

РЕШЕНИЕ НЕСТАЦИОНАРНЫХ ЗАДАЧ НЕСЖИМАЕМОГО ДВУМЕРНОГО ПОГРАНИЧНОГО СЛОЯ МЕТОДОМ СЕБИСИ

В настоящее время на практике достаточно часто приходится сталкиваться с необходимостью решения нестационарных задач двумерного пограничного слоя. Обычно получить точное решение таких задач практически невозможно. Поэтому для решения подобного класса задач используются различные приближённые методы. В последнее время, в связи со значительным развитием компьютерной техники, предпочтение отдаётся конечно-разностным методам, алгоритмы которых наиболее пригодны для программирования и позволяют получить решение за относительно короткое время.

В работе рассматривается возможность применения метода Себиси для решения нестационарных задач несжимаемого двумерного пограничного слоя [1, 2].

Система уравнений для несжимаемого двумерного пограничного слоя, в общем случае, может быть записана следующим образом [2, 3]:

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial u}{\partial t} + u \frac{\partial u}{\partial x} + v \frac{\partial u}{\partial y} &= \frac{\partial U_e}{\partial t} + U_e \frac{\partial U_e}{\partial x} + \nu \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} - \frac{\partial}{\partial y} \overline{u'v'} \\ \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} &= 0. \end{aligned} \right\} \quad (1)$$

При этом граничные условия имеют вид:

$$\left. \begin{aligned} u = v = 0 & \quad \text{при } y = 0; \\ u \rightarrow U_e & \quad \text{при } y \rightarrow \infty. \end{aligned} \right\} \quad (2)$$

где u , v – продольная и поперечная компоненты скорости, x , y – декартовы координаты, U_e – скорость на внешней границе пограничного слоя, t – время, ν – кинематический коэффициент вязкости.

При этом касательное напряжение $-\overline{u'v'}$ может быть заменено в (1) соотношением:

$$-\overline{u'v'} = \varepsilon_m \frac{\partial u}{\partial y}, \quad (3)$$

где ε_m – коэффициент турбулентной кинематической вязкости. Данное соотношение используется для того, чтобы в дальнейшем можно было применять модель турбулентности Себиси-Смита.

Для использования метода Себиси, который в свою очередь основывается на неявном методе Келлера (схема «прямоугольник»), вводятся следующие переменные:

$$\eta = \sqrt{\frac{U_0(x)}{ix}} y, \quad \psi = \sqrt{(ixU_0)} f(x, \eta, t), \quad (4)$$

где $f(x, \eta, t)$ – безразмерная функция тока, а $U_0(x)$ – некоторая функция, зависящая только от x . Тогда уравнение неразрывности в системе (1) тождественно удовлетворяется, если функция тока ψ определяется соотношением:

$$u = \frac{\partial \psi}{\partial y}, \quad v = -\frac{\partial \psi}{\partial x}. \quad (5)$$

Используя правило дифференцирования сложной функции и соотношения (4) (5), уравнение движения в системе (1) можно представить в следующей форме (штрихом обозначено дифференцирование по η):

$$(bf'')' + \frac{m+1}{2} ff'' - m(f')^2 + m_1 = x \left(f' \frac{\partial f'}{\partial x} - f'' \frac{\partial f}{\partial x} + \frac{1}{U_0} \frac{\partial f'}{\partial t} \right), \quad (6)$$

где

$$f' = \frac{u}{U_0}, \quad m = \frac{x}{U_0} \frac{dU_0}{dx}, \quad m_1 = \frac{x}{U_0^2} \left(U_0 \frac{\partial U_0}{\partial x} + \frac{\partial U_0}{\partial t} \right), \quad b = 1 + \frac{\varepsilon_m}{\nu}$$

При этом граничные условия (2) примут вид:

$$\left. \begin{aligned} f = f' = 0 & \quad \text{при } \eta = 0; \\ f' = U_\infty / U_0 & \quad \text{при } \eta \rightarrow \eta_\infty \end{aligned} \right\} \quad (7)$$

Решение уравнения (6) с граничными условиями (7) осуществляется конечно-разностным методом Себиси в четыре этапа:

1. Уравнение (6) заменяется системой дифференциальных уравнений первого порядка (для этого вводятся новые переменные).
2. Дифференциальные уравнения заменяются конечно-разностными с использованием формул центральных разностей.
3. Полученная система нелинейных конечно-разностных уравнений линеаризуется помощью метода Ньютона и записывается в векторно-матричном виде.
4. Система линейных уравнений решается методом матричной прогонки.

Более подробно метод Себиси рассмотрен в работах [1, 2]. На основе данного метода была разработана программа в среде программирования Delphi для решения нестационарных задач несжимаемого двумерного пограничного слоя. Программа позволяет получить решение уравнения (6) с граничными условиями (7) и ряд характеристик

пограничного слоя, в том числе местный коэффициент сопротивления трения c_f и толщину вытеснения δ^* .

В качестве тестовых задач для проверки работоспособности метода Себиси и программы были рассмотрены следующие стационарные задачи:

1. Исследование пограничного слоя на плоской пластине, обтекаемой в продольном направлении.
2. Обтекание круглого цилиндра в продольном направлении.

Полученные решения данных задач хорошо согласуются с приближёнными решениями, приведёнными в работах Г. Шлихтинга и Л.Г. Лойцянского [3, 4], что подтверждает правильность работы алгоритма и программы. Так, например, в случае обтекания круглого цилиндра отрыв наблюдается в точке равной примерно 105° , а в работе [Шлихтинга [3] отрыв достигается в точке $104,5^\circ$.

Кроме того, для случая ламинарного нестационарного пограничного слоя была рассмотрена задача обтекания движущегося круглого цилиндра радиуса R , причём скорость U_∞ на внешней границе пограничного слоя определялась формулой: $U_\infty(x, t) = 2U_\infty \sin(x/R)$. Для случая как ламинарного, так и турбулентного течения была рассмотрена задача продольного обтекания профиля крыла NACA 0012 для нулевого угла атаки, где $U_\infty(x, t) = U_\infty(x)(1 + B \cos(\omega t))$, B - амплитуда, ω - угловая частота. Примеры полученных результатов для профиля крыла NACA 0012 представлены на рис. 1 и 2.

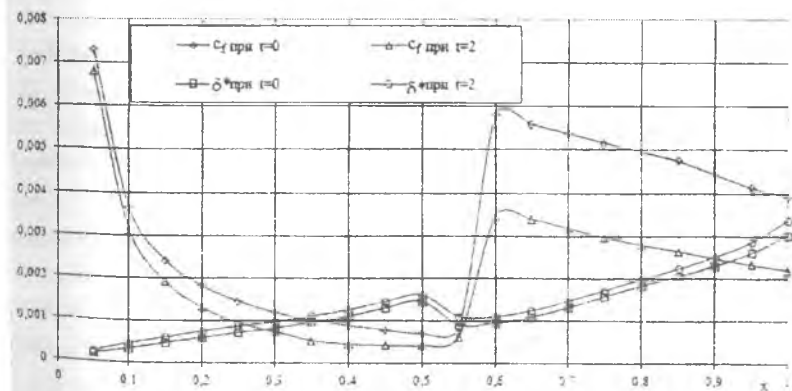


Рис. 1. Изменение местного коэффициента сопротивления трения и толщины вытеснения пограничного слоя в различные моменты времени для профиля крыла NACA 0012

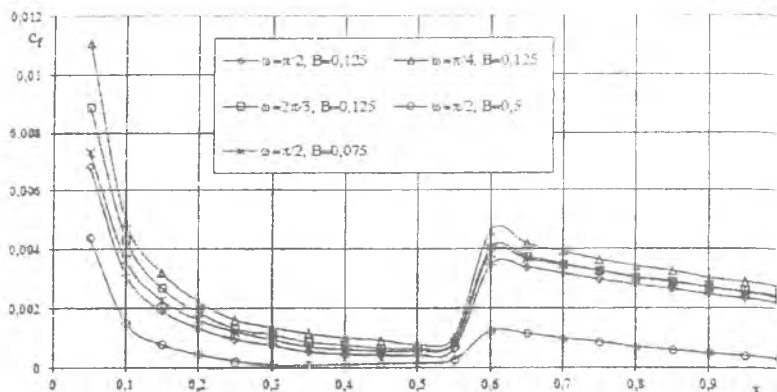


Рис. 2. Изменение местного коэффициента сопротивления трения для профиля крыла NASA 0012 при $t = 2$

Графики на рис. 1 соответствуют результатам, полученным Себиси [1], что подтверждает правильность работы алгоритма и программы. На рис. 2 приведены результаты расчётов изменения местного коэффициента сопротивления трения при различных значениях амплитуды и угловой частоты.

Библиографический список

1. Sebeci T. Computational Fluid Dynamics for Engineers [Текст]/Т. Себеси, J. P. Shah, F. Kafyucke, E. Laurendeau. – California: Horizons Publishing Inc., 2005. – 396 с.
2. Себиси Т. Конвективный теплообмен [Текст]/Т. Себиси, П. Брэдшоу. – М.: Мир, 1987. – 592 с.
3. Шлихтинг Г. Теория пограничного слоя [Текст]/Г. Шлихтинг. – М.: Наука, 1974. – 712 с.
4. Лойцянский Л. Г. Ламинарный пограничный слой [Текст]/Л. Г. Лойцянский. – М.: Государственное издательство физико-математической литературы, 1962. – 478 с.