УДК. 531.3

Ю.Г.Антонов, Ю.В.Монахов

УПРАВЛЕНИЕ ПЕРЕОРИЕНТАЦИЕЙ КОСМИЧЕСКИХ АППАРАТОВ

В настоящей работе формулируется подход к решению краевой задачи переориентации космического аппарата (КА) с электромеханическими исполнительными органами на базе двухстепенных безупорных силовых гироскопов - гиродинов (МГ).

В общей постановке требуется найти решение задачи переориентации для комплекса "КА - связка МГ". Таким образом, обьектом управления служит система (n+1) тел, механически связанных друг с другом. Задача управления для этой системы формулируется как задача переориентации КА при управлении переориентацией МГ.

Из закона сохранения кинетического момента в системе (на систему не действуют внешние силы) имеем

$$\vec{K}_{\text{ка}} = -\vec{K}_{\text{мг}} \quad (\vec{K}_{\text{ка}} \in K_{\text{ка}},\ \vec{K}_{\text{мг}} \in K_{\text{мг}}), \qquad (1)$$

где $K_{\text{ка}}$ - пространство кинетического момента КА, $K_{\text{мг}}$ - пространство кинетического момента МГ ($K_{\text{ка}}$, $K_{\text{мг}}$ - евклидовы пространства E_3).

Откуда

$$\frac{d\vec{K}_{\text{ка}}}{dt} = -\frac{d\vec{K}_{\text{мг}}}{dt}. \qquad (2)$$

Движение каждого гиродина определяется изменением угла прецессии (α- номер гиродина $\alpha=1,n$; в дальнейшем греческие индексы пробегают значения 1,n). Углы δ^{α} образуют многообразие /1/, которое обозначим B^n. Длина дуги кривой в B^n определяется дифференциальной квадратичной формой /1/

$$d\sigma^2 = g_{\alpha\beta}\, d\delta^{\alpha}\, d\delta^{\beta}, \qquad (3)$$

где $g_{\alpha\beta}=g_{\alpha\beta}(\delta^{\alpha})$ - координаты метрического тензора B^n. По повторяющимся индексам, если не оговорено особо, проводится суммирование. Поскольку система тел механически связана, то между B^n и $K_{\text{ка}}$ существует отображение f: $B^n \to K_{\text{ка}}$. Свяжем с КА базис E_c (ориентированный по главным осям инерции). Вращение E_c в базисе $E_и$ ($E_и$ - инерциальный базис) описывается вектором $\vec{\Phi}$ ($\vec{\Phi}$ – вектор конечного поворота /2/), определяющим переход от $E_и$ к E_c). Таким образом, если $\lambda: E_3 \to E_3$, $\lambda \in H^*$, H^* – группа кватернионов, то

$$\lambda = \exp\left(\frac{1}{2}\vec{\Phi}\right). \qquad (4)$$

Пусть теперь $\hat{H}^*$ область изоморфизма $K_{ка}$ в H^*, т.е. $(\exists \hat{H}^*\ \exists \lambda')$ $(\hat{H}^* \subset H, \lambda \in \hat{H}^*, \lambda';\ \hat{H}^* \to K_{ка})$ и Φ' – пространство производных вектора $\vec{\Phi}$, то из $\Phi' \to \hat{H}^*$ следует $\Phi' \to K_{ка}$ и из $\hat{f}: B^n \to K_{ка}$ следует, что $(\exists \hat{f}_1, \exists \hat{f}_2)$ $(\hat{f}_1: B^n \to \hat{H}^*, \hat{f}_2: B^n \to \Phi')$, т.е. существует диффеоморфизм

$$d\delta^\alpha = \frac{\partial \hat{f}_2^\alpha}{\partial \dot{\Phi}^l}\, d\dot{\Phi}^l = \frac{\partial \hat{f}_1^\alpha}{\partial \dot{\lambda}^q}\, d\dot{\lambda}^q \qquad (5)$$

(l=1,3; q=1,4; $\dot{\Phi}^l$, $\dot{\lambda}^q$ – производные по времени компонент вектора $\vec{\Phi}$ и кватерниона λ соответственно). Тогда

$$d\delta^2 = g_{\alpha\beta}\, d\delta^\alpha d\delta^\beta = G_{lj}\, d\dot{\Phi}^l d\dot{\Phi}^j = d\dot{\Phi}_1^2 + d\dot{\Phi}_2^2 + d\dot{\Phi}_3^2, \qquad (6)$$

где G_{lj} – компоненты метрического тензора в E_3 (диагонального и постоянного в декартовом базисе $E_и$).

Уравнения движения гиродинов в координатах δ^α будут иметь вид

$$\dot{\delta}^\alpha = U^\alpha, \qquad (7)$$

где U^α – управляющие функции гиродинов. Следовательно

$$(\dot{\delta}^\alpha)^2 = g_{\alpha\beta}\, U^\alpha U^\beta \qquad (8)$$

и (3) будет описывать экстремаль в B^n, если функционал

$$J = \frac{1}{2}\int_{t_0}^{T} g_{\alpha\beta}\, U^\alpha U^\beta\, dt \;\to\; min. \qquad (9)$$

Из существования диффеоморфизма (5) следует, что на E_3 задано пространство управляющих функций U^l, так, что $\hat{f}^{-1}: U_{мг} \to U_{ка}$ определится из соотношения

$$U^l = \left(\frac{\partial \omega^l}{\partial \hat{f}^\alpha}\right) U^\alpha \qquad (10)$$

(ω^l – компоненты угловой скорости КА). Таким образом, (9) должен одновременно удовлетворяться на функциях U^l, определяемых (10).

Запишем уравнения движения системы:

1) уравнения движения МГ

$$\dot{\delta}^{\alpha} = U^{\alpha}; \tag{11}$$

2) уравнения движения КА

$$\frac{d}{dt}\omega^{i} = J_{ij}U_{j} - J_{ij}\varepsilon_{jkl}I_{km}\omega_{m}\omega_{l}; \tag{12}$$

$$\frac{d}{dt}\lambda = \frac{1}{2}\,\lambda\,\vec{\omega}, \tag{13}$$

где J_{ij} - компоненты тензора, дуального к тензору инерции I КА, ε_{ijk} - символы Леви-Чивита.

Задача отыскания экстремалей в B^{n} и E_{3}, отвечающих оптимальной переориентации комплекса "КА-МГ" (КМГ) сводится в этом случае к отысканию экстремальных решений уравнений движения КА, соответствующих гамильтониану системы (II)-(I3). При этом гамильтониан, являясь скаляром, должен быть инвариантен, как по отношению к диффеоморфизму (5), так и по отношению к элементам H^{*} (инвариантность гамильтониана по отношению к преобразованиям координат), т.е. преобраования должны быть каноническими /3/. Гамильтониан, определяющий систему (II)-(I3), имеет вид

$$T = \frac{1}{2}\,g_{\alpha\beta}U^{\alpha}U^{\beta} + \mu_{i}\dot{\omega}_{i} + \gamma_{q}\dot{\lambda}_{q}, \tag{14}$$

где μ_{i}, γ_{q} (i=1,3,q=1,4) - множители Лагранжа, $\dot{\omega}_{i}$ - производные по времени компонент вектора угловой скорости $\vec{\omega}$.

Из требования инвариантности гамильтониана по отношению к (5), (10) получаем систему сопряженных уравнений для МГ

$$g_{\alpha\beta}U^{\beta} + \mu_{i}J_{ij}\,\frac{\partial\omega^{j}}{\partial\hat{f}^{\alpha}} = 0; \tag{15}$$

$$\frac{d}{dt}\mu_{\alpha} = -\,\frac{\partial T}{\partial\delta^{\alpha}}, \quad (\mu_{\alpha} = \frac{\partial\hat{f}^{\alpha}}{\partial\omega^{i}}\,\mu_{i}) \tag{16}$$

и для КА

$$U_{i} = -\,\mu_{i}; \tag{17}$$

$$\mu_{i} = \frac{\partial\omega_{i}}{\partial\hat{f}^{\alpha}}\,\mu_{\alpha}; \tag{18}$$

$$\frac{d}{dt}\mu_{i} = -\,\frac{\partial T}{\partial\omega_{i}}; \tag{19}$$

$$\frac{d}{dt}\gamma_q = -\frac{\partial T}{\partial \lambda_q}. \tag{20}$$

Необходимые условия минимума (14) могут быть определены следующей теоремой.

Теорема 1. Минимум функционала (14) достигается на решениях (12), (13), удовлетворяющих краевым условиям

$$\lambda(0)=\lambda_н,\ \vec\omega(0)=\vec\omega_н; \tag{21}$$

$$\lambda(T)=\lambda_к,\ \vec\omega(T)=\vec\omega_к \tag{22}$$

и соотношению

$$\frac{d}{dt}(J_{ij}\mu_j) + \varepsilon_{ijk}I_{jl}\mu_l\omega_k = J_{ik}Vekt(\lambda\sigma)_k, \tag{23}$$

где $\hat\sigma$ - постоянный кватернион.

Доказательство основывается на следующих положениях.

1. Вследствие инвариантности I при преобразованиях вращения множители Лагранжа могут быть только компонентами постоянного кватерниона. В этом случае, используя (19) и (14), после несложных преобразований можно получить (23). Это соотношение может быть записано также в виде

$$\frac{d}{dt}U_i + \varepsilon_{ijk}U_j\omega_k = J_{ik}Vekt(\lambda\hat\sigma)_k. \tag{24}$$

2. Лемма. Решение системы (12), (13) вида

$$\vec\Phi = \vec\delta_1\frac{t^3}{6} + \vec\delta_2\frac{t^2}{2} + \vec\delta_3 t + \vec\delta_4, \tag{25}$$

где $\vec\delta_i$ $(i=1,4)$, определяются из (21), (22) удовлетворяет необходимым условиям минимума (24) функционала (14). В (25) $\vec\Phi$ - вектор конечного поворота.

Доказательство. Представляя (14), как среднеинтегральное значение в точке t_a $[0,T]$ и, подставляя (25) в (24), в этой точке, получим

$$\hat\sigma_i = -I_{ii}^2\,\sigma_{1i} \tag{26}$$

(по i нет суммирования, σ_i- компоненты векторной части σ). Выполняя ту же операцию в точке T, получаем, что $Vekt(\sigma)$ - единственная константа, определенная (26) и (21), (22), что и требовалось.

Из требований инвариантности гамильтониана относитено диффеоморфизма (5), находим, что движение МГ, обеспечивающее минимум функционала (14), должно определяться преобразованием (17), т.е.

$$U_{\alpha} = \frac{\partial \hat{f}_{\alpha}}{\partial \omega_{i}} U_{i} \qquad (27)$$

преобразованием Мура – Пенроуза /4/, определяющего через управляющую функцию движения КА управление гиродинами, что может быть сформулировано в виде следующей теоремы.

Теорема 2. Оптимальное управление переориентацией КА на гиродинах достигается на траекториях (25), при этом управление МГ определяется через управляющий момент КА, реализующий траекторию (25) посредством преобразования Мура – Пенроуза. Таким обобразом,

$$\dot{\hat{\delta}} = \hat{A}^{T}(\hat{A}\hat{A}^{T})^{-1}\hat{M}, \qquad (28)$$

где $\hat{A}=\partial K_{МГ}/\partial(\delta_1,\delta_2,,\delta_n)$: $\hat{M}$ – матрица компонент управляющего момента КА.

Доказателство очевидно. Поскольку любое, отличное от (28) управление МГ либо должно соответствовать (25), либо нарушает условия минимума.

Заметим также, что в случае ограничения по угловой скорости КА или по скоростям прецессии МГ, необходимым условиям минимума удовлетворяет также решение

$$\vec{\Phi} = \begin{cases} \vec{c}_1 t^2 + \vec{c}_2 t + \vec{c}_3 & (t \in [0,T_1)); \\ \vec{c}_4 t + \vec{c}_5 & (t \in [T_1,T_2)); \\ \vec{c}_6 t^2 + \vec{c}_7 t + \vec{c}_8 & (t \in [T_2,T]); \end{cases}$$

где $T=T_1+T_2+T_3$ – время переориентации; $\vec{c}_i$ – векторы константы (i=1,7).

Список литературы

1. Рашевский П.К. Риманова геометрия и тензорный анализ. М.: Наука, 1967.

2. Бранец В.Н., Шмыглевский И.П. Применение кватернионов в задачах ориентации твердого тела. М.: Наука,1973.

3. Ландау Л.Д., Лифшиц Е.М., Механика. М.: Наука, 1973.

4. Margulies G. & Aubrun I.N., Geometric Theory of Single-Gimbal Control Moment Gyro Systems //Journal of the Astronautical Sciences, 1978, 26, N:2, P. 159-191.