УДК 62—501.1

В. И. Головатый, Б. А. Дурасов

ИДЕНТИФИКАЦИЯ ЛИНЕЙНЫХ СТАЦИОНАРНЫХ СИСТЕМ

При решении практических задач оценки передаточных функций систем часто возникает ситуация, когда входное воздействие невозможно описать простой моделью, как это сделано, например, в работе [1]. В этом случае целесообразно входное воздействие аппроксимировать моделью в виде экспоненциального ряда:

$$x(t) = \sum_{j=0}^{k} k_j e^{\lambda_j t}. \tag{1}$$

Рассмотрим один из способов идентификации с помощью входного воздействия (1) передаточной функции линейной (линеаризованной) стационарной системы, представленной выражением

$$W(p) = \frac{\sum\limits_{j=0}^{m} b_j p^j}{\sum\limits_{j=0}^{n} a_j p^j} = \frac{B(p)}{A(p)}, \tag{2}$$

где $n > m$; $a_n = 1$.

Преобразование Лапласа для реакции системы с передаточной функцией (2) на входное воздействие (1) будет иметь вид:

$$Y(p) = \frac{B(p)}{A(p)} \sum_{j=0}^{k} \frac{k_j}{(p-\lambda_j)} + \frac{\sum\limits_{j=0}^{n-1} \gamma_j p^j}{A(p)}, \tag{3}$$

где γ_j — коэффициенты, зависящие от начальных значений выходной величины системы.

Выделив из первого слагаемого правой части выражения (3) те составляющие (всего их будет q), которые содержат коэффициенты входного сигнала, совпадающие с корнями характеристического уравнения передаточной функции системы, и объединив их со вторым слагаемым этого же выражения, получим

$$U(p) = \frac{B(p)}{A_1(p)} \sum_{j=0}^{h} \frac{k_j}{(p-\lambda_j)} + \frac{\sum\limits_{j=0}^{n+b-1} \gamma_j p^j}{D(p)}. \tag{4}$$

где

$$A_1(p) = \prod_{j=h+1}^{v} (p-\lambda_j)^{\nu_j}; \quad D(p) = \prod_{j=h+1}^{v} (p-\lambda_j)^{\omega_j};$$

$$h = k-q; \; v = k-q+r; \; \omega_j \begin{cases} \nu_j+1, \text{ если } (j = h+1, h+2, \ldots, k); \\ \nu_j, \text{ если } (j = k, k+1, \ldots, v). \end{cases}$$

В этих выражениях значения λ_j $(j = h+1, h+2, \ldots, v)$ являются корнями характеристического уравнения передаточной функции системы; r — число различных корней этого уравнения; ν_j — кратность j-того корня.

Запишем оригинал отклика системы в удобном для дальнейшего анализа виде:

$$y(t) = \sum_{i=0}^{h} K_i \left[\frac{B(p)}{A_1(p)} e^{pt}\right]_{p=\lambda_i} + \sum_{i=h+1}^{v} \left\{ \frac{1}{(\nu_i-1)!} \left[\frac{d^{\nu_i-1}}{dp^{\nu_i-1}} \right| \frac{B(p)}{A_1(p)} \times \right.$$

$$\times (p-\lambda_i)^{\nu_i} \sum_{i=0}^{h} \frac{k_i}{(p-\lambda_j)} e^{pt} \Bigg| \Bigg]_{p=\lambda_i} + \frac{1}{(\omega_i-1)!} \left[\frac{d^{\omega_i-1}}{dp^{\omega_i-1}} \times \right.$$

$$\times \left[\frac{\sum\limits_{j=0}^{n+q-1} \eta_j p^j}{D(p)} (p-\lambda_i)^{\omega_i} e^{pt} \right] \Bigg]_{p=\lambda_i}. \tag{5}$$

Продифференцировав заключенные в квадратные скобки выражения во втором слагаемом, объединив полученные выражения в один степенной ряд при соответствующих экспонентах и обозначив выражения при одинаковых степенях t через V_{ij}, будем иметь

$$y(t) = \sum_{i=1}^{h} C_i e^{\lambda_i t} + \sum_{i=h+1}^{v} e^{\lambda_i t} \sum_{j=0}^{\omega_i-1} V_{ij} t^j, \tag{6}$$

где

$$C_i = K_i \frac{B(\lambda_i)}{A_1(\lambda_i)}. \tag{7}$$

Ставим задачу приближения выходного сигнала системы

$$z(t) = y(t) + n(t) \tag{8}$$

его моделью (6).

Для случая выборочных сигналов (выходной сигнал системы задан дискретными во времени отсчетами) эмпирическому сигналу

$$z(lT) = \{ y(0), y(T), \ldots, y(NT) \} \tag{9}$$

ставим в соответствие модель в виде выражения

$$u\,(lT)=\sum_{i=1}^{h} C_i e^{\lambda_i eT}+\sum_{i=h+0}^{v} e^{\lambda_i eT}\sum_{j=1}^{\omega_{i}-1} V_{ij}(eT)^j. \qquad (10)$$

Полагая

$$e^{\lambda_i T}=\mu_i;\quad V_{ij}T^j=V_{ij}^{*}. \qquad (11)$$

легко показать, что задача определения коэффициентов λ_i в модели (10) аналогична определению значений показателей экспонент в задаче приближения эмпирических функций линейными комбинациями показательных функций и заключается в следующем.

Из системы $n+k+1$ линейных уравнений

$$\sum_{i=1}^{n+k+1} S_i \sum_{l=0}^{N-(n+k+2)} \Delta_{l+j}\,\Delta_{l+n+k-(i-1)}+$$

$$+\sum_{l=0}^{N-(n+k+2)} \Delta_{l+j}\,\Delta_{l+(n+k+1)}=0, \qquad (12)$$

$(j=0,\ 1,\ 2,\ \ldots,\ n+k)$,

где Δ_l — первая разность отсчетов выходного сигнала $z\,(lT)$, определяются значения переменных S_i.

Затем из уравнения

$$\mu^{n+k+1}+S_1\,\mu^{n+k}+\ldots+S_{n+k}\,\mu+S_{n+k+1}=0 \qquad (13)$$

находим значения корней μ_i, имеющих кратность δ_i, которая задается выражением

$$\delta_i=\begin{cases}1, \text{ если } (i=0,\ 1,\ 2,\ \ldots,\ h);\\ \omega_i, \text{ если } (i=h+1,\ h+2,\ \ldots,\ v).\end{cases}$$

Эти значения $\hat{\mu}_i$ являются оценками по методу наименьших квадратов переменных μ_i. Оценки значений искомых коэффициентов λ_i определяются из системы равенств

$$\hat{\lambda}_i=\frac{1}{T}\ln\hat{\mu}_i,\quad (i=0,\ 1,\ 2,\ \ldots,\ v), \qquad (14)$$

в которой через ln обозначено главное значение логарифма.

Исключая из полученного множества оценок значений оценки коэффициентов λ_j входного воздействия, получим оценку минимального многочлена

$$\hat{A}_1(p)=\prod_{i=k+1}^{v}(p-\hat{\lambda}_i)^{\nu_i}, \qquad (15)$$

Для определения числителя $B(p)$ передаточной функции системы продолжим задачу приближения выходного сигнала (9) системы его моделью (10). Найдем коэффициенты C_i и V^*_{ij}. Применяя функцию штрафа

$$E = \sum_{l=0}^{N} [y(lT) - z(lT)]^2,$$

т. е. метод наименьших квадратов, получим систему из $n + k + 1$ линейных относительно коэффициентов C_i и V^*_{il} уравнений:

$$\sum_{i=0}^{h} C_i \sum_{l=0}^{N} (\mu_i \mu_\xi^*)^l \cdot l^{u_\xi} + \sum_{i=h+1}^{v} \sum_{j=0}^{\omega_i - 1} V^*_{ij} \sum_{l=0}^{N} e^j (\hat{\mu}_i \mu_\xi^*)^l \, l^{u_\xi} -$$

$$- \sum_{l=0}^{N} z(lT) \mu_\xi^* \cdot l^{u_\xi} = 0, \quad (\xi = 0, 1, 2, \dots, v), \tag{16}$$

где

$$\mu_\xi^* = \begin{cases} \mu_\xi, \text{ если } (\xi = 0, 1, 2, \dots, h); \\ \hat{\mu}, \text{ если } (\xi = h+1, h+2, \dots, v); \end{cases}$$

$$u_\xi = \begin{cases} 0, \text{ если } (\xi = 0, 1, 2, \dots, h); \\ \alpha_\xi = \{0, 1, \dots (\omega_\xi - 1)\}, \text{ если } (\xi = h+1, h+2, \dots, v), \end{cases}$$

так что

$$\sum_{\xi=0}^{v} u_\xi = \sum_{\xi=h+1}^{v} \alpha_\xi = \sum_{\xi=h+1}^{v} \sum_{\rho=0}^{\omega_\xi - 1} \rho = h + k + 1.$$

Определив из системы (16) оценки коэффициентов C_i и V^*_{ij} и учитывая выражение (7), из системы равенств

$$\hat{B}(\lambda_i) = \frac{\hat{C}_i}{K_i} \hat{A}_1(\lambda_i) \quad (i = 0, 1, 2, \dots, h) \tag{17}$$

находим коэффициенты числителя передаточной функции.

Очевидно, что это возможно при выполнении условия

$$h \geqslant m, \tag{18}$$

т. е. количество h экспоненциальных слагаемых входного воздействия, коэффициенты λ_i которых отличны от полюсов (корней характеристического уравнения) передаточной функции системы, должно быть не меньше порядка m числителя $B(p)$ передаточной функции. Следовательно, с усложнением идентифицируемой передаточной функции (с повышением порядка ее числителя) необходимо усложнять форму входного воздействия.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Khatwani K. I., Bajwa I. S.* Identification of linear time — invariant systems using exponential signals. «IEEETrans. Automat. Contr.», 1975, 20, № 1.

УДК 624.07:534.1

Р. И. Гроссман, А. И. Коппель

ЛИНЕЙНОЕ ПРЕДСТАВЛЕНИЕ МОМЕНТА СОПРОТИВЛЕНИЯ В ОПОРАХ ТРУБОПРОВОДОВ

Для ряда механических соединений зависимость между моментом сопротивления и углом поворота при изгибе имеет следующий вид [1]:

$$\Theta_{2,3}(\alpha) = \rho\alpha M_m \pm \xi \frac{2\alpha \mp \alpha^2 \pm 1}{2} M_m^2 . \qquad (1)$$

где M_m — амплитуда момента; $-1 \leqslant \alpha \leqslant 1$; ρ — функция геометрических и жесткостных характеристик соединения; ξ — функция геометрических, жесткостных и фрикционных характеристик соединения; индексы 2 и 3 обозначают соответственно второй и третий этапы циклического нагружения.

С помощью этой зависимости при некоторых допущениях можно описать граничные условия при исследовании изгибных колебаний трубопроводов с типовыми опорами.

На рис. 1 зависимость (1) изображена в виде петли гистерезиса в координатах αM_m и Θ.

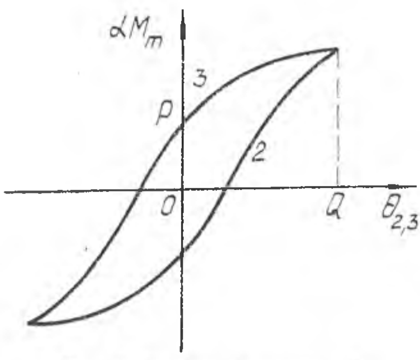

Рис. 1. График функции (*1*)

Из уравнения (1) момент можно выразить как функцию угла поворота.

Представленная в виде

$$M = k\Theta + \varkappa\dot{\Theta} \qquad (2)$$

функция $M = M_m \alpha = F_1(\dot{\Theta}, \Theta)$ имеет смысл момента сопротивления,