УДК 629 78

Ишков С.А., Храмов А.А.

РАСЧЕТ МАНЕВРОВ КОРРЕКЦИИ СЛАБОЭЛЛИПТИЧЕСКИХ ОРБИТ С ДВИГАТЕЛЕМ МАЛОЙ ТЯГИ

1. Математическая модель движения

Рассматривается задача плоской коррекции слабоэллиптической орбиты (большой полуоси, эксцентриситета и аргумента перигея) с помощью двигателя малой тяги (ДМТ). Управление движением центра масс космического аппарата (КА) осуществляется с помощью последовательности чередующихся активных и пассивных участков полета. На активных участках реализуется включение нерегулируемого ДМТ, создающего постоянную по величине тягу, вектор которой ориентируется вдоль трансверсали в положительном или отрицательном направлении. Структура управления на витке включает два активных участка, с трансверсальным ускорением одного знака, центры которых разнесены на угол π по эксцентрической аномалии. Между активными участками располагаются два одинаковых пассивных (рисунок 1). Суммарная длительность пассивных участков на витке считается заданной и постоянной в течение маневра.

Рисунок 1 – Структура управления на витке

В качестве параметров управления вводятся следующие величины : ξ – половина ширины первого активного участка со знаком тяги δ_1 с эксцентрической аномалией его центра η, $\bar{\delta}$ – отношение знаков тяг активных участков, $\alpha = const$ – ширина одного пассивного участка. Размеры участков измеряются по эксцентрической аномалии.

Отметим, что подобная структура управления, включающая разгонный и тормозной участки, была получена в работах [1,2,3,4]. Однако, как показали исследования, при определенных граничных условиях и наличии пассивных участков на витке коррекция орбиты при данной структуре управления невозможна. Установлено, что в этом случае маневр может быть осуществлен при наличии на витке двух активных участков одного знака. Для принятой в данной работе структуры управления, являющейся универсальной относительно граничных условий и длительности пассивных участков на витке, описанные варианты являются частными случаями.

Введем некоторые допущения. Будем полагать, что ускорение тяги w много меньше гравитационного ($w/g < 10^{-4}$), постоянно (в силу малости расхода рабочего тела) и направлено по трансверсали так, что:

$$w = w_0 \delta \;;\; \frac{\mu}{A^2} >> \frac{w_0}{e},$$

где $w_0 = P / m_0$ – величина ускорения, P – тяга двигательной установки, m_0 – начальная масса КА, $\delta \in [+1, 0, -1]$ – функция включения тяги, μ – гравитационный параметр, A, e – большая полуось и эксцентриситет орбиты, соответственно.

С учетом принятых допущений уравнения движения спутника в центральном гравитационном поле под действием трансверсальной составляющей реактивного ускорения w можно записать в виде [5]:

$$
\begin{aligned}
\frac{dA}{dE} &= \frac{2A^3}{\mu}\sqrt{1-e^2}\,w,\\
\frac{de}{dE} &= \frac{A^2}{\mu}\sqrt{1-e^2}\,(2\cos E - e\cos^2 E - e)w,\\
\frac{d\omega}{dE} &= \frac{A^2}{\mu e}\sin E(2 - e^2 - e\cos E)w,\\
\frac{dV_x}{dE} &= \sqrt{\frac{A^3}{\mu}}(1 - e\cos E)|w|,\\
\frac{dt}{dE} &= \sqrt{\frac{A^3}{\mu}}(1 - e\cos E),
\end{aligned}
\qquad (1)
$$

где ω – аргумент перигея, E – эксцентрическая аномалия.

Проведем для данной системы уравнений процедуру усреднения. С учетом введенных параметров управления после интегрирования и перехода к независимой переменной t будем иметь:

$$
\begin{aligned}
\frac{dA}{dt} &= \frac{2w_0}{\pi}\sqrt{\frac{A^3}{\mu}}\sqrt{1-e^2}\,\delta_1\left[\xi + \bar{\delta}(\pi - \alpha - \xi)\right],\\
\frac{de}{dt} &= \frac{w_0}{2\pi}\sqrt{\frac{A}{\mu}}\sqrt{1-e^2}\,\delta_1\left\{-3e\left[\xi + \bar{\delta}(\pi - \alpha - \xi)\right] + 4s_1\cos\eta - \frac{e}{2}s_2\cos 2\eta\right\},\\
\frac{d\omega}{dt} &= \frac{w_0}{2\pi e}\sqrt{\frac{A}{\mu}}\delta_1\left\{2(2-e^2)s_1\sin\eta - \frac{e}{2}s_2\sin 2\eta\right\},\\
\frac{dV_x}{dt} &= w_0\left\{1 - \frac{\alpha}{\pi} + \frac{2}{\pi}e\cos\eta\sin\frac{\alpha}{2}\cos\left(\xi + \frac{\alpha}{2}\right)\right\},
\end{aligned}
\qquad (2)
$$

где $s_1 = \sin\xi - \bar{\delta}\sin(\xi + \alpha)$, $\quad s_2 = \sin 2\xi - \bar{\delta}\sin 2(\xi + \alpha)$.

Известно, что на вековую эволюцию орбиты сильное влияние оказывает нецентральность гравитационного поля Земли. Если в разложении геопотенциала учесть только вторую зональную гармонику, то ее влияние на скорость смещения перигея будет характеризоваться величиной производной $(d\omega/dt)_g$ [5]:

$$
\left(\frac{d\omega}{dt}\right)_g \approx \frac{\varepsilon(5\cos^2 i - 1)}{2\sqrt{\mu}A^{3.5}},
$$

где $\varepsilon = 2{,}634\cdot 10^{10}\ \frac{км^5}{с^2}$.

Отбросив в уравнениях движения (2) члены, содержащие малый множитель e, усредненная математическая модель вековой эволюции слабоэллиптической орбиты в поле земного сфероида будет иметь вид:

$$\begin{aligned}
&\frac{dA}{dt} = \frac{2w_0}{\pi}\sqrt{\frac{A^3}{\mu}}\delta_1\left[\xi + \bar{\delta}(\pi - \alpha - \xi)\right],\\
&\frac{de}{dt} = \frac{2w_0}{\pi}\sqrt{\frac{A}{\mu}}\delta_1\left[\sin\xi - \bar{\delta}\sin(\xi + \alpha)\right]\cos\eta,\\
&\frac{d\omega}{dt} = \frac{2w_0}{\pi e}\sqrt{\frac{A}{\mu}}\delta_1\left[\sin\xi - \bar{\delta}\sin(\xi + \alpha)\right]\sin\eta + \frac{\varepsilon(5\cos^2 i - 1)}{2\sqrt{\mu}A^{3,5}},\\
&\frac{dV_x}{dt} = w_0\left\{1 - \frac{\alpha}{\pi}\right\}
\end{aligned} \tag{3}$$

2 Построение аналитических решений

С целью получения аналитических решений будем считать, что длительности активных участков и их расположение на витке, то есть параметры ξ и η, не изменяются в процессе маневра. В этом случае задача определения управления элементами орбиты A, e и ω сводится к решению двухпараметрической краевой задачи относительно параметров управления $\xi = const$ и $\eta = const$ для системы дифференциальных уравнений (3) при следующих граничных условиях:

$$\begin{aligned}
&t=0,\ A=A_0,\ e=e_0,\ \omega=\omega_0,\\
&t=t_k,\ A=A_k,\ e=e_k,\ \omega=\omega_k.
\end{aligned} \tag{4}$$

При этом параметры δ_1 и $\bar{\delta}$, определяющие направления вектора тяги на активных участках выбираются исходя из граничных условий и продолжительности пассивных участков на витке.

С учетом принятых допущений система уравнений (3) интегрируются аналитически. Параметры управления определяются из системы уравнений:

$$\left.\begin{aligned}
&\xi = k\left[\sin\xi - \bar{\delta}\sin(\xi + \alpha)\right]\cos\eta - \bar{\delta}(\pi - \alpha - \xi),\\
&\eta = arctg\left|\frac{\Delta\omega_a}{\ln(e_k / e_0)}\right|,
\end{aligned}\right\} \tag{5}$$

где $k = ln\frac{A_k}{A_0} / (e_k - e_0)$, $\Delta\omega_a = \Delta\omega - \Delta\omega_g$, $\Delta\omega_g = -\frac{\pi B\sqrt{\mu}}{8w_0\delta_1\left[\xi - \bar{\delta}(\pi - \alpha - \xi)\right]}\left[\frac{1}{A_k^4} - \frac{1}{A_0^4}\right]$,

$B = \frac{\varepsilon\left(5\cos^2 i - 1\right)}{2\sqrt{\mu}}$

Произведя преобразования системы (5) с учетом ограничения $0 \le \xi \le \pi - \alpha$, окончательно получаем

$$\bar{\delta} = 1 - \left|\frac{\pi - \alpha}{k\cos\eta\sin\alpha}\right|, \quad \delta_1 = \frac{1+\bar{\delta}}{2} sign\Delta A + \frac{1-\bar{\delta}}{2},$$

$$\xi = arccos\left(-\frac{\pi - \alpha}{2k\cos\eta\sin\frac{\alpha}{2}}\right) - \frac{\alpha}{2}, \text{ при } \bar{\delta} = 1,$$

$$\xi = \frac{\pi - \alpha}{2} + k\sin\left(\xi + \frac{\alpha}{2}\right)\cos\frac{\alpha}{2}\frac{ln(e_k / e_0)}{\sqrt{ln^2(e_k / e_0) + \Delta\omega_a^2}}, \text{ при } \bar{\delta} = -1, \tag{6}$$

$$\eta = arctg\left[\frac{\Delta\omega_a}{ln(e_k / e_0)}\right].$$

Таким образом, в случае активных участков одного знака их длительность определяется в явном виде, а в случае противоположных – в результате решения трансцедентного уравнения.

После определения параметров управления можно вычислить время маневра t_k и затраты характеристической скорости V_X. Из 1-го и 4-го уравнений системы (3) находим:

$$t_k = \frac{\sqrt{\mu}}{w_0}\left(\frac{1}{\sqrt{A_0}} - \frac{1}{\sqrt{A_k}}\right)\delta_1\frac{\pi}{\xi + \bar{\delta}(\pi - \alpha - \xi)}, \tag{7}$$

$$V_x = \sqrt{\mu}\left(\frac{1}{\sqrt{A_0}} - \frac{1}{\sqrt{A_k}}\right)\delta_1\frac{\pi - \alpha}{\xi + \bar{\delta}(\pi - \alpha - \xi)}. \tag{8}$$

По полученным аналитическим решениям были построены изолинии затрат характеристической скорости V_X на маневр в плоскости корректируемых параметров ΔA и Δe (рисунок 2) для нескольких значений требуемого изменения аргумента перигея $\Delta\omega_a$ под действием тяги ДМТ при следующих исходных данных: высота апогея исходной орбиты – 1000 км, высота перигея –360 км (A_0=7058 км, e_0=0,04534), суммарная длительность пассивных участков на витке $\alpha = 120^0$. Тонкие линии разделяют плоскость корректируемых параметров на области, где управление на витке будет состоять из активных участков одного ($\bar{\delta} = 1$) и противоположных знаков ($\bar{\delta}=-1$) Как видно, области управления 1-го типа вытянуты вдоль оси, соответствующей изменению большой полуоси орбиты. Таким образом, управление на витке будет иметь активные участки одного знака в случае преимущественной коррекции большой полуоси ΔA и противоположных знаков при значительных коррекциях эксцентриситета Δe и аргумента перигея $\Delta\omega_a$. Изолинии V_x для управления 1-го типа – прямые линии, в этом случае энергетические затраты зависят только от требуемого изменения большой полуоси орбиты и не зависят от необходимых приращений эксцентриситета и аргумента перигея, коррекция которых осуществляется "автоматически" при соотвествующем расположении активных участков на витке относительно линии апсид. При управлении 2-го типа затраты V_x будут функцией всех трех корректируемых параметров: ΔA, Δe и $\Delta\omega_a$ Изолинии имеют точки излома, соответствующие решению задачи с одним активным участком на витке.

Для оценки методических погрешностей полученных аналитических решений проводилось численное моделирование межорбитальных переходов на модели движения в оскулирующих элементах. При моделировании учитывались возмущения от нецентральности гравитационного поля Земли. Интегрирование системы дифференциальных уравнений проводилось методом Рунге-Кутта 4-го порядка до заданного значения характеристической скорости V_x=100 м/с. Значения параметров управления вычислялись по уравнениям (6). Построенная в результате расчетов область достижимости, изображенная на рисунке 2 пунктирными линиями, мало отличается от соответствующей области, построенной по аналитическим решениям.

Таким образом, полученные аналитические решения являются достаточно точными и могут быть использованы на стадии оценки баллистических характеристик маневров КА с двигателем малой тяги.

БИБЛИОГРАФИЧЕСКИЙ СПИСОК

1. Салмин В.В., Соколов В.О. Приближенный расчет маневров формирования орбиты спутника Земли с двигателем малой тяги // Космич. исслед. 1991. Т.29. №6.
2. Салмин В.В. Оптимизация космических перелетов с малой тягой Проблемы совместного управления траекторным и угловым движением. М.:Машиностроение, 1987.
3. Юрин В.В. Оптимальная коррекция параметров орбиты космического аппарата с двигателем малой тяги // Космич. исслед. 1983. Т.21. №5.

4 Ишков С.А. Расчет оптимальных межорбитальных перелетов с малой трансверсальной тягой на эллиптическую орбиту // Космич. исслед. 1997. Т.35. №2

5 Эльясберг П.Е. Введение в теорию полета искусственных спутников Земли. М.: Наука, 1965

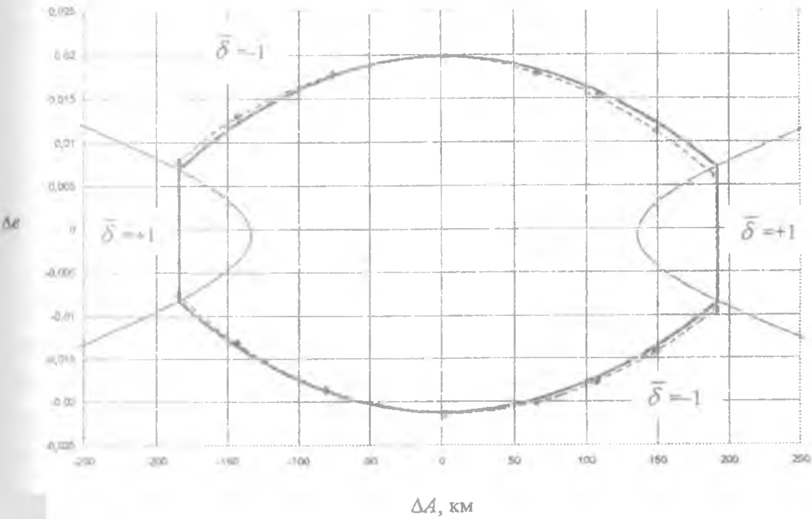

Рисунок 2 – Область корректируемых параметров