2. Бебяков А.П., Ржевский В.М., Бебяков А.А. Обоснование автоматизированной системы контроля надежности воздушного судна. Современные научно-технические проблемы транспорта России. /Сборник материалов международной НТК. - Ульяновск: УВ АУ ГА, 1999 -С.109-110

УДК 629.78

Дружинин Э.И.

ПРОГРАММНОЕ ТРАССИРОВАНИЕ ЗАДАННЫХ МАРШРУТОВ

Предлагается новый подход к построению программного управления, обеспечивающего решение актуальной задачи [1,2,3,4] сканирования аппаратурой наблюдения космического аппарата заданного программного маршрута. Метод опирается на результаты решения двухточечной нелинейной краевой задачи теории управления [5]. Существенная особенность двухточечной краевой задачи состоит в поиске управления, переводящего систему из ее начального состояния в заданное конечное состояние вдоль *какой-либо* траектории. Это обстоятельство использует процедура построения управления, развитая в работе [5]. Будучи примененным в задаче переориентации орбитального телескопа [6], этот подход позволил решить проблему автоматического обхода сингулярных состояний исполнительных гиросиловых органов. В задаче прослеживания заданного маршрута свободы в выборе траектории перехода нет. Однако решение этой задачи "с заданной точностью", использующее алгоритм [5] по типу встроенной процедуры, позволило распространить преимущество метода решения двухточечной краевой задачи на алгоритм построения управления при прослеживании маршрутов. При таком подходе к решению "маршрутной задачи" были найдены достаточные условия существования управления, сканирующего маршрут с заданной точностью, и была разработана процедура его формирования.

Рассмотрим дифференциальную систему

$$x = f(t,x,u). \tag{1}$$

Здесь $x(t)\in R^n$ – вектор состояния, или фазовый вектор, системы Управление $u(\cdot)$ – элемент некоторого банахова пространства функций B, определенных на $[t_0,t_f]\subset R$ со значениями в R^m: $u(t)\in U\subset R^m$. Функция $f(t,x,u)$ определена и непрерывна на $R\times R^n\times R^m$ Для $(t,x,u)\in R\times R^n\times R^m$ функция $f(t,\cdot,\cdot)$ (т е при каждом фиксированном значении $t\in R$) имеет непрерывные частные производные $\dfrac{\partial f(t,x,u)}{\partial x_i}$ и $\dfrac{\partial f(t,x,u)}{\partial u_r}$ по компонентам векторов x и u

Предполагается, что при любом фиксированном $u(\cdot)\in B$ и любом начальном векторе $x_0\in R^n$ существует и единственно решение $x(t)=x(t,t_0,u(t))$ задачи Коши:

$$\dot{x}=f(t,x,u(t)),\ x(t_0)=x_0. \tag{2}$$

Пусть отображение $\varphi:[t_0,t_f]\to R^n$ задает некоторый маршрут в пространстве состояний R^n. Точку маршрута, отвечающую моменту времени $t\in[t_0,t_f]$, будем обозначать $x_t^*=\varphi(t)$. Будем говорить, что динамическая система *прослеживает* заданный маршрут, если существует управление $u^*(t)$ такое, что траектория системы (1) на отрезке времени $t\in[t_0,t_f]$ совпадает с заданным маршрутом. Такой режим динамической системы будем называть *трассированием* заданного маршрута. Задачу построения программного управления $u^*(t)$, осуществляющего на некотором отрезке времени $t\in[t_0,t_f]$ трассирование заданного маршрута $x^*\overset{def}{=}\varphi(\cdot)$, будем называть задачей *трассирования* маршрута, а искомое управление $u^*(t)$ – *трассирующим* управлением. Будем говорить о трассировании маршрута с заданной точностью, когда существует управление $u^*(t)$, при котором траектория системы (1) на отрезке времени $[t_0,t_f]$ остается в заданной окрестности маршрута.

Назовем пару точек $\{x(t),x(\tau)\}$ пространства состояний R^n управляемой парой, если на промежутке $[t_0,t_f]$ определено управление $u(\cdot)$, переводящее по траектории системы (1) состояние $x(t_0)$ в состояние $x(t_f)$ Установим условия существования управления, трассирующего заданный маршрут. Необходимое условие практически очевидно:

Теорема 1 Для существования управления, осуществляющего программное трассирование заданного маршрута, необходимо, чтобы каждая пара точек маршрута была управляемой.

Доказательство Если найдется неуправляемая пара точек маршрута, то для нее не существует управления, переводящего первую компоненту пары во вторую по *какой-либо* траектории. В частности, будет невозможен переход и по участку заданного маршрута, заключенному между компонентами неуправляемой пары. В этом случае весь маршрут не может быть прослежен.

В качестве частного случая, отметим используемое в дальнейшем свойство управляемости любой точки трассируемого маршрута относительно его конечной точки. Приведем достаточное условие существования трассирующего управления в виде:

Теорема 2. Для существования управления, трассирующего с заданной точностью маршрут, определяемый в пространстве состояний R^n динамической системы (1) непрерывным отображением $\varphi : [t_0, t_f] \to R^n$, достаточно, чтобы существовала окрестность $\Omega \subset R^n$ этого маршрута, каждая точка которой составляет управляемую пару с каждой точкой маршрута, и для всех этих пар были выполнены условия разрешимости двухточечной краевой задачи для рассматриваемой динамической системы [5].

Опишем процедуру построения искомого управления и траектории перехода системы из состояния x_0^* в состояние x_f^*. Рассмотрим разбиение D отрезка $[t_0, t_f]$ на составляющие отрезки $[t_s, t_{s+1}]$, где множество $\{t_s\}_{0 \le s \le k}$ есть строго возрастающая последовательность точек из отрезка $[t_0, t_f]$:

$t_0 < t_1 < \ldots < t_k = t_f$. Будем обозначать: $\Delta_s = [t_s, t_{s+1}]$ – отрезок разбиения; $\lambda(D) = \max\limits_{0 \le s \le k} |t_{s+1} - t_s|$ - параметр разбиения. В множестве P всех разбиений введем в рассмотрение базу $S = \{D_\rho, \lambda(D_\rho)\}$. Элементы базы S представляют собой совокупность разбиений, для которых $\lambda(D_\rho) < \rho$, $\rho > 0$. Выполнение аксиом базы проверяется стандартным путем [7].

Построим для каждого разбиения D_ρ управление $V_\rho(\tau), \tau \in [t_0, t_f]$, осуществляющее перевод системы (1) из состояния x_0^* в состояние x_f^* следующим образом. Для каждой пары состояний $[x_\rho^*, x_f^*]$, пользуясь алгоритмом решения двухточечной краевой задачи [5], вычислим управление $u_{\rho_s}(\tau), \forall\tau\in[t_{\rho_s}, t_f]$ и $\forall\rho_s\in\overline{\rho_0,\rho_{k-1}}$. Это управление переводит начальную точку $x^*_{\rho_s}=\varphi(t_{\rho_s})$ отрезка Δ_ρ разбиения D_ρ в *конечную точку маршрута* x^*_f. Обозначим через $\bar u_{\rho_s}(\cdot)$ ограничение найденного управления $u_{\rho_s}(\cdot)$ на промежуток $[t_{\rho_s}, t_{\rho_{s+1}}]$. Таким образом, значения $\bar u_{\rho_s}(\tau)$ определены только для $\tau\in[t_{\rho_s}, t_{\rho_{s+1}}]$. В силу непрерывности решений системы (1) для заданной окрестности Ω существует момент времени τ_{ρ_s} такой, что вдоль траектории $x=x(\tau;t_{\rho_s},x^*_{\rho_s})$ системы $\dot x=f(t,x,\bar u_{\rho_s}(\tau))$ будет выполняться: $x(\tau)\in\Omega$, $\forall\tau\in[t_{\rho_s},\tau_{\rho_s}]\subset[t_{\rho_s},t_{\rho_{s+1}}]$. Найдем этот момент τ_{ρ_s} и вычислим состояние $x(\tau_{\rho_s})\in\Omega$. Рассмотрим краевую задачу: $\dot x=f(t,x,\delta u_{\rho_s}(\tau))$, $\tau\in[\tau_{\rho_s}, t_{\rho_{s+1}}]$; $x_{\tau_{\rho_s}}=x(\tau_{\rho_s})$, $x_{\rho_{s+1}}=x^*_{\rho_{s+1}}$ для каждого промежутка Δ_{ρ_s} разбиения D_ρ. В условиях теоремы пара состояний { $x(\tau_{\rho_s}), x^*_{\rho_{s+1}}$ } управляема. Методом [1] вычислим управление $\delta u_{\rho_s}(\cdot)$, переводящее систему из состояния $x(\tau_{\rho_s})$ в состояние $x^*_{\rho_{s+1}}$, т.е. возвращающее систему на маршрут. Введем в рассмотрение управление $U_{\rho_s}(\tau)=\bar u_{\rho_s}(\tau)\,\tilde\cup\,\delta u_{\rho_s}(\tau)$ такое, что $U_{\rho_s}(\tau)\equiv\bar u_{\rho_s}(\tau)$, $\forall\tau\in[t_{\rho_s},\tau_{\rho_s})$ и $U_{\rho_s}(\tau)\equiv\delta u_{\rho_s}(\tau)$, $\forall\tau\in[\tau_{\rho_s},t_{\rho_s})$. Здесь операция $\tilde\cup$ обозначает "склеивание" управлений. Искомое управление $V_\rho(\tau)$, $\tau\in[t_0,t_f]$ сформируем в виде:

$$V_\rho(\tau)=\tilde{\bigcup_{\rho_0\le\rho_s\le\rho_k}} U_{\rho_s}(\tau)=\tilde{\bigcup_{\rho_0\le\rho_s\le\rho_k}}\left\{\bar u_{\rho_s}(\tau)\,\tilde\cup\,\delta u_{\rho_s}(\tau)\right\},\quad \tau\in\tilde{\bigcup_{\rho_0\le\rho_s\le\rho_k}}\left(\left[t_{\rho_s},\tau_{\rho_s}\right)\tilde\cup\left[\tau_{\rho_s},t_{\rho_{s+1}}\right)\right)\}. \tag{2}$$

Это кусочно-непрерывное управление имеет на промежутке времени $[t_0,t_f]$ конечное число точек разрыва $\{t_{\rho_s},\tau_{\rho_s}\}_{\rho_0\le\rho_s\le\rho_k}$. Из процедуры построения управления (2) ясно, что непрерывная траектория перехода системы из начального состояния на маршруте x^*_0 в конечное состояние x^*_f "склеена" из непрерывно дифференцируемых кусков $\{x(\tau)|\ \tau\in[t_{\rho_s},\tau_{\rho_s}]\}$ и $\{x(\tau)|\tau\in[\tau_{\rho_s},t_{\rho_{s+1}}]\}$ решений двухточечных краевых задач:

$$L_\rho(\tau)=\tilde{\bigcup_{\rho_0\le\rho_s\le\rho_k}}\left\{\left\{x(\tau)\,|\,\tau\in[t_{\rho_s},\tau_{\rho_s}]\right\}\tilde\cup\left\{x(\tau)\,|\,\tau\in[\tau_{\rho_s},t_{\rho_{s+1}}]\right\}\right\}. \tag{3}$$

Очевидно, что эта траектория системы (1) является функцией $L_\rho(\tau)=\Phi(D_\rho)$ на множестве P разбиений отрезка $[t_0,t_f]$. Так как в P имеется база S, можно поставить вопрос о пределе этой функции по базе $\lambda(D_\rho) \to 0$ [7] В результате исследования был получен следующий результат: *пределом функции* $L_\rho(\tau) - \Phi(D_\rho)$ *по норме равномерной непрерывности* $\max_{i \in 1,n} \max_{\tau \in [t_0, t_f]} |L(\tau) - L_o(\tau)|$ *по базе* $\lambda(D_\rho) = \max |t_{\rho_{s+1}} - t_{\rho_s}| \to 0$ *является заданный маршрут* $x^* = \varphi()$. На основании этого можно утверждать, что при *подходящем разбиении отрезка* $[t_0, t_f]$ *можно построить почти всюду непрерывное на этом отрезке управление* $V_\rho(\cdot)$ *трассирующее маршрут с любой заданной точностью.* На практике минимальный шаг разбиения отрезка $[t_0, t_f]$ определяется длительностью такта работы вычислительной машины в контуре управления. Это обстоятельство и будет определять реальную прецизионность трассирования маршрута.

Отметим важное для реализации свойство сформированного управления $V_\rho(\tau)$ Будучи по построению непрерывной функцией на всех частичных открытых интервалах $(t_{\rho_s}, \tau_{\rho_s})$ и $(\tau_{\rho_s}, t_{\rho_s}), \forall \rho_s \in \overline{\rho_0, \rho_k}$ со значениями в полном нормированном пространстве, функция $V_\rho(\tau)$ во всякой внутренней точке интервала $[t_0, t_f]$ имеет предел справа и предел слева, а так же имеет в левом конце t_0 – предел справа и в правом конце t_f – предел слева. Поэтому, как известно, функция $V_\rho(\tau)$ является равномерным пределом ступенчатых функций [9]. Следовательно, построенное управление может быть сколь угодно точно аппроксимировано ступенчатыми функциями, реализуемыми управляющим компьютером.

С позиции второй задачи динамики вопрос существования программного управления, осуществляющего с любой заданной точностью гармоническую или полиномиальную аппроксимацию непрерывного программного маршрута, заданного в пространстве *конфигураций* механической системы, исследовался в [8].

Замечание. Управление, трассирующее маршрут с точностью до заданной окрестности, можно построить и путем "склеивания" локальных траекторий перехода из начала в конец каждого отрезка Δ_{ρ_s} разбиения D_ρ. Однако предлагаемая в докладе процедура построения траектории $L_\rho()$ при ее практической реализации создает возможность "перешагивания" через некоторые отрезки разбиения (прохождение их без пересчета управления) Это будет происходить всякий раз при "залипании" траектории под управлением $u_{\rho_s}(\cdot)$ в окрестности

Ω в течение промежутка времени большего некоторого $\Delta t = t_{\rho_{s+1}} - t_{\rho_s}$. При локальном подходе такая возможность исключена.

БИБЛИОГРАФИЧЕСКИЙ СПИСОК

1. Шелехов В.А. Метод расчета программного углового движения аппаратуры для дистанционного зондирования земной поверхности. Сб. Динамика управляемых космических объектов. ИрВЦ СО АН СССР, 1987, с.22-32.
2. Дружинин Э.И., Шелехов В.А. Галушко М.В., Алгоритмическое программное обеспечение для расчета угловых движений космического аппарата при съемке поверхности Земли. Сб.трудов VI Всеросийского научно-технического семинара "Управление движением и навигация". Самара, 1994, с 118-121.
3. Дарнопых В.В., Малышев В.В. Планирование управления съемочной аппаратурой системы космических аппаратов. Изв. РАН. Теория и системы управления,1998, №6, с. 135-149.
4. Аншаков Г.П., Антонов Ю.Г. Мантуров А.И., Усталов Ю.М. Формирование программ управления ориентацией космических аппаратов наблюдения. Сб. научно-технических статей по ракетно-космической технике. Самара, 2001г., с. 16-25.
5. Дмитриев А.В., Дружинин Э.И. Программная переориентация орбитального телескопа. Труды международной конференции "Проблемы управления и моделирования в сложных системах". Самара, Россия, 2000, с. 417-423.
6. Дмитриев А.В., Дружинин Э.И. К теории нелинейных краевых задач управляемых истем. – В кн.: Дифференциальные уравнения и численные методы. Новосибирск: Наука. Сиб. отделение, 1986, с.179-187.
7. Зорич В.А. Математический анализ, т. I. – М.: Наука, 1981.
8. Зубов В.И. Колебания и волны, Ленинград: Изд-во ленинградского университета, 1989.
9. Н.Бурбаки. Функции действительного переменного, – М.: Наука, 1965.