Библиографический список

1. Алексеева, Е.В. Локальный метод аэродинамического расчёта в разреженном газе / Е.В. Алексеева, Р.Г. Баранцев. – Ленинград: Изд-во ЛГУ, 1976, – 210 с.

2. Bird, G.A. Molecular Gas Dynamics and the Direct Simulation of Gas Flows / G.A. Bird. – Oxford: University Press, 1994. – 479 p.

3. Maxwell, J.C. On Stresses in Rarified Gases Arising from Inequalities of Temperature / J.C. Maxwell // The Royal Society. – 1878. – Vol. 27. – P. 304–308.

4. Nocilla, S. The Surface Re-emission Law in Free Molecular Flow / S. Nocilla // Proceedings of 3rd International Symposium on Rarefied Gas Dynamics.

5. Lord, R.G. Some further extensions of the Cercignani-Lampis Lord gas-surface scattering kernel / R.G. Lord // Physics of Fluids. – 1995. – Vol. 7. – P. 1159–1161.

УДК 531.533

Кусюмов А.Н., Кусюмов С.А.

О НЕКОТОРЫХ ЗАМЕЧАНИЯХ К РАСЧЕТУ СОПЛА ЛАВАЛЯ

Необходимым условием для создания сверхзвукового потока на выходе из сопла Лаваля является обеспечение в критическом сечении равенства местных скорости течения $V_{кр}$ и скорости звука $a_{кр}$. Данное условие можно записать в виде [1]:

$$V_{кр} = a_{кр} = a_0\sqrt{\frac{2}{k+1}}, \qquad (1)$$

где k – показатель адиабаты газа. В выражение (1) входит также скорость звука заторможенного течения a_0, которая определяется выражением

$$a_0^2 = kRT_0, \qquad (2)$$

где T_0 – температура торможения газа, R – удельная газовая постоянная. Температура торможения связана с локальным значением температуры потока T выражением

$$T_0 = T\left(1 + \frac{k-1}{2}M^2\right). \qquad (3)$$

Число Маха M в (3) определяется как

$$M = \frac{V}{a}. \tag{4}$$

Здесь a – местное значение скорости звука, которое зависит от местной скорости течения V:

$$a^2 = a_0^2 - \frac{k-1}{2}V^2. \tag{5}$$

Для определения зависимости локального числа Маха $M(x)$ воспользуемся уравнением Гюгонио [1]. Уравнение Гюгонио связывает изменение площади поперечного сечения $F(x)$ сопла с местной скоростью течения сжимаемого газа:

$$\frac{dF}{F} = \frac{dV}{V}(M^2 - 1). \tag{6}$$

Преобразуем (6), исключив число Маха. Для этого перепишем (4) в виде

$$M^2 - \frac{V^2}{a^2} - \frac{V^2}{kRT}. \tag{7}$$

Подставляя в (7) температуру потока из формулы (3), получим после преобразований

$$M^2 = \frac{V^2\left(1 + \frac{k-1}{2}M^2\right)}{kRT_0},$$

или, с учетом (2),

$$M^2 = \frac{V^2}{a_0^2}\left(1 + \frac{k-1}{2}M^2\right). \tag{8}$$

Из выражения (8) следует

$$M^2 = \frac{V^2}{a_0^2}\frac{1}{\left(1-\frac{k-1}{2}\frac{V^2}{a_0^2}\right)}. \tag{9}$$

Подстановка (9) в уравнение Гюгонио (6) дает:

$$\frac{dF}{F} = \frac{dV}{V}\left(\frac{V^2}{a_0^2}\frac{1}{\left(1-\frac{k-1}{2}\frac{V^2}{a_0^2}\right)} - 1\right),$$

или

$$\frac{dV}{dF} = \frac{V}{F}\frac{\left(1-\frac{k-1}{2}\frac{V^2}{a_0^2}\right)}{\left(\frac{V^2}{2a_0^2}(k+1)-1\right)}. \tag{10}$$

С учетом (1), уравнение (10) может быть переписано в другой форме:

$$\frac{dV}{dF} = \frac{V}{F}\frac{\left(1-\frac{(k-1)V^2}{(k+1)a_{\text{кр}}^2}\right)}{\left(\frac{V^2}{a_{\text{кр}}^2}-1\right)}. \qquad (11)$$

Уравнение (11) устанавливает связь между изменением скорости потока и изменением площади поперечного сечения сопла и может рассматриваться как обыкновенное дифференциальное уравнение для определения зависимости $V(F)$.

Уравнения (10) и (11) имеют сингулярность в критическом сечении (при $F = F_{\text{кр}}$): в этом сечении $V = a_{\text{кр}}$ и знаменатель в правой части обращается в ноль. С другой стороны, известно [1], что в критическом сечении площадь $F(x)$ имеет экстремум, т.е.:

$$\frac{dF}{dx}\Big|_{x=x_{\text{кр}}} = 0. \qquad (12)$$

Для анализа сингулярности при заданном распределении $F(x)$, запишем (11) в виде

$$\frac{dV}{dx}\frac{dx}{dF} = \frac{V}{F}\frac{\left(1-\frac{(k-1)V^2}{(k+1)a_{\text{кр}}^2}\right)}{\left(\frac{V^2}{a_{\text{кр}}^2}-1\right)}, \text{ или } \frac{dV}{dx} = \frac{V}{F}\frac{\left(1-\frac{(k-1)V^2}{(k+1)a_{\text{кр}}^2}\right)}{\left(\frac{V^2}{a_{\text{кр}}^2}-1\right)}\left(\frac{dx}{dF}\right)^{-1}. \qquad (13)$$

Если в правой части (13) выражение $\left(\frac{dx}{dF}\right)^{-1}$ представить как функцию продольной координаты x, то (13) можно рассматривать как обыкновенное дифференциальное уравнение для функции $V(x)$. Рассмотрим небольшую окрестность $x = [x_{\text{кр}}, L]$ справа от критического сечения, полагая $F(x = L) = F_L$. Не снижая общности рассмотрения, можно принять $x_{\text{кр}} = 0$. Тогда, с учетом (12), функцию $F(x)$ зададим в виде квадратичного полинома («параболическое критическое сечение»):

$$F = F_{\text{кр}} + \left(F_L - F_{\text{кр}}\right)\frac{x^2}{L^2}. \qquad (14)$$

Из (14) следует

$$x = \frac{L}{\sqrt{(F_L - F_{\text{кр}})}}\sqrt{\left(F - F_{\text{кр}}\right)},$$

откуда

$$\frac{dx}{dF} = \frac{L}{2\sqrt{(F_L - F_{\text{кр}})}}\frac{1}{\sqrt{(F - F_{\text{кр}})}} = \frac{L^2}{2x(F_L - F_{\text{кр}})}. \qquad (15)$$

Выражение (13), удобно представить в виде системы уравнений

$$\frac{dV}{dx} = \frac{V}{F}\frac{\left(1 - \frac{(k-1)V^2}{(k+1)a_{\text{кр}}^2}\right)}{\left(\frac{V^2}{a_{\text{кр}}^2} - 1\right)}\frac{2(F_L - F_{\text{кр}})x}{L^2}, \tag{16}$$

$$\frac{dF}{dx} = \frac{2(F_L - F_{\text{кр}})x}{L^2}. \tag{17}$$

Система уравнений (16), (17) позволяет проанализировать изменение скорости течения в правой окрестности критического сечения сопла при параболическом законе (14) изменения площади поперечного сечения. Для проведения приближенного анализа представим скорость течения в области $x - [0, L]$ в виде

$$V = a_{\text{кр}} + \Delta V, \tag{18}$$

полагая $\Delta V \ll a_{\text{кр}}$. Преобразуем выражение (16), полагая

$$V\left(1 - \frac{(k-1)}{(k+1)}\frac{V^2}{a_{\text{кр}}^2}\right) \approx a_{\text{кр}}\left(1 - \frac{(k-1)}{(k+1)}\right), \qquad \frac{V^2}{a_{\text{кр}}^2} - 1 \approx 2\frac{\Delta V}{a_{\text{кр}}}.$$

В этом случае (16) можно записать в виде

$$\frac{d\Delta V}{dx} \approx \frac{a_{\text{кр}}^2}{F_{\text{кр}}}\frac{2}{(k+1)}\frac{(F_L - F_{\text{кр}})}{L^2}\frac{x}{\Delta V},$$

откуда

$$\Delta V \approx \pm a_{\text{кр}}\frac{x}{L}\sqrt{\frac{2(F_L - F_{\text{кр}})}{(k+1)F_{\text{кр}}}}.$$

Таким образом, выражение (16) для скорости течения в окрестности критического сечения можно записать в виде

$$V \approx a_{\text{кр}}\left(1 \pm \frac{x}{L}\sqrt{\frac{2(F_L - F_{\text{кр}})}{(k+1)F_{\text{кр}}}}\right). \tag{19}$$

Из выражения (19) следует, что в малой правой окрестности параболического критического сечения скорость течения в первом приближении изменяется по линейному закону вдоль оси сопла.

Работа выполнена при финансовой поддержке Российского научного фонда (проект №20-19-00548).

Библиографический список

1. Абрамович, Г.Н. Прикладная газовая динамика. Том 1. Учеб. руководство для вузов / Г.Н. Абрамович. 5-е изд., перераб. и доп. – М.: Наука. гл. ред. физ-мат. лит, 1991. – 600 с.