УДК 629.78:531.1

Ю.А.Соллогуб

СПОСОБ ОПРЕДЕЛЕНИЯ КВАТЕРНИОНА ВЗАИМНОГО ПОЛОЖЕНИЯ СИСТЕМ КООРДИНАТ ПО ИЗВЕСТНЫМ ПРОЕКЦИЯМ ДВУХ ВЕКТОРОВ

Для определения ориентации ЛА в инерциальной системе координат (ИСК) по двум астроориентирам, визируемым астродатчиками, необходимо решить задачу определения взаимного положения двух систем координат по известным проекциям двух неколлинеарных векторов в этих системах координат.

Эта задача традиционно решается путем построения матрицы направляющих косинусов (МНК), определяющей переход от проекций вектора в одной системе координат к его проекциям в другой системе /1/.

В системе управления угловым движением, использующей аппарат алгебры кватернионов /2/, ориентация ЛА задается в форме кватерниона ориентации, под которым понимается кватернион поворота, переводящего орты ИСК в одноименные орты связанной системы координат (ССК) ЛА. В этом случае элементы кватерниона ориентации вычисляются по элементам МНК /2/.

Существует, однако, возможность определения кватерниона ориентации более коротким путем, без построения МНК и последующего преобразования параметров ориентации из матричной в кватернионную форму.

Пусть x и y - единичные вектора, задающие направления на два астроориентира, x_i и y_i $(i=1,2,3)$ - их координаты в ИСК, а x_i' и y_i' $(i=1,2,3)$ - координаты в ССК (координаты астроориентиров в ИСК и ССК предполагаются известными). Обозначим орты ИСК и ССК соответственно как $\bar{e}_i$ и $\bar{e}_i'$ $(i=1,2,3)$. Пусть, далее, $Л$ - кватернион ориентации ССК относительно ИСК. Тогда справедливы равенства:

$$\bar{x} = \sum_{i=1}^{3} x_i \bar{e}_i = \sum_{i=1}^{3} x_i' \bar{e}_i' , \qquad (1)$$

$$\bar{e}_i' = Л \cdot \bar{e}_i \cdot \tilde{Л} . \qquad (2)$$

Подставив $\bar{e}_i'$ из (2) в (1), получим:

$$\bar{x} = \sum_{i=1}^{3} x_i (Л \cdot \bar{e}_i \cdot \tilde{Л}) = Л \cdot \Big(\sum_{i=1}^{3} x_i' \bar{e}_i \Big) \cdot \tilde{Л} .$$

Введя обозначение

$$\bar{x}' = \sum_{i=1}^{3} x_i' \, \bar{e}_i \ ,$$

получаем:

$$\bar{x} = Л \cdot \bar{x}' \cdot \tilde{Л} \ .$$

Аналогично для вектора y имеем:

$$\bar{y} = Л \cdot \bar{y}' \cdot \tilde{Л} \ , \qquad \bar{y}' = \sum_{i=1}^{3} y_i' \, \bar{e}_i .$$

Таким образом, кватернион Л описывает поворот, переводящий некоторые вектора $\bar{x}'$ и $\bar{y}'$ в $\bar{x}$ и $\bar{y}$ соответственно, причем $\bar{x}'$ и $\bar{y}'$ таковы, что их координаты в ИСК численно равны координатам $\bar{x}$ и $\bar{y}$ (т.е. координатам астроориентиров) в ССК.

Построим пары ортогональных единичных векторов (предполагается, что $\bar{x}$ и y неколлинеарны):

$$\bar{u} = (\bar{x}+\bar{y})/|\bar{x}+\bar{y}| , \quad \bar{w} = (\bar{x}-\bar{y})/|\bar{x}-\bar{y}| ,$$

$$\bar{u}' = (\bar{x}'+\bar{y}')/|\bar{x}'+\bar{y}'| , \quad \bar{w}' = (\bar{x}'-\bar{y}')/|\bar{x}'-\bar{y}'| .$$

Легко видеть, что

$$\bar{u} = Л \cdot \bar{u}' \cdot \tilde{Л}, \qquad \bar{w} = Л \cdot \bar{w}' \cdot \tilde{Л}.$$

Теперь задача определения ориентации сводится к построению кватерниона поворота, переводящего вектора $\bar{u}'$ и $\bar{w}'$ в $\bar{u}$ и $\bar{w}$ соответственно.

Искомый поворот построим в два этапа. Вначале совершим поворот, переводящий $\bar{u}'$ в $\bar{u}$ (а $\bar{w}'$ – в некоторый $\bar{w}''$), затем совершим поворот вокруг $\bar{u}$ для совмещения $\bar{w}''$ с $\bar{w}$.

Из множества поворотов, совмещающих $\bar{u}'$ с $\bar{u}$, выберем тот, что совершается вокруг оси, перпендикулярной обоим совмещаемым векторам. Наш выбор является в достаточной степени произвольным и определяется лишь простотой построения соответствующего кватерниона поворота $Л_1$, который запишется следующим образом:

$$Л_1 = \cos(\varphi_1/2) + \bar{\gamma}_1 \sin(\varphi_1/2),$$

$$\varphi_1 = \arccos(\bar{u}' \cdot \bar{u}), \tag{3}$$

$$\bar{\gamma}_1 = (\bar{u}' \times \bar{u}) / |\bar{u}' \times \bar{u}| = (\bar{u}' \times \bar{u}) / \sin \varphi_1 .$$

Здесь φ_1 - угол поворота, равный углу между $\bar{u}'$ и $\bar{u}$, а $\bar{\gamma}_1$ - единичный вектор, задающий ось поворота.

Определим положение вектора $\bar{w}'$ после поворота:

$$\bar{w}'' = Л_1 \cdot \bar{w}' \circ \tilde{Л}_1 .$$

Определим далее кватернион $Л_2$ поворота вокруг $\bar{u}$, совмещающего $\bar{w}''$ с $\bar{w}$:

$$Л_2 = \cos(\varphi_2/2) + \bar{\gamma}_2 \sin(\varphi_2/2),$$

$$\varphi_2 = \begin{cases} \arccos(\bar{w}'' \cdot \bar{w}), & (\bar{w}'' \cdot \bar{w}) \geq 0, \\ 2\pi - \arccos(\bar{w}'' \cdot \bar{w}), & (\bar{w}'' \cdot \bar{w}) < 0, \end{cases} \qquad (4)$$

Здесь φ_2 - угол поворота.

Отметим, что возможен другой вариант вычисления $Л_2$, формально аналогичный (3):

$$Л_2 = \cos(\varphi_2/2) + \bar{\gamma}_2 \sin(\varphi_2/2),$$

$$\varphi_2 = \arccos(\bar{w}'' \cdot \bar{w}), \qquad (5)$$

$$\bar{\gamma}_2 = (\bar{w}'' \times \bar{w}) / |\bar{w}'' \times \bar{w}| = (\bar{w}'' \times \bar{w}) / \sin \varphi_2 .$$

Оба кватерниона последовательных поворотов $Л_1$ и $Л_2$ в (3), (4) и (5) выражены в проекции на ИСК. В силу этого кватернион $Л$ результирующего поворота, переводящего $\bar{u}'$ и $\bar{w}'$ в $\bar{u}$ и $\bar{w}$, определяется выражением:

$$Л = Л_2 \cdot Л_1 .$$

Это и есть искомый кватернион ориентации.

Отметим, что соотношения для расчета кватерниона поворота вида (3) или (5) допускают существенное упрощение, освобождающее от необходимости вычисления функций $\arcsin x$, $\sin x$, $\cos x$ ценою вычисления одного квадратного корня, а также избавляющее от ряда трудностей, связанных с наличием синуса угла между векторами в знаменателе выражения для вектора поворота. В самом деле, преобразуя соотношение (3) с учетом равенств

$$\sin \varphi = 2 \sin(\varphi/2) \cos(\varphi/2),$$

$$\cos(\varphi/2) = \sqrt{(1+\cos\ )/2} \quad (0 < \varphi < \pi),$$

получим:

$$Л_1 = s_1 + (\bar{u}' \times \bar{u})/2s_1 \qquad (6)$$

$$s_1 = \sqrt{(1+\bar{u}' \times \bar{u})/2}\ .$$

Здесь s_1 - скалярная часть кватерниона $Л_1$.

Соотношения вида (6) имеют лишь одну особую точку, соответствующую случаю, когда $\bar{u}'=-\bar{u}$. Реализация описанного способа определения ориентации должна предусматривать алгоритмическую защиту в области этой особой точки. Защита может осуществляться как путем выбора для работы соответствующих астроориентиров, так и путем искусственного формирования кватерниона, поворачивающего вектор на 180 градусов вокруг произвольной оси.

Описанный способ определения кватерниона ориентации позволяет существенно сократить затраты вычислительных ресурсов по сравнению с традиционным способом, основанным на построении матрицы направляющих косинусов. Использованный подход к построению кватернионов поворота и ориентации находит применение также при решении задач одноосной ориентации, в частности, задачи ориентации ЛА на Солнце по информации с датчиков Солнца либо по информации о положении Солнца в ИСК.

Список литературы

1. Кавинов И.Ф. Инерциальная навигация в околоземном пространстве. - М.: Машиностроение, 1988.

2. Бранец В.Н., Шмыглевский И.П. Применение кватернионов в задачах ориентации твердого тела. - М.: Наука, 1973.