

Второй случай нагружения соединения (рис. 1, б) возможен, например, когда к корпусу изделия при помощи фланцевого соединения подвешен массивный агрегат. В этом случае упругая связь массы агрегата с корпусом образована элементами соединения. Задача с такими условиями была решена относительно амплитуды упругой деформации микронеровностей в уплотнительных стыках [3]. Из анализа решения было установлено, что лучше придавать диссипативные свойства деталям системы болта или дополнительным упорам. Постановка демпфирующей прокладки может привести к улучшению работоспособности соединения при небольшой жесткости болтов.

Л и т е р а т у р а

1. Э с к и н И.Д. Поперечный изгиб многослойного пакета с сухим трением на контактных поверхностях циклической силой. Труды КуАИ, 1967, вып. XXX.
2. Б и р г е р И.А. и др. Расчет на прочность деталей машин. М., Машгиз, 1959.
3. Б о р и с о в В.А., В о й т е х Н.Д. Исследование герметичности фланцевых соединений трубопроводов при вибрациях. Тезисы докладов IV Всесоюзной конференции "Конструирование, технология изготовления и эксплуатация компрессорных машин различного назначения", Су-мы, 1974.

Г.Г.Карташов, Б.Н.Ковешников, Н.Д.Степаненко

АНАЛИТИЧЕСКОЕ ОПРЕДЕЛЕНИЕ СОБСТВЕННЫХ ЧАСТОТ И ФОРМ КОЛЕБАНИЙ КОНСОЛЬНЫХ АНИЗОТРОПНЫХ ПЛАСТИН

Первым этапом оценки вибрационных свойств тонкостенных конструкций является определение собственных частот и форм колебаний, которые необходимо знать при отстройке от опасных резонансных режимов работы, а также при проведении вибрационных испытаний, например, усталостных.

Лопатки компрессоров являются ответственными тонкостенными элементами газотурбинных двигателей. В настоящее время предприняты попытки использовать лопатки, изготавливаемые из композиционных материалов. В связи с этим возникает необходимость создания методов расчета по определению частот и форм их собственных колебаний [1]. Простейшей

моделью такой лопатки является консольная прямоугольная пластина постоянной толщины.

Исследование собственных колебаний консольных анизотропных пластин позволяет оценить возможность применения теории пластин к расчету лопаток, выяснить пределы применимости приближенного решения, а также изучить особенности собственных частот и форм, обусловленные анизотропией упругих свойств материала.

В качестве исходных приняты следующие гипотезы: материал пластины является ортотропным и линейно-упругим; справедлива гипотеза Кирхгоффа.

Согласно принципу Остроградского-Гамильтона вариация функционала действия для реализуемого колебательного процесса

$$\delta \int_{t_1}^{t_2} (\Gamma - \Pi) dt = 0, \quad (1)$$

где Γ и Π - кинетическая и потенциальная энергия колеблющейся пластины; t - время.

Для ортотропной пластины, главные оси упругой симметрии которой совпадают с осями координат x , y (рис. 1), потенциальная энергия определяется по формуле [2]

$$\Pi = \frac{1}{2} \int_{-a}^a \int_0^e \left[D_x \left(\frac{\partial^2 W}{\partial x^2} \right)^2 + 2D_x \mu_{yx} \frac{\partial^2 W}{\partial x^2} \frac{\partial^2 W}{\partial y^2} + D_y \left(\frac{\partial^2 W}{\partial y^2} \right)^2 + 4D_{\kappa} \left(\frac{\partial^2 W}{\partial x \partial y} \right)^2 \right] dx dy, \quad (2)$$

где $D_x = \frac{E_x h^3}{12(1 - \mu_{xy} \mu_{yx})}$ - жесткость изгиба по направлению оси x ;

$D_y = \frac{E_y h^3}{12(1 - \mu_{xy} \mu_{yx})}$ - жесткость изгиба по направлению оси y ;

$D_{\kappa} = \frac{G_{xy} h^3}{12}$ - жесткость кручения;

E_x, E_y - модули Юнга;

μ_{xy}, μ_{yx} - коэффициенты Пуассона;

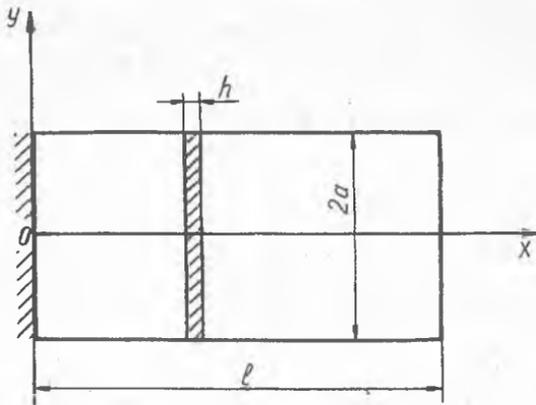
G_{xy} - модуль сдвига в плоскости xy ;

$W(x, y, t)$ - перемещение точек пластины в направлении оси z .

Выражение для кинетической энергии

$$\Gamma = \frac{\rho h}{2} \int_{-a}^a \int_0^e \left(\frac{\partial W}{\partial t} \right)^2 dx dy, \quad (3)$$

где ρ - плотность материала пластины.



Р и с. I

Полагая, что существуют только периодические колебания собственной частоты ρ , представим $W(x, y, t)$ в виде

$$W(x, y, t) = W(x, y) \sin \rho t. \quad (4)$$

Подставляя зависимости (2) и (3) в (1) и учитывая выражение (4), получим

$$\delta \int_0^l \int_0^{2a} \int_0^t \left\{ \sin^2 \rho t \left[D_x \left(\frac{\partial^2 W}{\partial x^2} \right)^2 + 2D_x \mu_{yx} \frac{\partial^2 W}{\partial x^2} \frac{\partial^2 W}{\partial y^2} + D_y \left(\frac{\partial^2 W}{\partial y^2} \right)^2 + 4D_{\kappa} \left(\frac{\partial^2 W}{\partial x \partial y} \right)^2 \right] - \rho h \rho^2 W^2 \cos \rho t \right\} dx dy dt = 0. \quad (5)$$

Для получения решения задачи воспользуемся методом Ритца. В качестве функций, аппроксимирующих формы колебаний пластин, примем балочные функции, широко используемые для этих целей [3]:

$$W(x, y) = \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{m=1}^{\infty} A_{mn} X_m(x) Y_n(y), \quad (6)$$

где $X_m(x)$ и $Y_n(y)$ - формы колебаний консольной и свободной балок;

A_{mn} - произвольные параметры.

Подставляя формулу (6) в (5), интегрируя по t , сокращая на постоянный множитель, зависящий от пределов интегрирования и сводя варьирование суммы к дифференцированию по неизвестным параметрам A_{mn} , получаем систему $m \times n$ линейных однородных уравнений, состоящих из $m \times n$ членов, относительно неизвестных A_{pq} :

$$\sum_{p=1}^m \sum_{q=0}^n A_{pq} \left(\frac{\partial \Pi}{\partial A_{mn}} - \rho^2 \frac{\partial T}{\partial A_{mn}} \right) = 0 \quad (7)$$

Система уравнений (7) имеет нетривиальное решение в том случае, если детерминант системы

$$\det \left[\sum_{p=1}^m \sum_{q=1}^n A_{pq} \left(\frac{\partial \Pi}{\partial A_{mn}} - \rho^2 \frac{\partial T}{\partial A_{mn}} \right) \right] = 0 \quad (8)$$

Уравнение (8) есть частное уравнение в форме Ритца.

Систему уравнений (7) можно представить в виде

$$\begin{aligned} & \int_a^{\ell} \int_a^{\ell} (X_m'' Y_n \sum_{p=1}^m \sum_{q=0}^n A_{pq} X_p'' Y_q + \mu_{yx} X_m'' Y_n \sum_{p=1}^m \sum_{q=0}^n A_{pq} X_p Y_q'' + \\ & + \mu_{yx} X_m Y_n'' \sum_{p=1}^m \sum_{q=0}^n A_{pq} X_p'' Y_q + \frac{\mu_{yx}}{\mu_{xy}} X_m Y_n'' \sum_{p=1}^m \sum_{q=0}^n A_{pq} X_p Y_q'' + \\ & + 4 \frac{D_x}{D_x} X_m' Y_n' \sum_{p=1}^m \sum_{q=0}^n A_{pq} X_p' Y_q' - \lambda_{mn}^4 X_m Y_n \sum_{p=1}^m \sum_{q=0}^n A_{pq} X_p Y_q) dx dy = 0, \quad (9) \end{aligned}$$

где $\lambda_{mn}^4 = \frac{\beta_{mn} \rho h}{D_x}$

Обозначая коэффициент при A_{pq} в уравнении (9), полученный в результате дифференцирования по A_{mn} , через a_{pq}^{mn} , находим

$$\begin{aligned} a_{pq}^{mn} = & \int_0^{\ell} X_m'' X_p'' dx \int_{-a}^a Y_n Y_q dy + \mu_{yx} \int_0^{\ell} X_m'' X_p dx \int_{-a}^a Y_n Y_q'' dy + \\ & + \mu_{yx} \int_0^{\ell} X_m X_p'' dx \int_{-a}^a Y_n'' Y_q dy + \frac{\mu_{yx}}{\mu_{xy}} \int_0^{\ell} X_m X_p dx \int_{-a}^a Y_n'' Y_q'' dy + \\ & + 4 \frac{D_x}{D_x} \int_0^{\ell} X_m' X_p' dx \int_{-a}^a Y_n' Y_q' dy - \lambda_{mn}^4 \int_0^{\ell} X_m X_p dx \int_{-a}^a Y_n Y_q dy. \quad (10) \end{aligned}$$

При вычислении коэффициентов a_{pq}^{mn} учитываем, что функции X_m и Y_n нормированы и взаимно ортогональны.

Обозначим

$$\left. \begin{aligned} \omega_{mn} &= \int_0^{\ell} X_m' X_n dx; & \alpha_{mn} &= \int_0^{\ell} X_m' X_n' dx; \\ \hat{\omega}_{mn} &= \int_{-a}^a Y_m'' Y_n dy; & \hat{\alpha}_{mn} &= \int_{-a}^a Y_m' Y_n' dy. \end{aligned} \right\} \quad (II)$$

После двукратного интегрирования по частям и преобразования имеем

$$\omega_{mn} = \frac{K_m^4}{\ell^4} (X_m' X_n - X_m X_n')_{\ell} - (X_m''' X_n'' - X_m'' X_n''')_0; \quad (I2)$$

$$\omega_{mm} = -\frac{K_m^2}{\ell^2} \frac{Sh K_m - \sin K_m}{Sh K_m + \sin K_m} + \frac{2K_m}{\ell^2} \frac{ch K_m + \cos K_m}{Sh K_m + \sin K_m}; \quad (I3)$$

$$\alpha_{mn} = X_m'(\ell) X_n(\ell) - \omega_{mn}; \quad (I4)$$

$$\alpha_{mm} = -\frac{K_m^2}{\ell^2} \frac{Sh K_m - \sin K_m}{Sh K_m + \sin K_m} + \frac{2K_m}{\ell^2} \frac{ch K_m + \cos K_m}{Sh K_m + \sin K_m}; \quad (I5)$$

$$\hat{\omega}_{mn} = \frac{2K_m^4}{K_m^4 - K_n^4} (Y_m' Y_n - Y_m Y_n')_{y=a}; \quad (I6)$$

$$\hat{\omega}_{mm} = -\frac{K_m^2}{a^2} \frac{(ch^2 K_m - \cos^2 K_m)}{(ch^2 K_m + \cos^2 K_m)} + \frac{2K_m}{a^2} \frac{th K_m ch^2 K_m \cos^2 K_m}{ch^2 K_m + \cos^2 K_m}; \quad (I7)$$

$$\hat{\alpha}_{mn} = \frac{2(K_m^4 Y_n' Y_m - K_n^4 Y_n Y_m')_{y=a}}{K_m^4 - K_n^4}; \quad (I8)$$

$$\hat{\alpha}_{mm} = \frac{K_m^2}{2a^2} \left(\frac{1}{\sin^2 K_m} + \frac{1}{Sh^2 K_m} \right) + \frac{3K_m}{a^2} cth K_m; \quad (I9)$$

$$\hat{\alpha}_{mm} = \frac{K_m^2}{2a^2} \left(\frac{1}{\cos^2 K_m} - \frac{1}{ch^2 K_m} \right) + \frac{3K_m}{a^2} th K_m; \quad (20)$$

K_m и K_m^A - корни частотного уравнения для консольной и свободной балок соответственно.

Введем обозначения

$$c = \frac{a}{\ell}; \quad \omega_{mp} = \frac{\bar{\omega}_{mp}}{c^2}; \quad \hat{\omega}_{qn} = \frac{\bar{\omega}_{qn}}{a^2}; \quad \alpha_{mp} = \frac{\bar{\alpha}_{mp}}{c^2}; \quad \hat{\alpha}_{nq} = \frac{\bar{\alpha}_{nq}}{a^2}. \quad (21)$$

Выражение (10) после сокращения на $c^2/a^4 \neq 0$ и с учетом зависимостей (12-21) можно представить в виде

$$\bar{a}_{pq}^{mn} = \mu_{yx} (\bar{\omega}_{mp} \bar{\omega}_{qn} + \bar{\omega}_{pm} \bar{\omega}_{nq}) + 4 \frac{D_k}{D_x} \bar{\alpha}_{mp} \bar{\alpha}_{nq}; \quad (22)$$

$$\bar{a}_{mn}^{mn} = K_m^4 c^2 + 2\mu_{yx} \bar{\omega}_{mm} \bar{\omega}_{nn} + \frac{\mu_{yx}}{\mu_{xy}} \frac{k_n^4}{c^2} + 4 \frac{D_k}{D_x} \bar{\alpha}_{mm} \bar{\alpha}_{nn} - \frac{a^4}{c^2} \lambda_{mn}^4. \quad (23)$$

Необходимо отметить, что коэффициенты \bar{a}_{pq}^{mn} и \bar{a}_{mn}^{mn} зависят от упругих свойств материала E_x ; μ_{xy} ; μ_{yx} и ν_{xy} , а коэффициент \bar{a}_{mn}^{mn} зависит также и от относительных размеров пластины c ; причем c входит в слагаемые, зависящие от корней частотных уравнений консольной и свободной балок. Можно показать, что для всех коэффициентов действительно условие

$$\bar{a}_{pq}^{mn} = \bar{a}_{mn}^{pq}.$$

Отметим также, что коэффициенты при диагональных членах в уравнении (7), т.е. коэффициенты зависимости (23), значительно больше побочных членов в формуле (22), а ряд коэффициентов \bar{a}_{pq}^{mn} равен нулю.

Собственные частоты колебаний пластины определяются по соотношению

$$f_{mn} = \frac{\nu_{mn} c}{2\pi a^2} \sqrt{\frac{D_x}{\rho h}}, \quad (24)$$

где $\nu_{mn}^4 = \frac{a^4}{c^2} \lambda_{mn}^4$ - собственные значения матрицы (7).

Каждому значению f_{mn} соответствует определенное значение параметра A_{mn} , удовлетворяющее уравнению (7).

Форма колебаний описывается соотношением

$$W(x, y) = \sum_{m=1} \sum_{n=0} A_{mn} X_m(x) Y_n(y).$$

Решение системы уравнений (7), описывающей колебания пластины, реализуется на ЭЦВМ по стандартной программе.

Л и т е р а т у р а

1. Кузнецов Н.Д., Веселов С.И., Степаненко Н.Д. Применение композиционных материалов в конструкции ГТД. - "Проблемы прочности", Киев, 1974. № 2.

2. Л е х н и ц к и й С.Г. Анизотропные пластинки. М.-Л., Гостехиздат, 1947.
3. М е е р о в и ч И.И. Колебания прямоугольной плоской пластинки.- В сб.: Динамика авиадвигателей. М., Оборонгиз, 1952, № 8.

Г.Г.Карташов, Н.Д.Степаненко

ОСНОВНЫЕ УРАВНЕНИЯ
НАПРЯЖЕННО-ДЕФОРМИРОВАННОГО СОСТОЯНИЯ ОБОЛОЧЕК,
ИЗГОТОВЛЯЕМЫХ ИЗ КОМПОЗИЦИОННЫХ МАТЕРИАЛОВ

В связи с тем, что применение композиционных материалов для изготовления тонкостенных элементов конструкции ГТД типа оболочек является перспективным, возникает необходимость в разработке методов расчета их на прочность и колебания с учетом специфики строения и свойств композиционных материалов [1].

Первым шагом на пути решения этой задачи является получение уравнений напряженно-деформированного состояния, что и явилось темой данной работы.

Обоснованию теории упругих анизотропных оболочек посвящено большое число работ [4] - [6]. В работе [6] изложена уточненная линейная теория упругих анизотропных многослойных оболочек. Эффект поперечного сдвига и нормальных поперечных деформаций учитывается для каждого слоя. В настоящей работе в качестве исходных для анализа приняты следующие гипотезы. Рассматривается неоднородная анизотропная оболочка переменной толщины. Материал каждого слоя является криволинейно-ортотропным с известным направлением осей упругой симметрии и линейно-упругим. В целом для оболочки учитываются деформации поперечного сдвига и обжатие нормального элемента.

Оболочка рассматривается в системе координат α_1, α_2, z , совпадающей с направлением главных кривизн срединной поверхности оболочки (рисунок); α, β, γ - оси упругой симметрии материала i -го слоя; φ_i, h_i - угол армирования и толщина i -го слоя соответственно; $2h(\alpha_1, \alpha_2)$ - толщина оболочки.

Пусть перемещение произвольной точки поверхности

$$\vec{U} = U_1 \vec{e}_1 + U_2 \vec{e}_2 + W \vec{e}_n, \quad (I)$$