

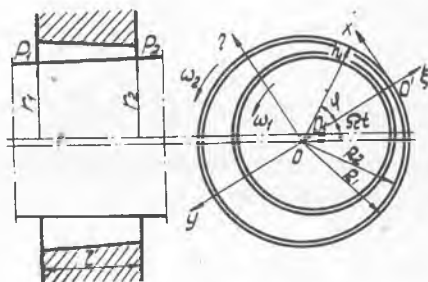
В.А.Марцинковский

ГИДРОДИНАМИЧЕСКИЕ ХАРАКТЕРИСТИКИ
ЦИЛИНДРИЧЕСКИХ ЩЕЛЕВЫХ ДЕМПФЕРОВ

Рассмотрим короткую, эксцентричную кольцевую щель (рис. 1) с переменным по длине безразмерным зазором

$$\gamma(y, \bar{z}, t) = \frac{h}{h_0} = \gamma_1(y, t) + n\bar{z}, \quad (1)$$

где $\gamma_1 = 1 - \varepsilon_1 \cos \varphi$, $\varepsilon_1 = \frac{e}{h_{10}}$, $n = \frac{h_{20}}{h_{10}} - 1$, $\bar{z} = \frac{z}{l}$, $h_{10} = R_1 - r_1$, $h_{20} = R_2 - r_2$.



Р и с. 1. Расчетная схема кольцевого канала

Втулка вращается вокруг неподвижной оси с частотой ω_2 , а вал имеет собственное вращение с частотой ω_1 и процессию с частотой Ω и периодически изменяющимся эксцентриситетом e .

Используя обычное предположение о малости зазора по сравнению с радиусом и принимая, что длина щели не превосходит радиуса, а средняя осевая скорость на порядок больше окружной, граничные условия и исходные уравнения Рейнольдса для турбулентного течения после приведения их к безразмерной форме и оценки порядка отдельных слагаемых можно свести к виду

$$\frac{\partial p}{\partial z} + q = -k \frac{\mu}{h^2} \bar{w} = -\frac{\lambda}{2h} \frac{\rho \bar{w}^2}{2}; \quad (2)$$

$$y = h: u = \omega_2 z - \dot{e} \sin \varphi, \quad v = (\omega_1 - \Omega) e \sin \varphi - \dot{e} \cos \varphi, \quad w = 0; \quad (3)$$

$$y = 0: u = \omega_2 z, \quad v = w = 0; \quad z = 0: p = p_1; \quad z = l: p = p_2,$$

$$\text{где } q = \frac{\rho}{h} \int_0^h \left(\frac{\partial w}{\partial t} + v \frac{\partial w}{\partial y} + w \frac{\partial w}{\partial z} \right) dy \quad (4)$$

представляет осредненные по толщине зазора инерционные члены, λ - коэффициент сопротивления трения, \bar{w} - средняя по толщине осевая скорость, $k = \frac{\lambda}{\delta} Re$, $Re = \frac{2h\bar{w}\rho}{\mu}$.

Перейдем к уравнению для давления, осреднив по толщине канала уравнение неразрывности

$$\frac{1}{h} \int_0^h \left(\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z} \right) dy = -u(h) \frac{\partial h}{\partial x} + v(h) + \frac{\partial}{\partial z} \int_0^h w dy = 0.$$

Из зависимости (2)

$$\bar{w} = \frac{1}{h} \int_0^h w dy = -\frac{h^2}{k\mu} \left(\frac{\partial p}{\partial z} + g \right),$$

поэтому с учетом граничных условий и уравнения неразрывности имеем

$$\frac{\partial}{\partial z} (\bar{r} \bar{w}) = -\frac{\ell U}{h_{10}} \quad \text{или} \quad \frac{\partial}{\partial z} \left[\frac{\partial^3}{\partial \bar{z}^3} \left(\frac{\partial p}{\partial \bar{z}} + \ell g \right) \right] = \frac{\mu \ell^2}{h_{10}^3} U; \quad (6)$$

$$U = \bar{\omega} h_{10} \left(\theta \varepsilon, \sin \varphi - \frac{c_1}{\omega} \cos \varphi \right), \quad \bar{\omega} = \frac{\omega_1 + \omega_2}{2}, \quad \theta = 1 - \frac{g}{\omega}. \quad (7)$$

Дважды проинтегрировав (6) по \bar{z} , можно найти давление, а затем радиальные силы

$$\left. \begin{matrix} F_g \\ F_p \end{matrix} \right\} = -z\ell \int_0^{2\pi} \left[\Delta p \frac{j_{21}}{j_{11}} - \mu \frac{\ell^2}{h_{10}^3} U \left(j_{31} - \frac{j_{21}^2}{j_{11}} \right) - \ell \int_0^{\bar{z}} G d\bar{z} + \frac{G_1}{j_{11}} \int_0^{\bar{z}} j_1 d\bar{z} \right] \left\{ \frac{\cos \varphi}{\sin \varphi} \right\} d\varphi, \quad (8)$$

где $j_1 = \int_0^{\bar{z}} \frac{k}{j^3} d\bar{z}$, $j_2 = \int_0^{\bar{z}} \frac{k\bar{z}}{j^3} d\bar{z}$, $j_3 = \int_0^{\bar{z}} \frac{k\bar{z}^2}{j^3} d\bar{z}$, $j_{21} = j_1(\bar{z}=1)$, $G = \int_0^{\bar{z}} g d\bar{z}$, $\Delta p = p_1 - p_2$.

Члены в квадратной скобке подынтегрального выражения имеют ясный физический смысл: первое слагаемое - статическая составляющая давления, второе - динамическая часть, обусловленная вязкостью и движением ограничивающих стенок, последнее связано с учетом инерционных членов. Соответствующие силы будем обозначать F_{cm} , F_μ , F_p . Вычисление гидростатических сил в кольцевых зазорах выполнено в работе (I), поэтому далее рассмотрим лишь динамические составляющие F_μ и F_p .

Для вычисления инерционных членов воспользуемся тем, что в турбулентном спиральном течении профили и осевой, и окружной скорости достаточно точно описываются законом степени одна седьмая [2]:

$$u = u(0) + \bar{u} \left(2 \frac{y}{h}\right)^{1/7} \quad (0 \leq y \leq \frac{h}{2}); \quad u = u(h) - \bar{u} \left[2 \left(1 - \frac{y}{h}\right)\right]^{1/7} \quad (\frac{h}{2} \leq y \leq h);$$

$$w = w_m \left[4 \frac{y}{h} \left(1 - \frac{y}{h}\right)\right]^{1/7}; \quad \bar{u} = \frac{u(h) - u(0)}{2}; \quad w_m = w \left(\frac{h}{2}\right)$$

С учетом уравнения неразрывности и граничных условий выражение (4) можно привести к виду

$$g = \frac{\rho}{h} \int_0^h \left(\frac{\partial w}{\partial t} + w \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial (w^2)}{\partial z} \right) dy,$$

а после подстановки (9) и вычисления интегралов

$$g = \frac{\rho}{\gamma} \left[\frac{\partial}{\partial t} (\bar{w} \gamma) - \omega_* \bar{w} \gamma_* + \frac{\partial}{\partial z} (\bar{w}^2 \gamma) \right], \quad (10)$$

причем $\bar{w} = 0,94 w_m$, $\omega_* = 0,29 \frac{\omega_1 - \omega_2}{2}$, $\gamma_* = \frac{\partial \gamma}{\partial y}$.

Выразим скорость \bar{w} через среднюю по толщине скорость на входе в канал. Для этого проинтегрируем (6) по \bar{z} :

$$\bar{w} = w_1 \frac{\delta_1}{\gamma} - U \frac{\ell}{h_{10}} \frac{\bar{z}}{\delta}. \quad (11)$$

Уравнение для определения скорости w_1 получим, сравнивая значения $\frac{\partial p}{\partial z} + g$ из соотношений (2) и (6), предварительно вычислив

$$G = \rho \left[w_1 \delta_1 i_1 - \omega_* w_1 \gamma_* i_2 - \left(n \frac{w_1^2}{\ell} + 2 \frac{U w_1}{h_{10}} \right) \delta_1^2 i_3 - \frac{\ell}{h_{10}} \dot{U} i_4 \right], \quad (12)$$

где $i_1 = \int_0^{\bar{z}} \frac{d\bar{z}}{\gamma} \approx \frac{\bar{z}}{\delta_1} \left(1 - \frac{n\bar{z}}{2\delta_1}\right)$, $i_2 = \int_0^{\bar{z}} \frac{d\bar{z}}{\gamma^2} \approx \frac{\bar{z}}{\delta_1^2} \left(1 - \frac{n\bar{z}}{\delta_1}\right)$,

$$i_3 = \int_0^{\bar{z}} \frac{d\bar{z}}{\delta^3} \approx \frac{\bar{z}}{\delta_1^3} \left(1 - \frac{3n\bar{z}}{2\delta_1}\right), \quad i_4 = \int_0^{\bar{z}} \frac{\bar{z} d\bar{z}}{\gamma} \approx \frac{\bar{z}^2}{2\delta_1} \left(1 - \frac{2n\bar{z}}{3\delta_1}\right).$$

В результате получим квадратное уравнение

$$a w_1^2 + b w_1 + c = 0,$$

где $a = -n \frac{\rho h_{10}^2}{\mu \ell} \delta_1 \frac{i_3}{\delta_1}$, $b = 1 + \frac{\rho h_{10}^2}{\mu \delta_1} \left(\frac{\delta_1}{\delta_1} i_{11} - \omega_* \gamma_* i_{21} - \frac{2U}{h_{10}} \gamma i_{31} \right)$,

$$C = \frac{\rho \ell h_{10}}{\mu \gamma_1} \frac{i_{41}}{\gamma_{11}} - \frac{\ell U}{h_{10} \gamma_1} \frac{j_{21}}{j_{11}} - \frac{\Delta p h_{10}^2}{\mu \ell \gamma_{11}}, \quad i_{x1} = i_K (\bar{z} = 1).$$

Ограничиваясь рассмотрением малых конусностей ($|\alpha| \ll 1$), запишем приближенное решение:

$$\omega_1 = -\frac{c}{\delta} \left(1 + \frac{ac}{\delta^2} \right). \quad (13)$$

Коэффициенты k или λ можно найти, сравнивая выражения скорости (13) и (11) с учетом (5). Однако такой путь связан с громоздкими выкладками, поэтому воспользуемся приближенной формулой Ямада [3] для кольцевых зазоров с внутренним вращающимся цилиндром:

$$\lambda = \frac{\delta k}{Re} = \frac{0,307}{Re^{0,224}} \left[1 + \left(\frac{7}{\delta} \right)^2 \left(\frac{\bar{u}}{\omega_0} \right)^2 \right]^{0,38}.$$

Пользуясь известной формулой $\bar{\omega} = \left(\frac{2\Delta p}{\rho \gamma} \right)^{1/2}$, получим $\frac{\bar{\omega}}{\omega_0} = \left(\frac{\lambda_0}{\lambda} \gamma_1 \right)^{1/2}$. При этом

$$k = k_1 \delta_1^{3/2}, \quad k_1 \approx 3,84 \cdot 10^{-2} Re_0^{0,76} \left[1 + \left(\frac{7}{\delta} \right)^2 \left(\frac{\bar{u}}{\omega_0} \right)^2 \right]^{0,19}. \quad (14)$$

Прежде, чем находить силы, вычислим интегралы

$$j_1 \approx \frac{k_1 \bar{z}}{\gamma_1^{3/2}} \left(1 - \frac{3n\bar{z}}{2\gamma_1} \right), \quad j_2 \approx \frac{k_1 \bar{z}^2}{2\gamma_1^{3/2}} \left(1 - \frac{2n\bar{z}}{\gamma_1} \right), \quad j_3 \approx \frac{k_1 \bar{z}^3}{3\gamma_1^{3/2}} \left(1 - \frac{9n\bar{z}}{4\gamma_1} \right).$$

Из выражения (8) находим проекции силы F_{μ} :

$$F_{\mu y} = -c_1 \varepsilon_1, \quad F_{\mu z} = c_1 (\bar{\omega} - \Omega) \varepsilon_1, \quad (15)$$

где

$$c_1 = k_1 \frac{\pi \mu \ell^3 \gamma_2}{12 h_{10}^2} (1 - 2,5n). \quad (16)$$

Выражение для сил, обусловленных инерционными членами, можно привести к виду

$$\left\{ \begin{matrix} F_{py} \\ F_{pz} \end{matrix} \right\} = \rho z \ell^2 \int_0^{2\pi} (-\omega_1 \gamma_1 J_1 + \omega_2 \omega_1 \gamma_1 \gamma_2 J_2 + \frac{\ell}{h_{10}} \dot{U} J_4) \begin{Bmatrix} \cos \varphi \\ \sin \varphi \end{Bmatrix} d\varphi, \quad (17)$$

где
$$J_k = \frac{i_{k1}}{d_{11}} \int_0^1 j_1 d\bar{z} - \int_0^1 i_k d\bar{z} \quad (k=1,2,4),$$

$$J_1 \approx \frac{n}{6\delta_1^2}, \quad J_2 \approx \frac{n}{12\delta_1^3}, \quad J_4 \approx \frac{1}{12\delta_1} \left(1 - \frac{n}{2\gamma_1}\right).$$

Чтобы упростить вычисление сил (17), в качестве входной скорости примем в первом приближении ее значение, полученное для канала с неподвижными стенками:

$$w_1 = w_0 \delta_1^{1/2}; \quad w_0 = \left(\frac{4\Delta p h_{10}}{\rho \lambda_0 \ell}\right)^{1/2}.$$

Дальнейшие уточнения можно выполнить, пользуясь либо формулой (13), либо методом последовательных приближений. Однако найденные таким образом поправки будут сравнимы с членами, отброшенными при упрощении исходной системы уравнений, поэтому необходимо уточнять прежде всего сами исходные уравнения.

Интегрирование зависимости (17) с точностью до членов порядка ε^2 дает

$$F_{p\gamma} = M \left[2n w_0 \dot{\varepsilon}_1 - \ell (1-0,5n) (\dot{\varepsilon}_1 + \bar{\omega} \mathcal{R} \varepsilon_1) \right]; \quad (18)$$

$$F_{p\beta} = M \left[2n w_0 \Omega \varepsilon_1 \left(1 + 0,145 \frac{\bar{\omega} \varepsilon_1}{\Omega}\right) + \ell (1-0,5n) \left(1 - 2 \frac{\bar{\omega}}{\Omega}\right) \bar{\omega} \varepsilon_1 \right]; \quad M = \frac{\pi}{12} \rho z \ell^2.$$

Чтобы оценить вклад инерционных членов, сравним силу $F_{\mu\gamma}$ и первое слагаемое силы $F_{p\gamma}$, пропорциональное $\dot{\varepsilon}_1$:

$$\frac{F_{p\gamma}}{F_{\mu\gamma}} = \frac{n}{1-2,5n} \frac{10^2}{3,84} \frac{h_{10}}{\ell} Re_0^{0,24}.$$

Для типовых конструкций щелевых уплотнений, выполняющих роль демпферных опор, $n/\ell = 0,1$; $\frac{h_{10}}{\ell} = 10^{-2}$; $Re_0 = 10^4$, отношение указанных сил равно примерно 0,32, т.е. в реальных условиях инерционные и вязкие силы могут быть одного порядка.

Принятое в самом начале предположение о преобладающем значении осевой скорости позволяет рассмотреть интересный предельный случай невращающегося вала: $\bar{\omega} = \mathcal{R} = 0$;

$$F_{p\gamma} = M \left[2n w_0 \dot{\varepsilon}_1 - \ell (1-0,5n) \dot{\varepsilon}_1 \right]; \quad F_{p\beta} = 0. \quad (19)$$

В диффузорных зазорах $n > 0$ и первое слагаемое радиальной силы (19) при больших перепадах давления может превышать силу вязкого сопротивления $F_{\mu r}$. При этом возникают автоколебания внутреннего цилиндра, что подтверждается экспериментом [1].

Обнаруженное явление самовозбуждения внутреннего цилиндра имеет важное практическое значение и показывает, что в конструкциях, где цилиндрические щели используются как демпферы, нужно предотвращать возможность образования диффузорности.

Л и т е р а т у р а

1. Марцинковский В.А. Гидродинамика и прочность центробежных насосов. М., "Машиностроение", 1970.
2. Hsu J.C., Burton R.A. A study of the interactions of turbulent shear flow and displacement flow between parallel walls. "ASLE Trans.", 1968, 11, №3, 191-195.
3. Y. Yamada. Resistance of a flow through an annulus with an inner rotating cylinder. "Bulletin of JSME", 1962, 5, №18, 302-310.

В.А.Марцинковский

ПРОТЕЧКИ ЧЕРЕЗ КОЛЬЦЕВОЙ ЗАБОР С ПОДВИЖНЫМИ СТЕНКАМИ

Вычислим расход вязкой несжимаемой жидкости через короткий кольцевой канал при турбулентном течении (рисунок и основные обозначения те же, что и в работе [1]). Внутренний и внешний цилиндры вращаются с частотами ω_1 и ω_2 ; вектор эксцентриситета вращается с частотой Ω , а его амплитуда изменяется по гармоническому закону с частотой Ω .

В работе [1] на основании приближенного вычисления инерционных членов в уравнениях Рейнольдса для турбулентного течения получена