КУЙБЫШЕВСКИЙ АВИАЦИОННЫЙ ИНСТИТУТ
ТРУДЫ. ВЫПУСК XIX. 1965 г.
Вибрационная прочность и надежность авиационных двигателей

И. С. АХМЕДЬЯНОВ

ИНТЕГРИРОВАНИЕ ОСНОВНОГО ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНОГО УРАВНЕНИЯ ИЗГИБА СФЕРИЧЕСКОЙ ОБОЛОЧКИ ПРИ ПРОИЗВОЛЬНОМ НАГРУЖЕНИИ

Решение задачи о напряженном и деформированном состоянии сферической оболочки в случае произвольного нагружения приводит к необходимости интегрирования уравнения [1, 2, 3, 4]

$$\frac{d^2y_n}{d\psi^2}+\operatorname{ctg}\psi\frac{dy_n}{d\psi}+\left[1+i\lambda-\frac{n^2}{\sin^2\psi}\right]y_n=0, \tag{1}$$

в котором y_n — искомая функция; ψ — угол между осью оболочки и внешней нормалью к срединной поверхности; λ — численный параметр, зависящий от отношения радиуса срединной поверхности оболочки R к ее толщине δ и коэффициента Пуссона μ; n — целое положительное число.

В работе [1] В. В. Соколовского решение уравнения (1) было представлено в виде равенства

$$y_n(\psi)=u_n(\psi)\sin^n\psi, \tag{2}$$

в котором функция u_n является решением более простого уравнения второго порядка (точка означает дифференцирование по аргументу ψ):

$$\ddot{u}_n+(2n+1)\dot{u}_n\operatorname{ctg}\psi-(n^2+n-1-i\lambda)u_n=0. \tag{3}$$

Подстановкой

$$t=\sin^2\psi$$

В. В. Соколовскому удалось свести уравнение (3) к гипергеометрическому с частными решениями в форме гипергеометрических рядов с комплексными коэффициентами. Однако эти ряды не были приведены к виду, удобному для практического использования.

Вскоре после работы [1] появились исследования В. В. Новожилова [2] и А. Л. Гольденвейзера [3], в которых решение уравнения (1) было выражено через нетабулированные присоединенные сферические функции комплексной степени. Вопрос же о практическом использовании полученных ими результатов остался нерешенным.

Следующей работой, в которой рассматривался вопрос об интегрировании уравнения (1), явилось исследование В. Г. Рекача [5]. Он записал выражение для y_n в виде произведения

$$y_n(\psi) = v_n(\psi) \operatorname{tg}^n \frac{\psi}{2}$$

и получил следующее гипергеометрическое уравнение для определения функции v_n:

$$x(1-x) v_n'' + (n+1-2x) v_n' + (1+i\lambda) v_n = 0. \tag{4}$$

В этом уравнении

$$x = \sin^2 \frac{\psi}{2}. \tag{5}$$

Частные решения уравнения (4) В. Г. Рекач представил в виде гипергеометрических рядов, причем в этих рядах им были выделены действительные и мнимые части. Существенным является также и то, что ряды, полученные В. Г. Рекачом, обладают лучшей сходимостью по сравнению с рядами, использованными В. В. Соколовским. Однако практическое применение этих результатов осложняется тем, что действительные и мнимые части двух линейно независимых частных решений уравнения (4) одно из этих частных решений обращается в бесконечность при $x=0$) являются возрастающими функциями при увеличении аргумента x. Это обстоятельство приводит к появлению малой разности близких чисел при расчете оболочек в виде сферических поясов. Здесь же нужно отметить, что частное решение, неограниченное при $x=0$, имеет весьма сложную структуру, вследствие чего оно требует сложного программирования для вычислений на электронных цифровых вычислительных машинах. Другим существенным недостатком решения В. Г. Рекача является необходимость в вычислении для каждого значения n восьми степенных рядов (четырех искомых функций и их первых производных), что требует затраты очень большой вычислительной работы*.

В настоящей статье приводится другое, практически более приемлемое решение уравнения (1). Это решение требует для своего использования (для всех значений n) вычисления всего лишь четырех степенных рядов, соответствующих только одному значению $n=0$.

Предлагаемый метод решения задачи состоит в следующем.

Будем искать решение уравнения (1) в форме (2). Но, в отличие от В. В. Соколовского, применим к уравнению (3) подстановку (4). В результате получаем гипергеометрическое уравнение вида

* Указанные недостатки решения В. Г. Рекача присущи также и решению полученному В. В. Соколовским.

$$x(1-x)u_n'' + (n+1)(1-2x)u_n' - (n^2+n-1-i\lambda)u_n = 0. \qquad (5)$$

Легко можно убедиться [6], что решение уравнения (5) будет иметь вид:

$$u_n = \frac{d^n\tau}{dx^n}, \qquad (6)$$

где $\tau = \tau(x)$ — решение другого гипергеометрического уравнения

$$x(1-x)\tau'' + (1-2x)\tau' + (1+i\lambda)\tau = 0. \qquad (7)$$

Это уравнение получается из (5) при $n=0$. Его решения можно записать в виде следующих равенств [6, 7, 8]:

$$\tau_1 = \varphi_1 + i\omega_1, \quad \tau_2 = \varphi_2 + i\omega_2.$$

Здесь

$$\varphi_1 = 1 + \sum_{n=1}^{\infty} \alpha_n x^n, \quad \omega_1 = \sum_{n=1}^{\infty} \beta_n x^n, \qquad (8)$$

$$\varphi_2 = 1 + \sum_{n=1}^{\infty} \alpha_n (1-x)^n, \quad \omega_2 = \sum_{n=1}^{\infty} \beta_n (1-x)^n, \qquad (9)$$

причем

$$\alpha_n = \frac{n(n-1)-1}{n^2}\alpha_{n-1} + \frac{\lambda}{n^2}\beta_{n-1},$$

$$\beta_n = \frac{n(n-1)-1}{n^2}\beta_{n-1} - \frac{\lambda}{n^2}\alpha_{n-1},$$

$$\alpha_0 = 1, \quad \beta_0 = 0.$$

Приняв обозначения

$$u_{n1} = \varphi_{n1} + i\omega_{n1}, \quad u_{n2} = \varphi_{n2} + i\omega_{n2} \qquad (10)$$

для частных решений уравнения (5) и вспомнив равенство (2), получим линейно независимые частные решения уравнения (1) в таком виде:

$$y_{n1} = (\varphi_{n1} + i\omega_{n1})\sin^n\psi, \quad y_{n2} = (\varphi_{n2} + i\omega_{n2})\sin^n\psi.$$

Отсюда легко написать и общее решение уравнения (1)

$$y_n = c_{n1}y_{n1} + c_{n2}y_{n2} = (c_{n1}u_{n1} + c_{n2}u_{n2})\sin^n\psi.$$

Здесь c_{n1} и c_{n2} — комплексные произвольные постоянные.

Из сопоставления равенств (10) и (6) приходим к следующим выражениям для функций φ_{n1} и ω_{n1}:

$$\varphi_{n1} = \frac{d^n\varphi_1}{dx^n}, \quad \omega_{n1} = \frac{d^n\omega_1}{dx^n}. \qquad (11)$$

Формулы для вычисления функций φ_{n2} и ω_{n2} получаются из выражений (11) изменением индекса 1 на индекс 2. Это замечание сохраняет силу и для последующих аналогичных формул.

Из выражений (11) следуют соотношения:

$$\varphi_{n1}' = \varphi_{n+1,1}, \quad \omega_{n1}' = \omega_{n+1,1}. \qquad (12)$$

Производные функций φ_{n1} и ω_{n1} по аргументу ψ определяются равенствами

$$\dot{\varphi}_{n1} = \frac{1}{2}\varphi_{n+1,1}\sin\psi, \quad \dot{\omega}_{n1} = \frac{1}{2}\omega_{n+1,1}\sin\psi.$$

Рекуррентные формулы для вычисления значений функций φ_{n1} и ω_{n1} можно получить, воспользовавшись уравнением (5) и зависимостями (10)—(12):

$$\varphi_{n+2,1} = -\frac{(n+1)(1-2x)}{x(1-x)}\varphi_{n+1,1} + \frac{(n^2+n-1)\varphi_{n1}+\lambda\omega_{n1}}{x(1-x)}$$

$$\omega_{n+2,1} = -\frac{(n+1)(1-2x)}{x(1-x)}\omega_{n+1,1} + \frac{(n^2+n-1)\omega_{n1}-\lambda\varphi_{n1}}{x(1-x)}.$$

В этих формулах $n=0,\ 1,\ 2,\ldots$ причем

$$\varphi_{01} = \varphi_1, \quad \omega_{01} = \omega_1.$$

Из формул (2), (8)—(11) следует, что для получения общего решения уравнения (1) достаточно иметь значения функций φ_1, ω_1, φ_1' и ω_1' для $0 \leqslant x \leqslant 1$. Для расчета замкнутых в вершине сферических оболочек значения функций φ_1, ω_1 и их производных можно вычислять непосредственно по формулам (8) вплоть до угла $\psi=90°$ ($x=0{,}5$). Если исследуемая оболочка представляет собой сферический пояс, то для ее расчета необходимы значения φ_1, ω_1, φ_1' и ω_1' как при $x<0{,}5$, так и при $x>0{,}5$. Но при значениях x, близких к 1, ряды (8) становятся медленно сходящимися. Поэтому целесообразно значения рядов (8) и их производных вычислять по другим формулам, которые получаются в результате интегрирования обеих частей уравнения (7) по x. Эти формулы приведены в статье [8]. Они устанавливают простые связи между функциями φ_1, ω_1, φ_1', ω_1' и интегралами от φ_1 и ω_1, имеющими сходимость, обеспечивающую возможность практического использования предлагаемого решения уравнения (1).

То обстоятельство, что функции φ_2 и ω_2 получаются из рядов φ_1 и ω_1 простой заменой аргумента x на аргумент $1-x$, позволяет для вычисления функций φ_1, ω_1, φ_2, ω_2 и их производных на электронных цифровых вычислительных машинах составлять всего лишь одну программу применительно к функциям φ_1, ω_1, φ_1' и ω_1'.

Практическому применению изложенного способа интегрирования уравнения (1) могут способствовать пятизначные таблицы функций φ_1, ω_1, φ_1', ω_1', φ_2, ω_2, φ_2' и ω_2', составленные кафедрой прочности летательных аппаратов Куйбышевского авиационного института. Эти таблицы составлены по результатам вычислений на электронных цифровых вычислительных машинах для значений параметра λ в пределах от $\lambda=100$ до $\lambda=300$ с интервалом $\Delta\lambda=10$.Угол ψ изменяется от 0 до 90° через 2°.

В заключение отметим, что функции φ_2 и ω_2 при $x=0$ обращаются в бесконечность и при возрастании x ведут себя, как затухающие функции. Благодаря этому свойству функций φ_2 и ω_2 исключается возможность появления малых разностей близких чисел при расчете сферических поясов.

ЛИТЕРАТУРА

1. *В. В. Соколовский.* О расчете сферической оболочки. Доклады АН СССР, т. XVI, № 1, 1937.
2. *В. В. Новожилов,* Расчет напряжений в тонкой сферической оболочке при произвольной нагрузке. Доклады АН СССР, т. XXVII, № 6, 1940.
3. *А. Л. Гольденвейзер,* Исследование напряженного состояния сферической оболочки, ПММ, т. VIII, в. 6, 1944.
4. *В. З. Власов,* Общая теория оболочек и ее приложения в технике, Гостехиздат, 1949.
5. *В. Г. Рекач,* Расчет тонких сферических оболочек. Научные доклады Высшей школы, Строительство, № 1, 1958.
6. *Н. Н. Лебедев,* Специальные функции и их приложения, Гостехиздат, 1953.
7. *И. С. Ахмедьянов,* Об одном методе интегрирования уравнений изгиба сферической оболочки при осесимметричном нагружении, ИВУЗ, Авиационная техника, № 3, 1962.
8. *И. С. Ахмедьянов,* К расчету тонких сферических оболочек при осесимметричном нагружении. Труды Куйбышевского авиационного института, в. XVII, 1963.