрению колебаний системы с одной степенью свободы при известных вибропоглощающих свойствах. Решить ее можно любым из известных методов [2] — [4].

Полученное решение легко распространяется и на случай круглых пластин преобразованием соответствующих уравнений и равенств к полярным координатам.

Стержни с мягкими покрытиями. При определении вибропоглощающих свойств стержней с мягкими демпфирующими покрытиями принимались следующие, обычно используемые в теории трехслойных систем с мягкой прослойкой, допущения [5], [6]: к демпфируемому стержню и стесняющей полосе применима гипотеза плоских сечений; высота мягкого (среднего) слоя в процессе колебаний стержня не изменяется, он работает только на сдвиг, напряжения в нем постоянны по высоте и пропорциональны сдвиговой деформации; на поверхности раздела мягкого и жестких слоев не происходит скольжения. Кроме этого полагалось, что коэффициенты поглощения материалов слоев являются линейными функциями соответствующих деформаций: $\psi_i(\xi) = \psi_{i0} + \psi_{i1}\xi_i$.

Из рассмотрения условий равновесия элемента стержня с покрытием получена следующая система уравнений для продольных смещений центров тяжести сечений стержня u_1 и стесняющей полосы u_2:

$$\left.\begin{aligned} u_1'' - \frac{C_1 C_2}{l^2}(u_1 - u_2) &= \frac{a h_{12} C_1 C_2}{l^2} X'(x); \\ u_2'' + \frac{C_1}{l^2}(u_1 - u_2) &= -\frac{a h_{12} C_1}{l^2} X'(x). \end{aligned}\right\} \tag{12}$$

Здесь a — амплитуда колебаний характерного сечения стержня x_0; $X(x)$ — форма колебаний, нормированная так, чтобы выполнялось условие $X(x) = 1$; h_{12} — расстояние между центрами сечений демпфируемого стержня и стесняющей полосы; C_1 и C_2 — коэффициенты, соответственно равные:

$$C_1 = \frac{Gl^2}{E_2 h_2 h}; \quad C_2 = \frac{E_2 h_2}{E_1 h_1}, \tag{13}$$

где E_1, E_2 — модули упругости материалов стержня и стесняющей полосы; G — модуль сдвига материала демпфирующего слоя; h_1, h_2, h — высота стержня, стесняющей полосы и демпфирующего слоя.

С учетом связи между u_1' и u_2' получим решение соответствующей однородной системы уравнений (12):

$$\left.\begin{aligned} u_1^* &= a\left[D - C_2\left(A\,\mathrm{sh}\frac{\varkappa x}{l} + B\,\mathrm{ch}\frac{\varkappa x}{l}\right)\right];\\ u_2^* &= a\left[D + A\,\mathrm{sh}\frac{\varkappa x}{l} + B\,\mathrm{ch}\frac{\varkappa x}{l}\right], \end{aligned}\right\} \qquad (14)$$

где

$$\varkappa_2 = \frac{Gl^2}{E_2h_2h}\left(1 + \frac{E_2h_2}{E_1h_1}\right) = C_1\,(1 + C_2).$$

При определении вибропоглощающих свойств демпфирующих покрытий из мягких полимерных материалов со стесняющей полосой, обладающей невысокой изгибной жесткостью ($C_3 = E_2I_2/E_1I_1 \ll 1$), приближенно можно считать, что формы колебаний стержня с покрытием совпадают с собственными формами колебаний соответствующего недемпфированного стержня.

Тогда частное решение системы (12) для стержней постоянного сечения будет иметь вид

$$\left.\begin{aligned} u_1^{**} &= -aC_2\,u_*\,(x);\\ u_2^{**} &= a\,u_*(x), \end{aligned}\right\} \qquad (15)$$

где

$$u_* x = \alpha_n\left(L_n \sin\frac{\lambda_n x}{l} - K_n \cos\frac{\lambda_n x}{l}\right) + \beta_n\left(N_n\,\mathrm{sh}\frac{\lambda_n x}{l} + M_n\,\mathrm{ch}\frac{\lambda_n x}{l}\right). \qquad (16)$$

Здесь λ_n ($n = 1, 2, 3, \ldots$) — корни частотного уравнения; K_n, L_n, M_n, N_n — коэффициенты балочных функций (нормированных) [7]; α_n и β_n — коэффициенты соответственно равные:

$$\alpha_n = \frac{\lambda_n h_{12} C_1}{l\,(\lambda^2_n + \varkappa^2)}; \quad \beta_n = \frac{\lambda_n h_{12} C_1}{l\,(\lambda^2_n - \varkappa^2)}. \qquad (17)$$

С учетом уравнений (14), (15) общее решение неоднородной системы дифференциальных уравнений (12) принимает вид

$$\left.\begin{aligned} u_1 &= a\left[D - C_2\left(A\,\mathrm{sh}\frac{\varkappa x}{l} + B\,\mathrm{ch}\frac{\varkappa x}{l} + u_*\right)\right] = a\,v_1\,(x);\\ u_2 &= a\left[D + A\,\mathrm{sh}\frac{\varkappa x}{l} + B\,\mathrm{ch}\frac{\varkappa x}{l} + u_*\right] = a\,v_2\,(x); \end{aligned}\right| \qquad (18)$$

где через $v_1\,(x)$ и $v_2\,(x)$ обозначены члены, заключенные в квадратные скобки. Коэффициенты a, B и D общего решения (18) определяются из условий закрепления концов стержня и стесняющей полосы.

Общее решение (18) позволяет найти распределение амплитуд относительных деформаций по длине и высоте демпфируемого стержня $\varepsilon_1(x, z_1)$, а также стесняющей полосы $\varepsilon_2(x, z_2)$ и амплитуд сдвиговых деформаций по длине:

$$\varepsilon_1(x, z_1) = a\,[v_1'(x) - z_1 X''(x)];$$

$$\varepsilon_2(x, z_2) = a\,[v_2'(x) - z_2 X''(x)];$$

$$\gamma(x) = a\,\frac{E_2 h_2}{G}\, v_2''(x). \tag{19}$$

Здесь z_1 и z_2 — расстояния, отсчитываемые от срединных плоскостей демпфируемого стержня и стесняющей полосы соответственно.

Найденные законы распределения деформаций по объему элементов стержня с покрытием позволяют вычислить максимальную потенциальную энергию и энергию, рассеиваемую системой за цикл, путем интегрирования соответствующих энергий по объему стержня, стесняющей полосы и демпфирующего слоя — с последующим суммированием накопленных и рассеянных энергий в этих элементах.

Для коэффициента поглощения системы при этом получено следующее выражение:

$$\psi(a) = \frac{C_1 h_1^2 (\psi_{10} + C_3 \psi_{20}) I_1 + 12 C_2 [C_1 (C_2 \psi_{10} + \psi_{20}) I_2 + l^2 \psi_{30} I_3]}{C_1 h_1^2 (1 + C_3) I_1 + 12 C_2 (\gamma^2 I_2 + l^2 I_3)} +$$

$$+ 6C_1 \frac{\left(\frac{h_1^3}{16} I_4 + \frac{3}{2} C_2^2 h_1 I_7 + \frac{1}{h_1} C_2^4 I_9\right) \psi_{11} + 2 C_2 \left[\left(I_5 + \frac{h_2^2}{4} I_8\right) \psi_{21} + \frac{l^4}{C_1^2 h} \psi_{31} I_6\right]}{C_1 h_1^2 (1 + C_3) I_3 + 12 C_2 (\gamma^2 I_2 + l^2 I_3)}\, a \tag{20}$$

Здесь I_i $(i = 1, 2, \ldots, 9)$ — интегралы:

$$\left.\begin{aligned} I_1 &= \int_l [X''(x)]^2 dx; & I_4 &= \int_l |X''(x)|^3 dx; \\ I_2 &= \int_l [v_2'(x)]^2 dx; & I_5 &= \int_l |v_2'(x)|^3 dx; \\ I_3 &= \int_l [v_2''(x)]^2 dx; & I_6 &= \int_l |v_2''(x)|^3 dx; \end{aligned}\right|$$

$$\left.\begin{aligned} I_7 &= \int_l |X''(x)|\,[v_2'(x)]^2 dx; \\ I_8 &= \int_l |v_2'(x)|\,[X''(x)]^2 dx; \\ I_9 &= \int_l [v_2'(x)]^4 \cdot |X''(x)|^{-1} dx. \end{aligned}\right| \tag{21}$$

В ряде важных с практической точки зрения частных случаев выражение (20) для амплитудной зависимости коэффициента поглощения существенно упрощается. Например, пренебрегая потерями в стесняющей полосе и демпфируемом стержне и полагая, как и в решениях Кервина [8] и Дитаранто [9], коэффициент поглощения демпфирующего материала независящим от амплитуды деформации, для коэффициента поглощения стержня с покрытием получим

$$\psi = \frac{12\, C_2 l^2 I_3\, \psi_{30}}{C_1 h_1^2\, (1 + C_3)\, I_1 + 12\, C_2\, (\gamma^2\, I_2 + l^2\, I_3)}. \qquad (22)$$

Поскольку входящие в равенство (22) интегралы I_1, I_2 и I_3 вычисляются по уравнению (21) с учетом условий закрепления концов стержня и стесняющей полосы, даже этот предельно простой вариант формулы для расчета коэффициента поглощения стержня с демпфирующим покрытием обладает большей общностью, чем соответствующие решения Кервина и Дитаранто.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Тимошенко С. П., Войновский-Кригер С.* Пластинки и оболочки. М., Физматгиз, 1963.
2. *Пановко Я. Г.* Внутреннее трение при колебаниях упругих систем. М., Физматгиз, 1960.
3. *Писаренко Г. С.* Колебания механических систем с учетом несовершенной упругости материала. Киев, «Наукова думка», 1970.
4. *Сорокин Е. С.* К теории внутреннего трения при колебаниях упругих систем. М., Госстройиздат, 1960.
5. *Болотин В. В.* Изв. АН СССР, ОТН. «Механика и машиностроение», 1963, № 3.
6. *Муштари Х. М.* Изв. АН СССР, ОТН. «Механика и машиностроение», 1960, № 6.
7. *Бабаков И. М.* Теория колебаний. М., «Наука», 1968.
8. *Kerwin E. M.* Damping of Flexural Waves by a Constrained Viscoelastic Layer. J. Acoustic Soc. Am., vol. 31, № 7, 1959.
9. *Дитаранто Р.* Прикладная механика, «Мир», 1965, № 4.