УДК 531.533

Кусюмов А.Н., Кусюмов С.А.

О НЕКОТОРЫХ ОЦЕНКАХ СПЕКТРАЛЬНЫХ ХАРАКТЕРИСТИК ТЕЧЕНИЯ ПРИ 3D ОБТЕКАНИИ КРУГОВОГО ЦИЛИНДРА

Для низких чисел Рейнольдса возможно проведение прямого численного моделирования обтекания цилиндра на основе решения уравнений Нвье-Стокса [1, 2], или осреднённых по Рейнольдсу уравнений Нвье-Стокса (URANS) с применением вихревых моделей турбулентности [3–5].

При исследованиях характеристик обтекания цилиндра в диапазоне низких значений числа Рейнольдса можно воспроизвести энергонесущий и инерционный интервалы спектра. При этом существуют два подхода к определению спектральных характеристик случайного сигнала, основанные на использовании быстрых преобразований Фурье (FFT): в области пространственных волновых чисел [6] и во временной области [7, 8].

В настоящей работе рассматривается задача численного моделирования нестационарного пространственного обтекания цилиндра для числа Рейнольдса $\mathrm{Re} = 3900$ на основе решения уравнений Навье-Стокса.

Численное моделирование проводилось с использованием кода ANSYS Fluent. Спектральные свойства потока анализировались с помощью MATLAB.

Для непрерывного (вещественного) сигнала $u(t)$ энергия E в некоторой точке пространства определяется выражением

$$E = \int_{-\infty}^{\infty} u(t)^2 \, dt. \tag{1}$$

Преобразование Фурье для ограниченного во времени сигнала имеет вид [8]:

$$\hat{u}_T(f) = \int_{-T/2}^{T/2} u(t) \, e^{-2\pi i t f} dt. \tag{2}$$

С использованием (2) спектральная плотность энергии определяется выражением:

$$ESD = |\hat{u}(f)|^2. \tag{3}$$

С другой стороны из (1) следует, что энергия сигнала определяется интегралом от $U(t) = u^2(t)$. Поэтому наряду с выражениями (2), (3) для оценки энергетических свойств сигнала можно использовать функцию

$$ESS = \left|\hat{U}_T(f)\right|, \tag{4}$$

где

$$\widehat{U}_T(f) = \int_{-T/2}^{T/2} U(t)\, e^{-2\pi i t f} dt. \quad (5)$$

Функции ESS и ESD используются далее для оценки энергетического спектра поперечной компоненты скорости потока в следе за круговым цилиндром по результатам численного моделирования. Расчётная область представляла собой прямоугольник с размерами $20d \times 5d \times \pi d$, где d – диаметр цилиндра. Расчетные гекса-сетки с количеством элементов около $12{\cdot}10^6$ и $17{\cdot}10^6$ построены в ANSYS ICEM.

По результатам численного моделирования можно приближённо оценить значение колмогоровского масштаба длины [9]:

$$\eta = \left(\frac{\nu^3}{\epsilon}\right)^{1/4}, \quad (6)$$

где ν - коэффициент кинематической вязкости, ϵ - скорость диссипации энергии турбулентности, которую можно выразить через величину интегрального масштаба L:

$$\epsilon \sim \frac{u_\tau^3}{\kappa L}, \quad (7)$$

где

$$u_\tau = (\tau_w / \rho)^{1/2},\ \tau_w = c_f \frac{\rho V_\infty^2}{2}. \quad (8)$$

Здесь τ_w и u_τ определяют касательное напряжение и скорость трения, ρ - плотность жидкости (газа), c_f – коэффициент трения, $\kappa = 0.41$ – постоянная Кармана. Из (6), (7) следует

$$\eta \sim L \frac{2(2\kappa^2)^{1/8}}{{c_f}^{3/8}\mathrm{Re}^{3/4}}. \quad (9)$$

Полагая $L \approx d/2$, с учетом (8) получим

$$\eta = d \frac{(2\kappa^2)^{1/8}}{{c_f}^{3/8}\mathrm{Re}^{3/4}}. \quad (10)$$

Вся область спектра турбулентного течения делится на три подобласти (см, например, [9]): область генерации энергии (большие вихревые структуры), инерциальный диапазон (средние размеры), область диссипации энергии (малые размеры).

В инерциальном диапазоне (для возмущений малого масштаба) энергетическая оценка пространственных компонент u_i вектора скорости течения определяется законом «-5/3» А.Н. Колмогорова [10]:

$$E_{ij}^I(k) = \alpha_{ij} \epsilon^{2/3} k^{-5/3}. \quad (11)$$

Для изотропных течений $\alpha_{ij} = \alpha \approx 0.5$ [10]. В области сравнительно низких частот энергетическая оценка может быть выполнена в соответствии с (гиперболическим) законом «-1» [10]:

$$E_{ij}^{G}(k) = G_{ij} u_{\tau}^{2} k^{-1}, \qquad (12)$$

где k - волновое число; G_{ij} - универсальные постоянные: $G_{13} = G_{23} = 0$, $G_{11} = 0{,}8$, $G_{22} = 0{,}4$, $G_{33} = 0{,}5$.

В качестве границы инерциального диапазона (масштаба) в [9] рекомендовано

$$L_{DI} \sim 60\,\eta. \qquad (13)$$

Отсюда можно определить верхнюю частотную границу инерциального диапазона

$$f_{DI} \sim \frac{V_{\infty}}{L} \frac{{c_f}^{3/8} \mathrm{Re}^{3/4}}{120(2\kappa^2)^{1/8}}. \qquad (14)$$

Из (9) и (14) следует также

$$f_{\eta} \sim \frac{V_{\infty}}{L} \frac{{c_f}^{3/8} \mathrm{Re}^{3/4}}{2(2\kappa^2)^{1/8}}. \qquad (15)$$

Оценку характерной частоты f_{GI}, для каждой компоненты u_i вектора скорости течения можно получить сопоставляя (11) и (12) на границе между двумя областями:

$$E_{ii}^{G}(k) = E_{ii}^{I}(k). \qquad (16)$$

После подстановки (10) и (12) в (16) и преобразований получается

$$f_{GI\;ii} \sim \frac{V_{\infty} \alpha^{3/2}}{2\pi\kappa L (G_{ii})^{3/2}}. \qquad (17)$$

В частности, для $G_{22} = 0.4$ и α=0.5 и выражение (17) примет вид

$$f_{GI\;22} \sim \frac{0.7 V_{\infty}}{\pi \kappa L}.$$

По результатам моделирования при периодических граничных условиях ($St = 0.255$) $c_{f max} = 0.092$ и для приближенной оценки характерных частот получим:

$$\frac{f_{\eta\,max}}{f_K} \sim 907; \frac{f_{DI\,max}}{f_K} \sim 15.14; \frac{f_{GI}}{f_K} \sim 4.26.$$

На рис. 1 в логарифмическом масштабе представлены распределения

$$\overline{ESD}(\bar{f}) = \frac{ESD(\bar{f})}{V_{\infty}^{2}}, \overline{ESS}(\bar{f}) = \frac{ESS(\bar{f})}{V_{\infty}^{2}}, \text{ где } \bar{f} = \frac{f}{f_K}.$$

Обе спектральные характеристики $\overline{ESS}(\bar{f})$(верхняя спектральная кривая) и $\overline{ESD}(\bar{f})$ (нижняя кривая) имеют отрицательный градиент в области $f_{GI} < \bar{f} < f_{DI}$. Распределение $\overline{ESS}(\bar{f})$ лучше согласуется с законом «-5/3» (тонкая непрерывная прямая в верхней части рисунка), в сравнении с распределением $\overline{ESD}(\bar{f})$. Для дистанций, не превышающих $12d$, на участке $2f_K < \bar{f} < f_{GI}$наблюдается градиент наклона спектральной линии $\overline{ESS}(\bar{f})$, близкий к закону «-1» (тонкая пунктирная прямая в верхней части рисунка).

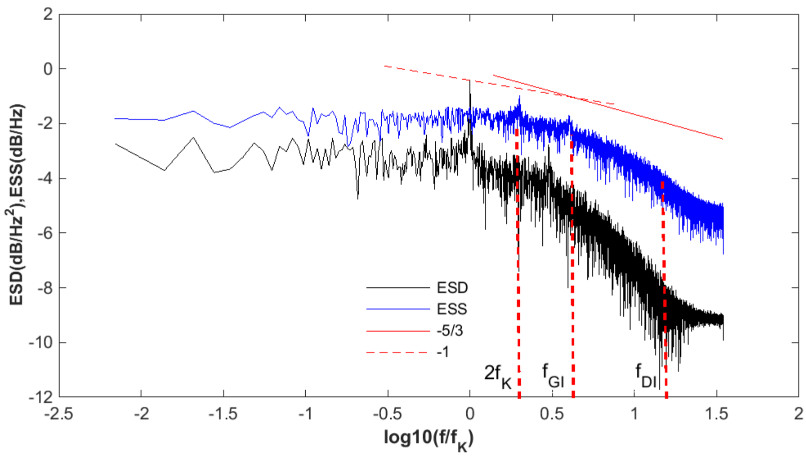

Рис. 1. Спектральные характеристики скорости v в точке $x = 3.5d$ на осевой линии

Работа выполнена при поддержке гранта Минобрнауки России Рег. номер НИОКТР АААА-А20-120102190039-6.

Библиографический список

1. Dong, S. A combined direct numerical simulation–particle image velocimetry study of the turbulent near wake / S. Dong, G. E. Karniadakis, A. Ekmekc and D. Rockwell // J. Fluid Mech. – 2006. – V. 569. Pp. 185-207.

2. Wissink, J.G. Numerical study of the near wake of a circular cylinder / J.G. Wissink, W. Rodi // International Journal of Heat and Fluid Flow. – 2008. – V. 29. N4. Pp. 1060-1070.

3. Kravchenko, A.G. Numerical studies of flow over a circular cylinder at ReD = 3900 / A.G. Kravchenko, P. Moin //Phys Fluids. – 2000. – V. 12. N 2. Pp. 403-417.

4. Parnaudeau, P. Experimental and numerical studies of the flow over a circular cylinder at Reynolds number 3900 / P. Parnaudeau, J. Carlier, D. Heitz, and E. Lamballais // Physics of Fluid. – 2008. – V. 20. 085101.

5. Rajani, B. N. LES of Flow past Circular Cylinder at Re = 3900 / B. N. Rajani, A. Kandasamy and S. Majumdar // Journal of Applied Fluid Mechanics. – 2016. – V. 9. N. 3. Pp. 1421-1435.

6. Durran, D. Practical Considerations for Computing Dimensional Spectra from Gridded Data / D. Durran, J. A. Weyn and N. Q. Menchaca//Monthly Weather Review. – 2017. – V. 145. N 9. Pp. 3901-3910.

7. Millers, S. Probability and random processes / S. Millers, D. Childers. – Waltham, MA : Academic Press, 2012. Pp. 473-515.

8. Lathi, B. P. Modern digital and analog communication systems / B. P. Lathi, Z. Ding. – Oxford university press, 2019. 993 p.

9. Pope, S.B. Turbulent Flows / S.B. Pope. – Cambridge University Press, 2000. 749 p.

10. Кадер, Б.А. Спектры анизотропных турбулентных пульсаций скорости и температуры в пристеночных турбулентных потоках / Б.А. Кадер, А.М. Яглом // Сб.: Проблемы турбулентных течений. – М.: Наука, 1987. – С. 65-74.