БИБЛИОГРАФИЧЕСКИЙ СПИСОК

1. Авраменко А.А., Седельников А.В. Моделирование остаточной микрогравитации на борту орбитального КА // Изв. Вузов Авиационная техника. - 1996. - № 4. - с. 22-25.
2. Mandelbrot B.B. The Fractal Geometry of Nature. - New York : W.H. Freeman, - 1983.
3. Седельников А.В. Критерий учета нелинейности в модели демпфирования собственных колебаний упругих элементов космической станции. - Деп. в ВИНИТИ. - № 2537-В96. - 23 с.
4. Mandelbrot B.B. Self-affine fractal sets // Fractal in Physics (eds. L. Pietronero & E. Tosatti) North-Holland, Amsterdam. – pp. 3-28.
5. Mauldin R.D. On the Hausdorff dimension of graphs and random recursive object // Dimension and Entropies in Chaotic Systems (ed. G. Mayer-Kress, Springer-Verlag, Berlin).-1986 - pp. 28 – 33.

УДК 629.78

Юдинцев В. В.

УРАВНЕНИЯ ДВИЖЕНИЯ СИСТЕМЫ СВЯЗАННЫХ ТВЕРДЫХ ТЕЛ С ПЕРЕМЕННОЙ СТРУКТУРОЙ

Рассматривается задача построения уравнений движения механических систем ракетно-космической техники, с целью их дальнейшего решения на ЭВМ. Особенностью рассматриваемых механических систем является изменчивость их структуры во времени, возможность “включения” и “выключения” связей с течением времени при выполнении некоторых условий. Приведем два примера таких систем.

Первый пример – система, состоящая из центрального блока и створок головного обтекателя, которые в процессе своего отделения при развороте на определенный угол теряют кинематическую связь с центральным блоком. Второй – система, состоящая из центрального блока и боковых блоков, в процессе отделения которых число степеней свободы в общем случае изменяется от 10 до 24. Обычно тела рассматриваемых механических систем соединены при помощи шарниров, ограничивающих относительные перемещения и повороты тел, т. е. связи между телами можно рассматривать как голономные.

Для моделирования механической системы необходимо получить систему дифференциальные уравнений вида:

$$\dot{q}_i(t) = g_i(q_1, q_2, \dots, q_n, \bar{p}, t), \quad i = \overline{1, n}, \tag{1}$$

где: q_i – обобщенные координаты, $\bar{p}$ - вектор параметров.

Уравнения (1) можно построить, используя уравнения Лагранжа второго рода. В этом случае количество уравнений будет минимально, и в эти уравнения не войдут реакции связей, а сами условия связи будут выполняться автоматически. Другой способ построения уравнений (1) – использование общих теорем динамики, что приведет к большой размерности системы (1), и в этом случае в уравнения войдут дополнительные неизвестные – реакции связей. В практике часто необходимо контролировать изменение реакций в шарнирах, и поэтому для решения такого класса задач удобней использовать уравнения, построенные с использованием общих теорем динамики.

Для определения сил реакций, входящих в уравнения движения, необходимо использовать уравнения связи вида:

$$f_i(q_1, \dots, q_n) = 0, \quad i = \overline{1, l}, \tag{2}$$

где l – число связей.

Вид выражения f_i в уравнении (2) определяется способом соединения тел и структурой механической системы. Для численного анализа необходимо для конкретной механической системы получить аналитическое выражение для f_i.

Уравнения движения, полученные при помощи общих теорем динамики, совместно с уравнениями связи (2) образуют систему дифференциально-алгебраических уравнений. Для приведения этой системы к стандартному виду (1) дважды продифференцируем уравнение (2):

$$\sum_{j=1}^{n}\sum_{i=1}^{n}\frac{\partial^2 f_k}{\partial q_i \partial q_j}\dot{q}_i\dot{q}_j + \sum_{i=1}^{n}\frac{\partial f_k}{\partial q_i}\ \ddot{q}_i = 0, \ k = \overline{1, l} \tag{3}$$

Система (3) совместно с уравнениями динамики образуют систему линейных уравнений относительно ускорений, которую необходимо разрешить для получения правых частей уравнений (1).

Векторы сил реакции и реактивных моментов, которые входят в уравнения движения, в общем случае могут меняться как по величине, так и по направлению, что определяется способом соединения тел. Тела могут соприкасаться поверхностями, что приведет к возникновению в точке контакта силы реакции, направленной по нормали к поверхности, и с течением времени направление этого вектора будет изменяться из-за взаимного движения тел. В механических систем ракетно-космической техники распространены более простые типы соединений, в которых контакт осуществляется по плоским поверхностям, линиям или точкам. При этом контакт "плоскость-плоскость" можно рассматривать как контакт "точка-плоскость" с дополнительным введением связи на относительное вращение вокруг двух осей.

Будем рассматривать соединение "точка-плоскость" и соединение, ограничивающее относительное вращение двух тел вокруг оси как два элементарных типа соединений, при помощи которых можно строить более сложные соединения тел. Так, например, если движение одного тела относительно другого осуществляется по направляющей прямой, то такую связь можно задать двумя соединениями типа "точка-плоскость" (две пересекающиеся плоскости определяют прямую) и двумя связями, ограничивающими относительное вращение тел вокруг двух осей. Таким образом, построение более сложного типа соединений достигается добавлением к уравнениям движения уравнений связи двух типов с разными параметрами (ориентацией нормалей плоскостей и векторов относительного вращения).

Получим уравнения связи двух элементарных соединений. Для построения уравнений движения системы твердых тел достаточно рассмотреть два тела, поскольку если система состоит из большего числа тел, то необходимо при построении уравнений рассмотреть каждую пару взаимодействующих тел.

Рассмотрим систему, состоящую из двух тел i и j, находящихся во взаимодействии посредством обобщенного шарнира, ограничивающего относительное поступательное и вращательное движения (Рисунок 1). Действие этого шарнира заменим векторами силы реакции и реактивного момента, действующими на оба тела. Уравнения движения этой системы тел запишется следующим образом:

$$
\begin{cases}
m_i\bar{a}_i = \bar{F}_i + \bar{N}_{ij}; \\
m_j\bar{a}_j = \bar{F}_j + \bar{N}_{ji}; \\
J_i\bar{\varepsilon}_i = \bar{M}_i + \bar{M}_{ij} + \bar{M}(\bar{N}_{ij}) - \bar{\omega}_i \times J_i\bar{\omega}_i; \\
J_j\bar{\varepsilon}_j = \bar{M}_j + \bar{M}_{ji} + \bar{M}(\bar{N}_{ji}) - \bar{\omega}_j \times J_j\bar{\omega}_j; \\
\bar{M}_{ij} = -\bar{M}_{ji}, \quad \bar{N}_{ij} = -\bar{N}_{ji}; \\
\bar{\omega}_i = \bar{\gamma}_i(\alpha_{i1}, \alpha_{i2}, \alpha_{i3}); \\
\bar{\omega}_j = \bar{\gamma}_j(\alpha_{j1}, \alpha_{j2}, \alpha_{j3}).
\end{cases}
\tag{4}
$$

где $\bar{F}_i, \bar{F}_j$ - сумма активных сил действующих на тела i и j, соответственно; $\bar{M}_i, \bar{M}_j$ - суммарные векторы активных моментов; $\bar{N}_{ij}, \bar{M}_{ij}$ - реактивные силы и моменты в шарнире; $\bar{a}_i, \bar{a}_j$ - ускорения центров масс тел i и j соответственно, $\bar{a}_i = \dot{\bar{V}}_i = \ddot{\bar{r}}_i$, $\bar{a}_j = \dot{\bar{V}}_j = \ddot{\bar{r}}_j$; $\bar{r}_i, \bar{r}_j$ - радиус-вектор центров масс тел i и j соответственно; α_{i1}, α_{i2}, α_{i3}, α_{j1}, α_{j2}, α_{j3} - параметры, задающие ориентацию тел (например, углы Эйлера, Брайта, направляющие косинусы).

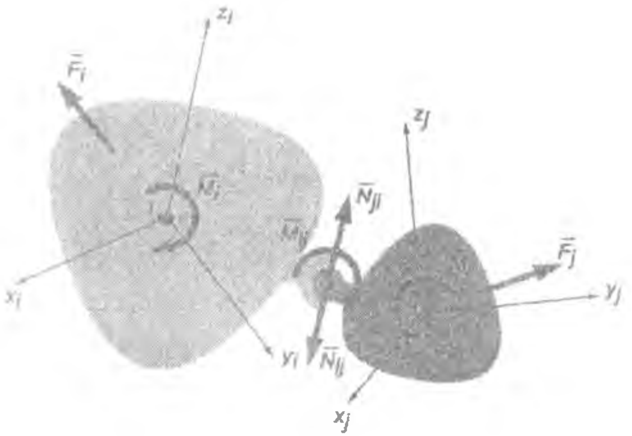

Рисунок 1 – Система двух тел

Определим уравнения связи “точка-плоскость”. Связь “точка-плоскость” ограничивает относительное поступательное движение двух тел так, что определенная точка одного тела должна все время находиться на определенной плоскости другого тела.

Запишем уравнение для рассматриваемого типа связи в координатной матричной форме, которая будет использоваться и в дальнейшем (Рисунок 1):

$$
\begin{aligned}
&(\bar{r}_{ij} - \bar{r}_{ij}^{0})^{T}\,\bar{n}_{ij} = 0, \\
&\bar{r}_{ij} = A_i(A_j^{-1}\bar{r}_{jj} + \bar{R}_j - \bar{R}_i)
\end{aligned}
\qquad (5)
$$

где A_i, A_j – матрицы перехода от неподвижной системы координат к связанной системе координат (ССК) соответствующего тела; $\bar{n}_{ij}$ - вектор-столбец, определяющий нормаль плоскости Π в ССК тела i; $\bar{r}_{ij}^{0}$ - вектор-столбец, определяющий положение плоскости в ССК тела i; $\bar{r}_{ij}$ - вектор-столбец, определяющий радиус-вектор точки контакта в ССК тела i; $\bar{r}_{jj}$ - вектор-столбец, определяющий радиус-вектор точки контакта в ССК тела j.

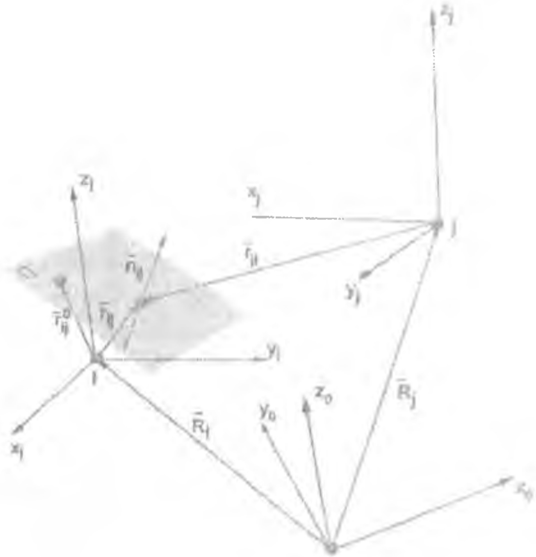

Рисунок 2 – Определение связи “точка-плоскость”

Уравнение (5) записано в ССК тела i и представляет собой матричное уравнение плоскости в ССК i. Дважды продифференцируем уравнение (5) в ССК тела j, учитывая правило дифференцирования матрицы перехода [2]:

$$
\dot{A}_j\bar{\zeta} = \dot{A}_j A_j^{-1} A_j\bar{\zeta} = -\bar{\omega}_j \times A_j\bar{\zeta}; \quad \dot{A}_i^{-1}\bar{\zeta} = A_i^{-1}\dot{A}_i A_i^{-1}\bar{\zeta} = A_i^{-1}(\bar{\omega}_i \times \bar{\zeta}); \qquad (6)
$$

$$
\begin{aligned}
&\vec{r}_{ij}^{\,T}\vec{n}_{ij} = 0; \\
&\dot{\vec{r}}_{ij} = \dot{A}_i(A_j^{-1}\vec{r}_{ji} + \vec{R}_j - \vec{R}_i) + A_i(\dot{A}_j^{-1}\vec{r}_{ji} + \dot{\vec{R}}_j - \dot{\vec{R}}_i); \\
&\dot{\vec{r}}_{ij} = -\vec{\omega}_i \times \vec{r}_{ij} + A_i(A_j^{-1}(\vec{\omega}_j \times \vec{r}_{ji}) + \dot{\vec{R}}_j - \dot{\vec{R}}_i); \\
&\ddot{\vec{r}}_{ij} = -\dot{\vec{\omega}}_i \times \vec{r}_{ij} - \vec{\omega}_i \times \dot{\vec{r}}_{ij} + \dot{A}_i(A_j^{-1}(\vec{\omega}_j \times \vec{r}_{ji}) + \dot{\vec{R}}_j - \dot{\vec{R}}_i) + A_i(\dot{A}_j^{-1}(\vec{\omega}_j \times \vec{r}_{ji}) + \qquad (7) \\
&+\ddot{\vec{R}}_j - \ddot{\vec{R}}_i + A_j^{-1}(\dot{\vec{\omega}}_j \times \vec{r}_{ji})) \\
&\ddot{\vec{r}}_{ij} = -\vec{\varepsilon}_i \times \vec{r}_{ij} - \vec{\omega}_i \times \dot{\vec{r}}_{ij} - \vec{\omega}_i \times [A_i(A_j^{-1}(\vec{\omega}_j \times \vec{r}_{ji}) + \dot{\vec{R}}_j - \dot{\vec{R}}_i)] + \\
&+A_i(\ddot{\vec{R}}_j - \ddot{\vec{R}}_i + A_j^{-1}(\vec{\omega}_j \times (\vec{\omega}_j \times \vec{r}_{ji})) + A_j^{-1}(\vec{\varepsilon}_j \times \vec{r}_{ji}));
\end{aligned}
$$

Таким образом, уравнение (5) примет вид:

$$
\begin{aligned}
&[A_j^{-1}(\vec{\varepsilon}_j \times \vec{r}_{ji}) - \vec{\varepsilon}_i \times \vec{r}_{ij} + A_i(\ddot{\vec{R}}_j - \ddot{\vec{R}}_i)]^T \vec{n}_{ij} = [\vec{\omega}_i \times \dot{\vec{r}}_{ij} + \vec{\omega}_i \times (A_i(A_j^{-1}(\vec{\omega}_j \times \vec{r}_{ji}) + \dot{\vec{R}}_j - \dot{\vec{R}}_i)) - \\
&- A_i A_j^{-1}(\vec{\omega}_j \times (\vec{\omega}_j \times \vec{r}_{ji}))]^T \vec{n}_{ij}
\end{aligned} \qquad (8)
$$

Силы реакции тела j на тело i и тела i на тело j действуют вдоль вектора нормали к плоскости Π:

$$
\vec{R}_{ij} = -n_{ij}R_{ij} = -\vec{R}_{ji}.
$$

Запишем уравнение связи, запрещающее относительное вращение тела j вокруг некоторой оси $\vec{n}$, определенной в теле i:

$$
(A_i A_j^{-1}\vec{\omega}_j - \vec{\omega}_i)^T \vec{n}_{ij} = 0. \qquad (9)
$$

Уравнение связи определено через угловые скорости, данная связь является интегрируемой и, следовательно, голономной. Продифференцируем уравнение (9) в ССК i:

$$
(\dot{A}_i A_j^{-1}\vec{\omega}_j + A_i \dot{A}_j^{-1}\vec{\omega}_j + A_i A_j^{-1}\vec{\varepsilon}_j - \vec{\varepsilon}_i)^T n_{ij} = 0. \qquad (10)
$$

Учитывая (6), получим:

$$
(A_i A_j^{-1}\vec{\varepsilon}_j)^T \vec{n}_{ij} - \vec{\varepsilon}_i^{\,T}\vec{n}_{ij} = (\vec{\omega}_i \times A_i A_j^{-1}\vec{\omega}_j)^T \vec{n}_{ij}. \qquad (11)
$$

Векторы реактивных моментов определяются следующим образом:

$$
\vec{M}_{ij} = -\vec{M}_{ji} = -\vec{n}_{ij}M_{ij}
$$

Приведем пример построения более сложного соединения. Рассмотрим соединение двух тел при помощи плоского цилиндрического шарнира (рис. 3). Соединение этого типа ограничивает два относительных поступательных движения и два вращательных: тело j может вращаться только вокруг оси x тела i и двигаться вдоль этой оси. Определим плоскости Πxy и Πxz, жестко связанные с телом i. Выберем в теле j точку K_j радиусом-вектором $\vec{r}_{ji}$. Для сохранения кинематической связи между телами необходимо, чтобы точка K_j двигалась только вдоль оси x, принадлежащей телу i, определяемой пересечением плоскостей $Пxy$ и $Пxz$. При этом тело j может вращаться относительно тела i только вокруг оси x.

Условие принадлежности точки K_{ij} одновременно двум плоскостям $Пxy$ и $Пxz$ требует двух уравнений вида (8), а запрет на вращение тела j относительно осей z и y определяется двумя уравнениями вида (11).

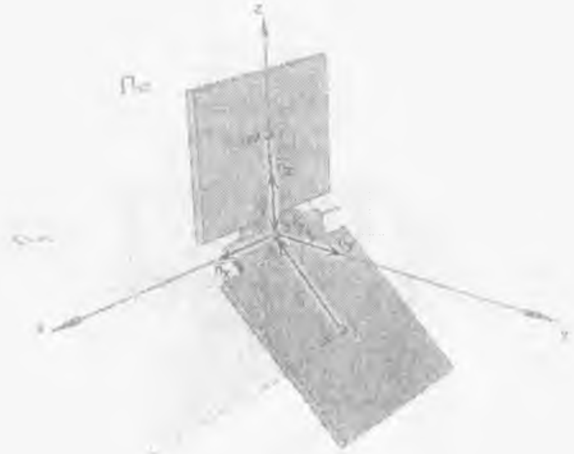

Рисунок 3 – Плоский цилиндрический шарнир

$$
\begin{aligned}
&(\vec{r}_{ij}(t)-\vec{r}_{ij}^{\,0})^T\,\vec{n}_z = 0;\\
&(\vec{r}_{ij}(t)-\vec{r}_{ij}^{\,0})^T\,\vec{n}_y = 0;\\
&A_j A_i^{-1}\vec{\varepsilon}_j\vec{n}_z - \vec{\varepsilon}_i\vec{n}_x = (\vec{\omega}_j \times A_j A_i^{-1}\vec{\omega}_i)^T\,\vec{n}_x;\\
&A_j A_i^{-1}\vec{\varepsilon}_j\vec{n}_y - \vec{\varepsilon}_i\vec{n}_y = (\vec{\omega}_j \times A_j A_i^{-1}\vec{\omega}_i)\vec{n}_y.
\end{aligned}
\qquad (12)
$$

Уравнения (12) совместно с уравнениями (4) образуют систему линейных алгебраических уравнений относительно линейных и угловых ускорений и реакций связи.

Предложенный в работе подход формирования уравнений связи был реализован на языке C++ и использован для моделирования процесса отделения головного обтекателя, раскрытия панелей солнечных батарей, механизма поворота антенны.

БИБЛИОГРАФИЧЕСКИЙ СПИСОК

1. Виттенбург Й. Динамика систем твердых тел. – М.: Мир, 1980.
2. Вильке В. Г. Теоретическая механика: Учебник – М.: Изд-во МГУ, 1998.