УДК 533.6

Куркин Е.И., Шахов В.Г.

ТУРБУЛЕНТНЫЙ ПОГРАНИЧНЫЙ СЛОЙ ПРИ ОСЕВОМ ОБТЕКАНИИ ВРАЩАЮЩЕГОСЯ ОСЕСИММЕТРИЧНОГО ТЕЛА

Для описания пограничного слоя введем следующую криволинейную систему координат: x – меридиональная координата, измеряемая вдоль направляющей тела вращения; y – вертикальная координата, измеряемая по вертикали к поверхности тела; z – окружная координата (рис. 1).

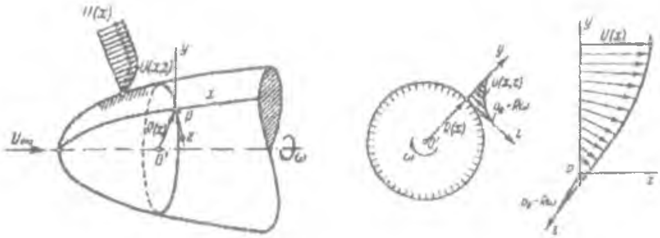

Рис. 1. Схема обтекания жидкостью вращающегося осесимметричного тела

Пограничный слой подчиняется уравнению неразрывности, а также уравнениям импульсов в продольном и меридиональном направлениях [1]:

$$\begin{cases} \dfrac{\partial V_x}{\partial x}+\dfrac{V_x}{R}\dfrac{dR}{dx}+\dfrac{\partial V_y}{\partial y}=0 \\ V_x\dfrac{\partial V_x}{\partial x}-\dfrac{V_z^2}{R}\dfrac{dR}{dx}+V_y\dfrac{\partial V_x}{\partial y}=U\dfrac{dU}{dx}+\dfrac{1}{\rho}\dfrac{\partial \tau_{xy}}{\partial y} \\ V_x\dfrac{\partial V_z}{\partial x}+\dfrac{V_xV_z}{R}\dfrac{dR}{dx}+V_y\dfrac{\partial V_z}{\partial y}=\dfrac{1}{\rho}\dfrac{\partial \tau_{zy}}{\partial y} \end{cases} \quad (1)$$

где V_x,V_y,V_z – компоненты вектора скорости жидкости, $U(x)$ – скорость внешнего (невязкого) обтекания тела, $R(x)$ – радиус тела вращения. Касательные напряжения, возникающие между слоями жидкости, равны: $\tau_{xy}=\mu_\Sigma(\partial V_x/\partial y)$, $\tau_{zy}=\mu_\Sigma(\partial V_z/\partial y)$. Учитывая турбулентный характер пограничного слоя, с помощью модели турбулентной вязкости Себиси-Смита запишем суммарную динамическая вязкость:

$\mu_\Sigma=\mu+\mu_t$,

где μ – молекулярная вязкость, μ_t – турбулентная вязкость.

Прилипание жидкости к телу вращения, а также известное невязкое обтекание определяют граничные условия:

$$\text{при } y=0:\quad V_x=V_y=0,\quad V_z=R\omega;\qquad \text{при } y=y_e\quad V_x=U(x),\quad V_z=0; \quad (2)$$

где y_e – толщина пограничного слоя.

Удовлетворим первое уравнение системы (1), используя функцию тока $\psi(x,y): V_x = \frac{1}{R}\frac{\partial\psi}{\partial y},\ V_y = -\frac{1}{R}\frac{\partial\psi}{\partial x}$, и перейдем к безразмерному виду, вводя переменную типа переменой Блазиуса: $\eta = y\sqrt{U/\nu x}$. Течение жидкости в пограничном слое может быть описано безразмерными функциями $f(x,\eta),\ g(x,\eta)$:

$$\psi = R\sqrt{\nu x U}\, f \qquad \left[\text{тогда } V_x(x,\eta) = Uf_\eta\right], \qquad V_z = \omega R g$$

и их производными

$$u = f_\eta, \qquad v = f_{\eta\eta}, \qquad p = g_\eta. \tag{3}$$

В результате перехода к безразмерному виду (3) с учетом обращения первого уравнения неразрывности в тождество система (1)-(2) примет вид:

$$\left.\begin{aligned} &bv_\eta + m_1 fv + m_2\left(1-u^2\right) + m_3\Omega^2 g^2 = x\left(uu_x - vf_x\right) \\ &bp_\eta + m_1 fp - 2m_1 ug = x\left(ug_x - pf_x\right) \end{aligned}\right\} \tag{4}$$

с граничными условиями:

$$\text{при } \eta = 0:\ f = 0,\ u = 0,\ g = 1; \quad \text{при } \eta = \eta_e:\ u = 1,\ g = 0 \tag{5}$$

и коэффициентами:

$$b = 1 + \varepsilon_m^+, \quad m_1 = m_3 + \frac{m_2 + 1}{2}, \quad m_2 = \frac{U'}{U}x, \quad m_3 = \frac{R'}{R}x, \quad \Omega = \frac{\omega R}{U}.$$

Коэффициент турбулентной вязкости ε_m^+ в случае ламинарного пограничного слоя равен нулю. При расчете турбулентного пограничного слоя коэффициент ε_m^+ считается отдельно для внутренней (пристенной) $\varepsilon_{m\,i}^+$ и внешней $\varepsilon_{m\,o}^+$ областей пограничного слоя [2], причем внешняя область пограничного слоя $\varepsilon_m^+ = \varepsilon_{m\,o}^+$ начинается с момента превышения $\varepsilon_{m\,i}^+$ над $\varepsilon_{m\,o}^+$ (рис. 2):

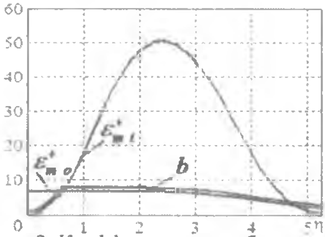

Рис. 2. Коэффициенты турбулентной вязкости при обтекании шара

$$\left(\begin{aligned} &x = 0.4\,м,\ R_{шара} = 1\,м,\ \omega = 10\,c^{-1}, \\ &U_\infty = 40\,м/c,\ \nu = 1.5\cdot 10^{-5}\,м^2/c \end{aligned}\right)$$

$$\varepsilon_{m\,i}^+ = 0{,}16\eta^2\left[1 - \exp\left(-\frac{y}{A}\right)\right]^2 \sqrt{\mathrm{Re}_x}\sqrt{v^2 + \Omega^2 p^2}\,\gamma_{tr}\gamma,$$

$$\varepsilon_{m\,o}^+ = 0{,}0168\sqrt{\mathrm{Re}_x}\left|\eta_e - f_e\right|\gamma\gamma_{tr}.$$

где $\frac{y}{A} = \frac{\eta N}{26}(\mathrm{Re}_x)^{\frac{1}{4}} S$, $N = \left(1 - 11{,}8p^+\right)^{\frac{1}{2}}$, $p^+ = (\mathrm{Re}_x)^{-\frac{1}{4}} m_2 S$, $S = \left(\sqrt{v^2 + \Omega^2 p^2}\right)\Big|_{\eta=0}$, $\mathrm{Re}_x = \frac{Ux}{\nu}$,

$$\gamma = \left[1 + 5{,}5\left(\frac{\eta}{\eta_e}\right)^6\right]^{-1}, \quad \gamma_{tr} = 1 - \exp\left[-G_{tr}\left(x - x_{tr}\right)\int_{x_{tr}}^{x}\frac{dx}{U}\right], \quad G_{tr} = 8{,}33\cdot 10^{-4}\frac{U}{x^2}(\mathrm{Re}_x)^{0{,}66}$$

Систему уравнений в частных производных (3)-(5) решим методом сеток, используя конечно-разностную схему "прямоугольник" [2]:

$$h_j^{-1}\left(f_j^n - f_{j-1}^n\right) = u_{j-1/2}^n, \qquad h_j^{-1}\left(u_j^n - u_{j-1}^n\right) = v_{j-1/2}^n, \qquad h_j^{-1}\left(g_j^n - g_{j-1}^n\right) = p_{j-1/2}^n;$$

$$h_j^{-1}\left(b_j^n v_j^n - b_{j-1}^n v_{j-1}^n\right) + \left(m_1^n + \alpha_n\right)\left(fv\right)_{j-1/2}^n - \left(m_2^n + \alpha_n\right)\left(u^2\right)_{j-1/2}^n + m_3^n\left(\Omega^2\right)^n\left(g^2\right)_{j-1/2}^n +$$
$$+ \alpha_n\left(v_{j-1/2}^{n-1} f_{j-1/2}^n - f_{j-1/2}^{n-1} v_{j-1/2}^n\right) = R_{j-1/2}^{n-1}, \tag{6}$$
$$h_j^{-1}\left(b_j^n p_j^n - b_{j-1}^n p_{j-1}^n\right) + \left(m_1^n + \alpha_n\right)\left(fp\right)_{j-1/2}^n - 2m_3^n u^n g_{j-1/2}^n - \alpha_n\Big[\left(ug\right)_{j-1/2}^n + u_{j-1/2}^{n-1} g_{j-1/2}^n -$$
$$- g_{j-1/2}^{n-1} u_{j-1/2}^n + f_{j-1/2}^{n-1} p_{j-1/2}^n - p_{j-1/2}^{n-1} f_{j-1/2}^n\Big] = T_{j-1/2}^{n-1},$$

где $R_{j-1/2}^{n-1} = -L_{j-1/2}^{n-1} + \alpha_n\left[\left(fv\right)_{j-1/2}^{n-1} - \left(u^2\right)_{j-1/2}^{n-1}\right] - m_2^n,$

$$L_{j-1/2}^{n-1} = \left\{h_j^{-1}\left(b_j v_j - b_{j-1} v_{j-1}\right) + m_1\left(fv\right)_{j-1/2} + m_2\left[1 - \left(u^2\right)_{j-1/2}\right] + m_3\Omega^2\left(g^2\right)_{j-1/2}\right\}^{n-1};$$

$$T_{j-1/2}^{n-1} = -M_{j-1/2}^{n-1} + \alpha_n\left[\left(fp\right)_{j-1/2}^{n-1} - \left(ug\right)_{j-1/2}^{n-1}\right], \quad M_{j-1/2}^{n-1} = \left\{h_j^{-1}\left(b_j p_j - b_{j-1} p_{j-1}\right) + m_1\left(fp\right)_{j-1/2} - 2m_3 ug_{j-1/2}\right\}^{n}$$

Нелинейные уравнения (6) решим с помощью метода последовательных приближений Ньютона. В результате замены

$$f_j^{i+1} = f_j^i + \delta f_j^i, \quad u_j^{i+1} = u_j^i + \delta u_j^i, \quad v_j^{i+1} = v_j^i + \delta v_j^i, \quad g_j^{i+1} = g_j^i + \delta g_j^i, \quad p_j^{i+1} = p_j^i + \delta p_j^i$$

линеаризуем (6), пренебрегая приращениями выше первого порядка малости:

$$\delta f_j - \delta f_{j-1} - \frac{h_j}{2}\left(\delta u_j + \delta u_{j-1}\right) = \left(r_1\right)_j, \ \delta u_j - \delta u_{j-1} - \frac{h_j}{2}\left(\delta v_j + \delta v_{j-1}\right) = \left(r_4\right)_{j-1}, \ \delta g_j - \delta g_{j-1} - \frac{h_j}{2}\left(\delta p_j + \delta p_{j-1}\right) = ($$
$$\left(s_1\right)_j \delta v_j + \left(s_2\right)_j \delta v_{j-1} + \left(s_3\right)_j \delta f_j + \left(s_4\right)_j \delta f_{j-1} + \left(s_5\right)_j \delta u_j + \left(s_6\right)_j \delta u_{j-1} + \left(s_7\right)_j \delta g_j + \left(s_8\right)_j \delta g_{j-1} = \left(r_2\right)_j, \tag{7}$$
$$\left(\beta_1\right)\delta p_j + \left(\beta_2\right)\delta p_{j-1} + \left(\beta_3\right)\delta f_j + \left(\beta_4\right)\delta f_{j-1} + \left(\beta_5\right)\delta u_j + \left(\beta_6\right)\delta u_{j-1} + \left(\beta_7\right)\delta g_j + \left(\beta_8\right)\delta g_{j-1} + \left(\beta_9\right)\delta v_j +$$
$$+ \left(\beta_{10}\right)\delta v_{j-1} = \left(r_3\right)_j,$$

где $\left(r_1\right)_j = f_{j-1}^i - f_j^i + h_j u_{j-1/2}^i, \qquad \left(r_4\right)_{j-1} = u_{j-1}^i - u_j^i + h_j v_{j-1/2}^i; \qquad \left(r_5\right)_{j-1} = g_{j-1}^i - g_j^i + h_j p_{j-1/2}^i;$

$$\left(r_2\right)_j = R_{j-1/2}^{n-1} - \Big[h_j^{-1}\left(b_j^i v_j^i - b_{j-1}^i v_{j-1}^i\right) + \left(m_1^n + \alpha_n\right)\left(fv\right)_{j-1/2}^i - \left(m_2^n + \alpha_n\right)\left(u^2\right)_{j-1/2}^i + m_3^n\left(\Omega^2\right)^n\left(g^2\right)_{j-1/2}^i +$$
$$+ \alpha_n\left(v_{j-1/2}^{n-1} f_{j-1/2}^i - f_{j-1/2}^{n-1} v_{j-1/2}^i\right)\Big];$$
$$\left(r_3\right)_j = T_{j-1/2}^{n-1} - \Big[h_j^{-1}\left(b_j^i p_j^i - b_{j-1}^i p_{j-1}^i\right) + \left(m_1^n + \alpha_n\right)\left(fp\right)_{j-1/2}^i - \left(2m_3^n + \alpha_n\right)\left(ug\right)_{j-1/2}^i - \alpha_n\Big(u_{j-1/2}^{n-1} g_{j-1/2}^i - g_{j-1/2}^{n-1} u_{j-1/2}^i + f_{j-1/2}^{n-1} p_{j-1/2}^i -$$
$$- p_{j-1/2}^{n-1} f_{j-1/2}^i\Big)\Big];$$

$$\left(s_1\right)_j = h_j^{-1} b_j^i + \frac{m_1^n + \alpha_n}{2} f_j^i - \frac{\alpha_n}{2} f_{j-1/2}^{n-1}, \qquad \left(s_2\right)_j = -h_j^{-1} b_{j-1}^i + \frac{m_1^n + \alpha_n}{2} f_{j-1}^i - \frac{\alpha_n}{2} f_{j-1/2}^{n-1}, \qquad \left(s_3\right)_j = \frac{m_1^n + \alpha_n}{2} v_j^i + \frac{\alpha_n}{2}$$
$$\left(s_4\right)_j = \frac{m_1^n + \alpha_n}{2} v_{j-1}^i + \frac{\alpha_n}{2} v_{j-1/2}^{n-1}, \ \left(s_5\right)_j = -\left(m_2^n + \alpha_n\right)u_j^i, \ \left(s_6\right)_j = -\left(m_2^n + \alpha_n\right)u_{j-1}^i, \ \left(s_7\right)_j = m_3^n\left(\Omega^2\right)g_j^i, \left(s_8\right)_j = m_3^n\left(\Omega^2\right.$$

$$(\beta_1)_j = h_j^{-1}b_j^i + \frac{m_1^n+\alpha_n}{2} f_j^i - \frac{\alpha_n}{2} f_{j-1/2}^{n-1}, \quad (\beta_2)_j = -h_j^{-1}b_{j-1}^i + \frac{m_1^n+\alpha_n}{2} f_{j-1}^i - \frac{\alpha_n}{2} f_{j-1/2}^{n-1}, \quad (\beta_3)_j = \frac{m_1^n+\alpha_n}{2} p_j^i + \frac{\alpha_n}{2} p_{j-1/2}^{n-1},$$

$$(\beta_4)_j = \frac{m_1^n+\alpha_n}{2} p_{j-1}^i + \frac{\alpha_n}{2} p_{j-1/2}^{n-1}, \quad (\beta_5)_j = -\frac{\alpha_n+2m_1^n}{2} g_j^i + \frac{\alpha_n}{2} g_{j-1/2}^{n-1}, \quad (\beta_6)_j = -\frac{\alpha_n+2m_1^n}{2} g_{j-1}^i + \frac{\alpha_n}{2} g_{j-1/2}^{n-1},$$

$$(\beta_7)_j = -\frac{\alpha_n+2m_1^n}{2} u_j^i - \frac{\alpha_n}{2} u_{j-1/2}^{n-1}, \quad (\beta_8)_j = -\frac{\alpha_n+2m_1^n}{2} u_{j-1}^i - \frac{\alpha_n}{2} u_{j-1/2}^{n-1}, \quad (\beta_9)_j = 0, \quad (\beta_{10})_j = 0.$$

Система линейных уравнений (7) позволяет последовательно находить приближения величин следующего слоя сетки по их значениям на предыдущем слое. Такой подход не применим к первому слою. Поэтому зададимся в качестве его начального приближения аппроксимацией многочленами начального профиля скоростей и напряжений, удовлетворяющими граничным условиям (5),

$$f_j = \frac{\eta_e}{4}\left(\frac{\eta_j}{\eta_e}\right)^2\left[3-\frac{1}{2}\left(\frac{\eta_j}{\eta_e}\right)^2\right], \qquad u_j = \frac{3}{2}\frac{\eta_j}{\eta_e} - \frac{1}{2}\left(\frac{\eta_j}{\eta_e}\right)^3, \qquad v_j = \frac{3}{2}\frac{1}{\eta_e}\left[1-\left(\frac{\eta_j}{\eta_e}\right)^2\right],$$

$$g_j = 1-u_j, \qquad p_j = -v_j$$

Постоянство граничных условий (5) по координате x позволяет ограничиться требованием их неизменности при выполнении последовательных приближений:

$$\delta f_0 = 0, \qquad \delta u_0 = 0, \qquad \delta g_0 = 0, \qquad \delta u_J = 0, \qquad \delta g_J = 0.$$

Матрица правых частей системы (7), записанной для всех точек поперек пограничного слоя, на каждой итерации имеет блочно-диагональный вид. Решение таких систем удобнее проводить методом матричной прогонки.

Предложенная модель описания пограничного слоя реализована в среде MatLab 7.0 программой Vertel. Необходимо отметить, что в ходе расчета пограничного слоя программа Vertel анализирует основные возможности выхода решения за рамки использованных допущений. Так, при равенстве нулю касательных напряжений на границе тела программа сигнализирует о нахождении точки отрыва потока и прекращает дальнейшие вычисления. Ограничение числа итераций в методе последовательных приближений позволяет предотвратить исключительные ситуации при вырождении матриц коэффициентов вблизи точки отрыва потока.

Результаты тестового решения в случае турбулентного обтекания невращающегося цилиндра большого радиуса сравнивались с имеющимися характеристиками турбулентного обтекания пластины [3]. Коэффициент местного сопротивления для пластины, с учетом ее двустороннего обтекания, равен

$$c_f = 2\cdot 0,0576\left(\mathrm{Re}_x\right)^{-1/5}, \qquad \text{где } \mathrm{Re}_x = U_\infty x/\nu . \qquad (8)$$

Коэффициент c_f можно определить и с помощью программы Vertel:

$$c_f = \frac{\tau_0}{\frac{1}{2}\rho U_\infty^2} = \frac{2f''\big|_{\eta=0}}{\sqrt{\mathrm{Re}_x}} = \frac{2v_0}{\sqrt{\mathrm{Re}_x}}. \qquad (9)$$

Вычисления, проводимые согласно (8) и (9), дают хорошее соответствие.

Программа Vertel позволяет определять характеристики пограничного слоя при обтекании различных осесимметричных тел. Сравним турбулентный и ламинарный пограничный слой при обтекании вращающегося шара (рис. 3), для которого

$$U = \frac{3}{2}U_\infty \sin\theta, \qquad R = R_{шара}\sin\theta.$$

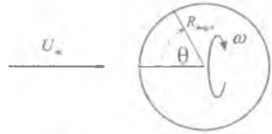

Рис. 3. Схема обтекания вращающегося шара

Обозначенные далее на графиках максимальная скорость вращения поверхности шара V_m и число Рейнольдса Re равны:

$$V_m = \omega R_{шара}, \qquad \mathrm{Re} = 2R_{шара}U_\infty/\nu.$$

При числах Рейнольдса $\mathrm{Re} = 1{,}3\cdot 10^6$ возможно существование как ламинарного, так и турбулентного пограничных слоев. Профили скорости при различных характерах обтекания представлены на рис. 4.

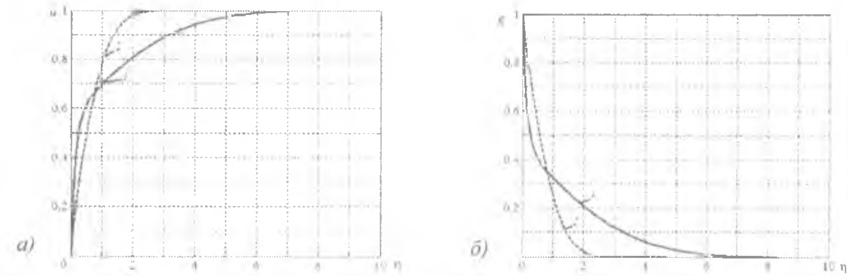

Рис. 4. Распределение скорости в осевом (а) и окружном (б) направлениях при турбулентном (1) и ламинарном (2) обтекании вращающегося шара
$\left(\theta = 70^0, R_{шара} = 1м, U_\infty = 10м/с, \omega = 10с^{-1}, \nu = 1{,}5\cdot 10^{-5}м^2/с\right)$

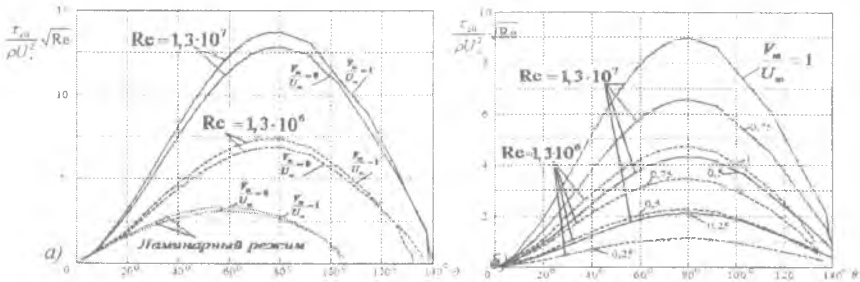

Рис. 5. Касательное напряжение на поверхности вращающегося шара
в осевом (а) и окружном (б) направлениях при турбулентном обтекании

Увеличение числа Re на порядок приводит к изменению касательных напряжений примерно в два раза (рис. 5). Такое же двукратное увеличение можно наблюдать при смене характера пограничного слоя на турбулентный при неизменном числе Рейнольдса $\mathrm{Re} = 1{,}3 \cdot 10^6$ (рис. 5, а).

Положение точки отрыва потока определяется условием равенства нулю касательного напряжения на поверхности шара (рис. 6). Полученные результаты хорошо согласуются с замерами Лутандера-Ридберга [1].

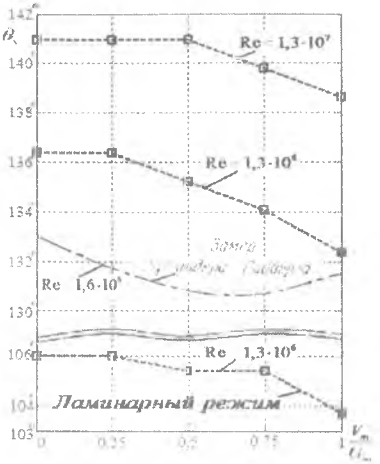

Рис. 6. Положение точки отрыва потока

Отрыв потока при ламинарном режиме происходит при $\theta_s \approx 106^0$. Положение точки отрыва потока при турбулентном режиме существенно смещается вниз по потоку (рис. 6). При увеличении угловой скорости вращения шара имеет место малое смещение точки отрыва потока вперед как при ламинарном, так и при турбулентном режиме течения.

Увеличение скорости вращения осесимметричного тела изменяет не только положение точки отрыва потока, но и влияет на характер профилей скорости его продольного обтекания. При скорости вращения поверхности тела, не превышающей скорости его продольного обтекания, скорость слоев жидкости монотонно возрастает до значения на внешней границе (рис. 4). Быстрое вращение осесимметричного тела приводит к "вентиляторному" эффекту – превышению скорости течения внутренних слоев жидкости пограничного слоя над скоростью невязкого обтекания тела. На рис. 7 представлены продольные проекции скорости на направление внешнего потока при турбулентном и ламинарном режиме. Пограничный слой при турбулентном режиме имеет большую толщину, и "вентиляторый" эффект быстрее затухает при смещении вниз по потоку.

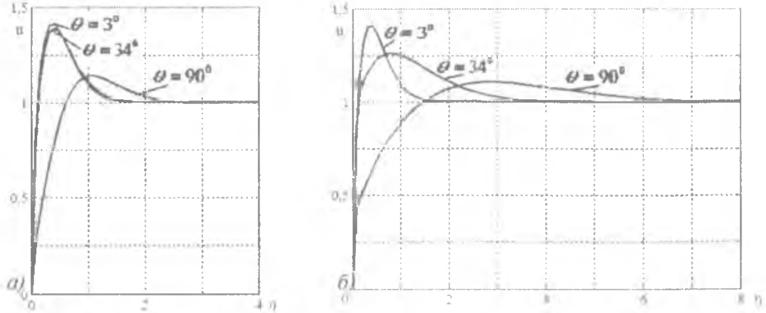

Рис. 7. Профили продольной проекции скорости при "вентиляторном" эффекте

а) ламинарный, б) турбулентный режимы, $V_m / U_\infty = 10, \mathrm{Re} = 1{,}3 \cdot 10^6$

Библиографический список

1. Дорфман Л.А. Гидродинамическое сопротивление и теплоотдача вращающихся тел. М.: Физматлит. 1960.
2. Себиси Т., Брэдшоу П. Конвективный теплообмен. М.: Мир 1987.
3. Шлихтинг Г. Теория пограничного слоя. М.: Наука. 1969.